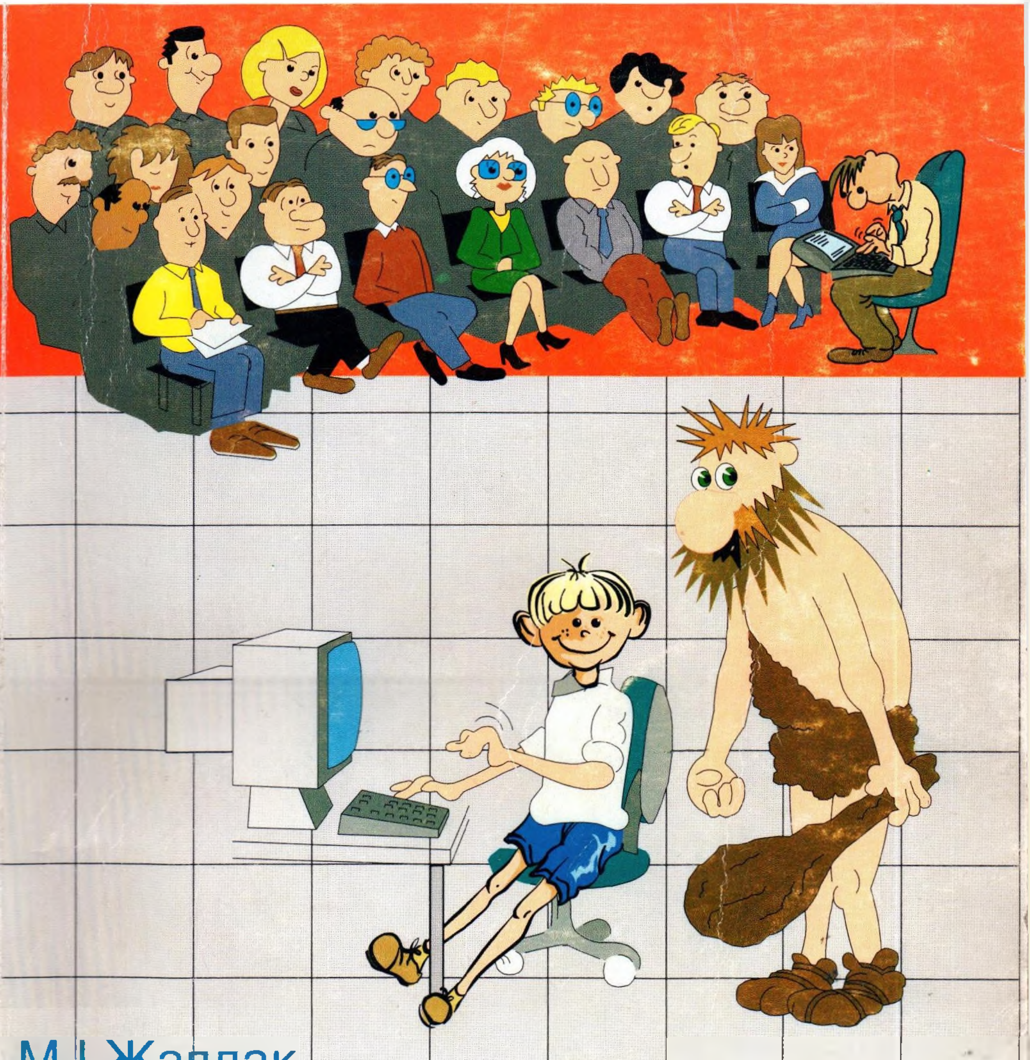
Посібник для вчителів



М.І.Жалдак

КОМП'ЮТЕР НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

М.І.Жалдак

КОМП'ЮТЕР НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Рекомендовано Міністерством освіти України
як посібник для вчителів

Київ
"Техніка"
1997

ББК 74.262
Ж 24
УДК 681.31–181.48:51(075)

Рецензенти: чл.-кор. АПН України, д-р техн. наук, проф. А.Ф. Верлань (Інститут проблем моделювання в енергетиці НАН України), доц. кафедри математики і методики викладання математики, канд. пед. наук А.В. Грохольська (Український державний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова)

Жалдак М.І.
Ж 24 Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів –К.: Техніка, 1997. –303 с.: іл.
ISBN 966-575-115-8

У посібнику розглянуто можливість використання комп`ютера для супроводу навчання математики в середніх навчальних закладах. На численних прикладах демонструється розв'язування за допомогою комп`ютера різного роду задач з алгебри і початків аналізу та геометрії, що зводяться до відшукання розв'язків рівнянь і нерівностей та їх систем, дослідження функцій, обчислення визначених інтегралів та ін. Призначений для вчителів математики і інформатики, може бути корисним також учням старших класів, СПТУ, студентам педагогічних училищ та молодших курсів вузів, де вивчається математика.

$Ж\frac{4306010500-014}{202-97}$ ББК 74.262

ISBN 966-575-115-8

Передмова

Широке впровадження в навчальний процес сучасних засобів збирання, зберігання, опрацювання, подання, передавання інформації відкриває широкі перспективи щодо гуманітаризації освіти і гуманізації навчального процесу, поглиблення та розширення теоретичної бази знань і надання результатам навчання практичного значення, активізації пізнавальної діяльності, створення умов для повного розкриття творчого потенціалу дітей з урахуванням їхніх вікових особливостей і життєвого досвіду, індивідуальних нахилів, запитів і здібностей.

Разом з тим виникає цілий ряд проблем, що стосуються змісту, методів, організаційних форм і засобів навчання, обов'язкових рівнів знань різних навчальних предметів, яких має досягти кожна дитина.

Даний посібник має на меті розкрити деякі аспекти використання засобів сучасних інформаційних технологій під час вивчення алгебри та початків аналізу в середніх навчальних закладах із різними ухилами навчання.

Причому вчителеві не нав'язуються та чи інша методика подання навчального матеріалу, закріплення і контролю знань, конкретний зміст, методи, засоби і організаційні форми навчання, співвідношення між обсягом самостійної роботи учнів і роботи разом із вчителем, між індивідуальними і колективними формами роботи тощо. Все це вчитель має визначити сам з урахуванням власних позицій і уподобань, специфіки умов, в яких перебігає навчальний процес, індивідуальних особливостей учнів і класного колективу.

Зрозуміло, що неможливо і немає потреби однаково навчати і навчити всіх дітей, сформувати в кожної дитини одні й ті самі знання, вміння та навички в різних предметних галузях, домагатися від дітей обов'язкового досягнення одного й того самого рівня розвитку логічного та творчого мислення, однакового сприймання різних проявів оточуючої дійсності. Це стосується і навчання математики, методів розв'язування різноманітних задач, побудови й аналізу математичних моделей найрізноманітніших процесів і явищ, інтерпретації та узагальнення результатів такого аналізу.

На сьогодні розроблено значну кількість програмних засобів, що дозволяють розв'язувати за допомогою комп'ютера досить широке коло математичних задач різних рівнів складності. Це такі програми як *DERIVE, EUREKA, GRAN1, Maple, MathCad, Mathematika, MathLab, Maxima, Numeri, Reduce, Statgraph* тощо. Причому одні з цих програм розраховані на фахівців досить високої кваліфікації в галузі математики, інші – на учнів середніх навчальних закладів чи студентів вузів, які лише почали вивчати шкільний курс математики чи основи вищої математики.

Найбільш придатними для підтримки вивчення курсу математики в середніх навчальних закладах видаються програми *DERIVE, EUREKA, GRAN1*. Для їх використання не вимагаються надто потужні комп'ютери з великою швидкодією, значними обсягами оперативних запам'ятовуючих пристроїв, високими вимогами до можливостей графічних побудов. При роботі з ними цілком успішно можуть бути використані будь-які IBM-сумісні ком'ютери з процесорами типів 86, 286 і вище, кольоровими моніторами і графічними адаптерами типу EGA і вище, ОЗП від 386 кБ і вище. Названі програми прості у користуванні, оснащені досить зручним і «люб'язним» інтерфейсом, максимально наближеним до інтерфейсу найбільш поширених програм загального призначення (систем опрацювання текстів, управління базами даних, електронних таблиць, графічних і музичних редакторів, операційних оболонок тощо), контекстно-чутливою допомогою. Від користувача не вимагається значного обсягу спеціальних знань з інформатики, основ обчислювальної техніки, програмування тощо, за винятком найпростіших понять, які цілком доступні для учнів середніх класів шкіл.

Використання подібних програм дає можливість учневі розв'язувати окремі задачі, не знаючи відповідного аналітичного апарату, методів і формул, правил перетворення виразів тощо. Наприклад, учень може розв'язувати рівняння і нерівності та їх системи, не знаючи формул для знаходження коренів, методу виключення змінних, методу інтервалів тощо; обчислювати похідні та інтеграли, не пам'ятаючи їхніх таблиць, досліджувати функції, не знаючи алгоритмів їх дослідження, відшукувати оптимальні розв'язки в найпростіших задачах лінійного і нелінійного програмування, не використовуючи симплекс-метод, градієнтні методи тощо. Разом з тим, завдяки можливостям графічного супроводу комп'ютерного розв'язування задачі, учень чітко і легко розв'язуватиме досить складні задачі, впевнено володітиме відповідною системою понять і правил. Використання подібних програм дає можливість у багатьох випадках зробити розв'язування задач настільки ж доступним, як і просте розглядання малюнків чи графічних зображень. Відповідні програми перетворюють окремі розділи і методи математики в «математику для всіх», що робить їх доступними, зрозумілими, легкими і зручними для використання, а той, хто розв'язує задачу, стає користувачем математичних методів, можливо не володіючи їхньою будовою і обґрунтуванням, аналогічно до того, як він використовує інші комп'ютерні програми (текстові, графічні, музичні редактори, електронні таблиці, бази даних, операційні оболонки, експертні системи), не знаючи, як і за якими принципами вони побудовані, якими мовами програмування описані, які теоретичні положення покладено в їхню основу.

З іншого боку, такий підхід до вивчення математики дає наочні уявлення про поняття, що вивчаються, розвиває образне мислення, просторову уяву, дозволяє досить глибоко проникнути в сутність досліджуваного явища, неформально розв'язувати задачу. При цьому на передній план виступає з'ясування проблеми, постановка задачі, розробка відповідної математичної моделі, матеріальна інтерпретація отриманих за допомогою комп'ютера результатів. Усі технічні операції щодо опрацювання побудованої математичної моделі, реалізації методу відшукання розв'язку, оформлення та подання результатів опрацювання вхідної інформації покладаються на комп'ютер.

Важко переоцінити ефективність використання програм зазначеного типу і в разі поглибленого вивчення математики. Можливість провести необхідний чисельний експеримент, швидко виконати потрібні обчислення чи графічні побудови, перевірити ту чи іншу гіпотезу, випробувати той чи інший метод розв'язування задачі, вміти проаналізувати та пояснити результати, отримані за допомогою комп'ютера, з'ясувати межі можливостей застосування комп'ютера чи обраного методу розв'язування задачі має надзвичайне значення у вивченні математики.

Уже з наведеного видно, як можуть змінюватись (причому в досить широкому діапазоні) зміст і структура навчальної діяльності учнів залежно від специфіки обраної ними предметної галузі, спрямованості навчання, індивідуальних нахилів і здібностей. При цьому комп'ютерна підтримка вивчення математики з використанням програмних засобів зазначеного типу дає значний педагогічний ефект, полегшуючи, розширюючи і поглиблюючи вивчення і розуміння методів математики на відповідних рівнях в середніх навчальних закладах з найрізноманітнішими ухилами навчання – гуманітарного спрямування, СПТУ різних профілів, середніх загальноосвітніх школах, гімназіях, ліцеях, класах і закладах з поглибленим вивченням природничо-математичних дисциплін. Звичайно, і програми курсів математики, і глибина вивчення відповідних понять, законів, методів, аналітичного апарату можуть суттєво різнитися між собою.

Не торкаючись докладно всіх тем, які вивчаються в курсі математики загальноосвітньої середньої школи, можна зауважити, що комп'ютерні програми згаданого типу можуть бути використані практично на всіх уроках математики, починаючи вже з п'ятих-шостих класів, зокрема під час вивчення системи координат на прямій і на площині, поняття функції, елементарних функцій та їхніх властивостей, методів розв'язування рівнянь і нерівностей та їхніх систем, елементів теорії границь числових послідовностей, диференціального та інтегрального числень та їх застосування. Зрозуміло, що окрім подібних програм вчитель при потребі може використовувати різного роду тренажери, програми для контролю знань, збирання статистичних даних стосовно навчального процесу та їх опрацювання тощо. Використання зазначених програм дає змогу вчителеві значно інтенсифікувати спілкування його з учнями та учнів між собою, більше уваги приділити задачам на доведення, постановці задач, побудові їхніх математичних моделей, розробці і дослідженню методів розв'язування задач, дослідженню розв'язків, логічному аналізу умов задач, пошуку нестандартних підходів до розв'язування задач, виявленню закономірностей, яким підкоряються досліджувані процеси і явища, перекласти на комп'ютер рутинні, чисто технічні та нецікаві операції, ручне виконання яких практично не розвиває інтелекту дитини, а часто навіть, навпаки, гасить його, коли дитина уподібнюється до робота чи комп'ютера, виконуючи замість нього обчислювальні, графічні та інші технічні операції.

Зрозуміло, що заняття з математики, орієнтовані на використання засобів навчання згаданих типів, мають проходити у відповідно оснащеному досить досконалими технічними і програмними засобами класі. У таких класах мають вивчатися всі навчальні предмети без винятку, а не лише основи інформатики та обчислювальної техніки. Це зі свого боку сприятиме розширенню і поглибленню міжпредметних зв'язків, інтеграції окремих навчальних предметів, їх взаємопроникненню і взаємодії, що, зрештою, дасть можливість оволодівати елементами нових інформаційних технологій при вивченні різних навчальних дисциплін, а не лише окремого, майже ізольованого від інших, навчального курсу «Основи інформатики і обчислювальної техніки».

У даному посібнику досить детально розглянуті програмні засоби *GRAN1*, *DERIVE*, *EUREKA* в обсязі, який відповідає програмі з курсу математики загальноосвітньої середньої школи. Усі названі програми призначені перш за все для розв'язування певних класів задач різними методами й можуть бути віднесені до так званих програм-розв'язувачів.

Посібник складається із трьох розділів.

У першому розділі подано правила роботи із програмою *GRAN1*, яка розроблялася спеціально для підтримки шкільного курсу математики. Проаналізовано можливості використання програми у вивченні різних розділів математики в загальноосвітній середній школі, СПТУ, педагогічних училищах, середніх навчальних закладах гуманітарного спрямування.

У другому розділі розглянуто правила роботи із програмою *DERIVE* в тій її частині, яка не виходить далеко за рамки програм шкільних курсів математики та інформатики. Подана порівняльна характеристика окремих послуг програм *GRAN1* і *DERIVE*. Проаналізовано можливості використання програми *DERIVE* для підтримки шкільного курсу математики з огляду на те, що програма розроблялася

ля використання при розв'язуванні задач, які подекуди вимагають осить високої кваліфікації в галузі математики.

У третьому розділі вміщено правила роботи із програмою *UREKA*.

До всіх тем, розглянутих у посібнику, наведена значна кількість рикладів, унаочнюючих графічних зображень, задач і вправ для самостійного виконання, питання для самоконтролю.

Передбачається, що користувач володіє найпростішими навичками роботи з відповідно оснащеним комп'ютером. Зрозуміло, що фахівці в галузі системного програмного забезпечення повинні заздалегідь оснастити комп'ютер всіма необхідними системними програмними засобами – встановити необхідну операційну систему, операційну оболонку, драйвери пристроїв введення–виведення тощо. Від користувача розглянутих у посібнику програмних засобів такі знання і вміння не вимагаються.

Відгуки та зауваження просимо надсилати на адресу: 254053, Київ, 53, вул. Обсерваторна, 25. Видавництво «Техніка».

Інформацію щодо розглядуваних програмних засобів можна отримати за адресою: 252030, Київ, 30, вул. Пирогова, 9. Український державний педагогічний університет ім. М. П. Драгоманова, кафедра інформатики.

Розділ 1
Програма GRAN1

§ 1. Початок роботи з програмою. Звернення до послуг програми

Програма *GRAN1* призначена для графічного аналізу функцій, звідки і походить її назва (*GRaphic ANalysis*).

Для роботи з програмою потрібно мати на диску два файли – *gran1.exe* та *gran1.hlp*, загальний обсяг яких становить близько 240 Кбайт.

Надалі «вказати ім’я файла», «звернутись до послуги» і т.п. означатиме – встановити вказівник імен файлів чи послуг (з використанням клавіш управління курсором чи маніпулятора «мишка») на потрібне ім’я і натиснути клавішу *Enter* (чи ліву клавішу «мишки»).

Після активізації програми на екрані з’явиться зображення, подане на рис.1.1.

У верхньому рядку на екрані подано «головне меню» – перелік «послуг», до яких можна звернутися в процесі роботи з програмою. При зверненні до певного пункту головного меню з’являється перелік пунктів (послуг) відповідного підменю (рис. 1.2). Пункти підменю, в свою чергу, можуть розгалужуватись на підпункти, перелік яких з’являється при зверненні до відповідного пункту підменю.

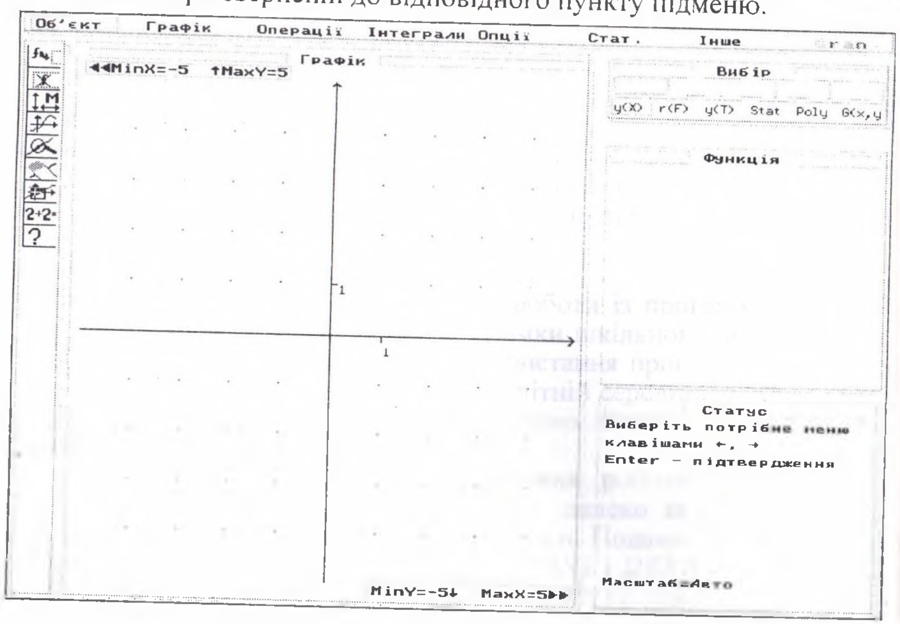


Рис. 1.1

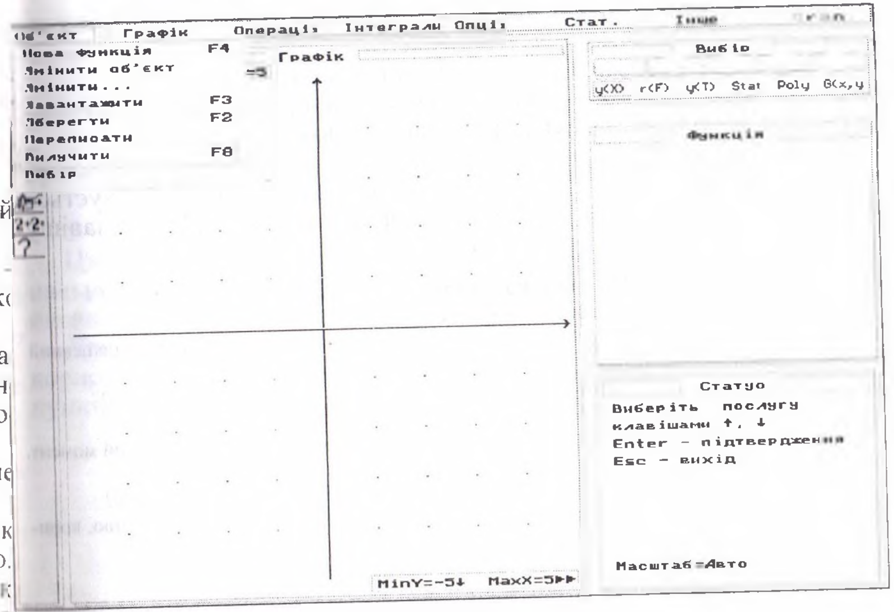


Рис. 1.2

Назви підпунктів підменю, використання яких в даний момент не є коректним, подано блідішим кольором. Наприклад, використання підпунктів «Змінити функцію», «Змінити відрізок», «Вилучити» в пункті «Об’єкт» на самому початку роботи з програмою не є коректним, оскільки ще не введено будь-яку інформацію і немає чого змінювати чи вилучати.

Програму оснащено контекстно-чутливою допомогою. Якщо вказівник встановлено на певний підпункт деякого пункту головного меню, то при натисненні клавіші F1 у вікні «Графік» з’являється допоміжне вікно, в якому подається коротка інформація про призначення зазначеного підпункту та про правила його використання. «Перегортання» сторінок тексту довідок здійснюється за допомогою клавіш *Page Up*, *Page Down*. Якщо вказівник встановлено на деякий пункт головного меню, то після натискання клавіші F1 подається коротка інформація про правила використання меню і підменю.

Одночасне натиснення клавіш *Ctrl* і F1 приводить до появи на екрані вікна з переліком всіх пунктів допомоги.

Звернення до окремих послуг програми (без перебирання пунктів головного меню і підпунктів відповідних підменю) при необхідності можна здійснити за допомогою функціональних клавіш чи певних комбінацій клавіш.

Відповідність окремих функціональних клавіш та комбінацій клавіш послугам програми в кожний момент роботи з програмою показано у відповідних підменю пунктів головного меню.

Призначення однієї й тієї самої функціональної клавіші може змінюватися залежно від послуги, що використовується.

Якщо необхідно відмовитися від роботи із щойно обраною послугою і повернутися до головного меню програми, використовується клавіша *Esc*. З тією ж метою використовують праву клавішу «мишки».

Запитання для самоконтролю

1. Скільки пунктів є в головному меню програми *GRAN1*? Які назви цих пунктів?
2. Що і де з'явиться на екрані, якщо встановити вказівник пунктів головного меню на певний пункт і натиснути клавішу *Enter*?
3. Які дії необхідно виконати, щоб звернутися до деякого підпункту деякого підменю?
4. Скільки підпунктів є в підменю пункту «Операції»? Які назви цих підпунктів?
5. Як дізнатися, коректним чи ні є звертання до підпункту деякого підменю в наявний момент часу?
6. Як звернутися до потрібного пункту меню, користуючись маніпулятором «мишка»?
7. Як звернутися до потрібного підпункту підменю у вказаному пункті головного меню, користуючись маніпулятором «мишка»?
8. Як дізнатись про призначення того чи іншого підпункту деякого підменю?
9. Як вивести на екран перелік всіх пунктів «Допомоги»?
10. Як дізнатись про призначення деяких комбінацій функціональних клавіш?
11. Як відмовитись від виконання вибраної послуги і повернутись до головного меню?

§ 2. Введення інформації

Перш ніж вводити вирази чи таблиці, що характеризують певну функціональну залежність, необхідно вказати тип задання функціональної залежності, а також на одне з п'яти можливих місць у вікні «Вибір» (на екрані вгорі праворуч, див. рис.1.2), на якому буде записано позначення відповідної функціональної залежності.

Перша літера в позначенні відображає тип задання функціональної залежності:

X – залежність між змінними x та y задано у вигляді $y = y(x)$, де $y(x)$ – деякий вираз від змінної x (явне задання функції);

T – залежність між змінними x та y задано через параметр t: $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, де $\varphi(t)$, $\phi(t)$ – деякі вирази від змінної (параметра) t (параметричне задання функції);

F – залежність задано в полярних координатах у вигляді $r = r(F)$, де $r(F)$ – вираз від змінної F, r – полярний радіус точки на площині, F – полярний кут (що відкладається від полярної осі до полярного радіуса проти годинникової стрілки), причому зв'язок між відповідними декартовими координатами x і y можна визначити, виходячи з формул $x = r\cos(F)$, $y = r\sin(F)$;

G – залежність між змінними x і y задано неявно у вигляді $G(x, y) = 0$, де $G(x,y)$ – деякий вираз від змінних x та y (неявне задання функції);

P – функцію задано таблично (при цьому програма будує поліном наперед вказаного степеня не вище 7, який найкраще в розумінні середнього квадратичного наближає таблично задану функцію);

S – досліджується статистична вибірка.

Цифра, що стоїть після літери, яка визначає тип задання функціональної залежності, визначає порядковий номер місця (поля), де записано позначення (ідентифікатор) функції.

Для того щоб вказати тип задання функціональної залежності, використовується підпункт «Встановити тип» пункту «Опції». Цей підпункт, в свою чергу, містить в собі 6 підпунктів (рис. 1.3.):

тип $y = y(X)$	$Alt - X$
тип $r = r(F)$	$Alt - F$
тип $x = x(T),\ y = y(T)$	$Alt - T$
тип «Стат.»	$Alt - S$
поліном	$Alt - P$
тип $G(x, y) = 0$	$Alt - G$.

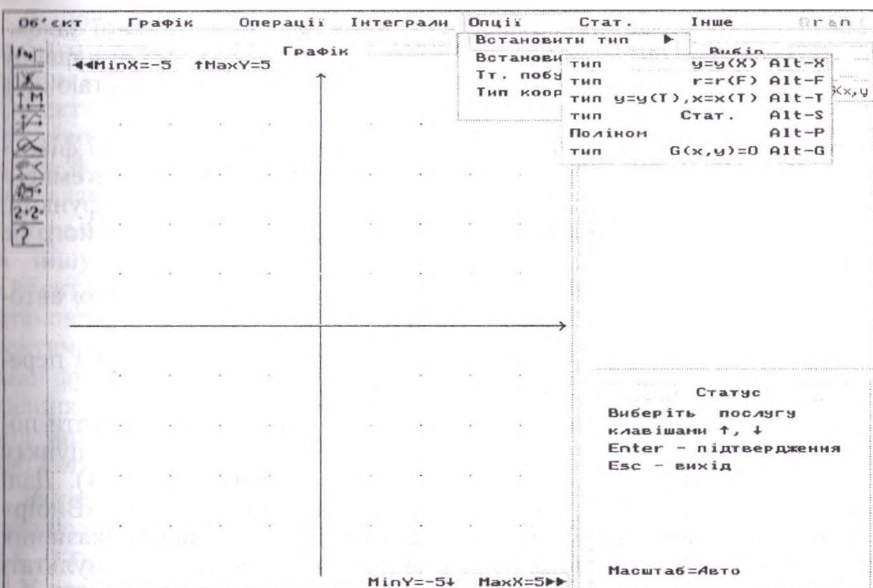


Рис. 1.3

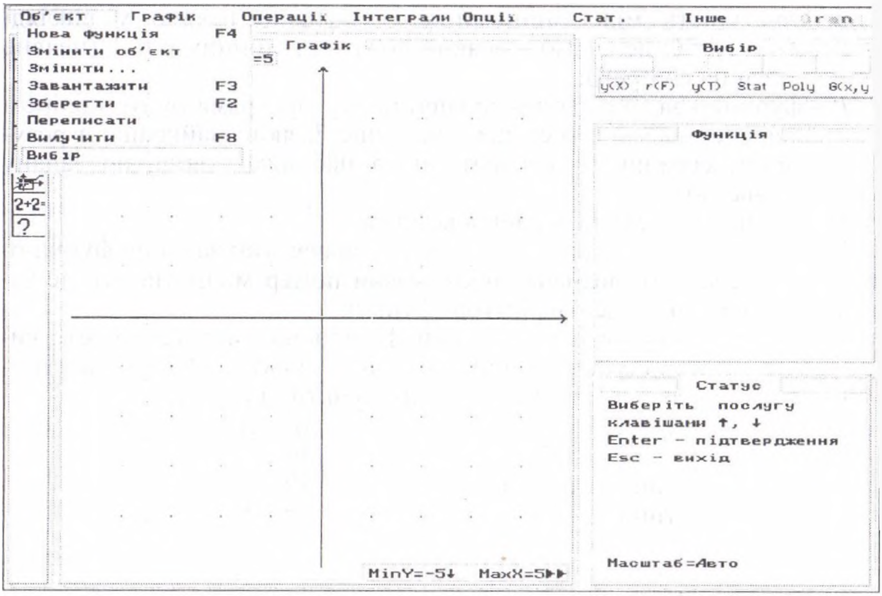


Рис. 1.4

Для швидкого встановлення типу задання функціональної залежності за допомогою клавіатури досить одночасно натиснути клавішу *Alt* та клавішу з відповідною літерою (*X*, *T*, *F*, *G*, *P*, *S*), не звертаючись до пункту «Опції».

Вказаний останнім тип задання функціональної залежності фіксується і відмічається на екрані у рядку під вікном «Вибір» затемненням відповідного поля: $y(X)$, $r(F)$, $x(T)$, *Stat*, *Poly*, $G(x, y)$. Всі функції, що вводяться заново, матимуть такий тип задання доти, доки його не буде змінено.

Якщо ж жодного типу не вказується, то за «замовчуванням» автоматично встановлюється тип $y = y(x)$.

Усі п'ять функцій, що вводяться, можуть бути будь-якого з перелічених типів задання в довільних поєднаннях.

Щоб показати місце у вікні «Вибір», куди необхідно записати позначення функціональної залежності, слід звернутися до пункту «Об'єкт», після чого з'явиться відповідне підменю (рис. 1.4). Далі слід звернутися до підпункту «Вибір». У результаті у вікні «Вибір» з'явиться вказівник полів (підсвічене поле). Перемістивши вказівник на потрібне поле, слід натиснути клавішу *Enter* або *Esc*. У результаті вибране поле у вікні «Вибір» буде окреслено білою рамкою.

Для швидкого вибору за допомогою клавіатури потрібного поля у вікні «Вибір» досить одночасно натиснути клавішу *Alt* та клавішу з цифрою, що відповідає номеру потрібного поля (поля у вікні «Вибір» нумеруються зліва направо від 1 до 5).

Цей же вибір можна здійснити за допомогою маніпулятора «мишка», для чого досить встановити курсор «мишки» на потрібне поле у вікні «Вибір» і натиснути ліву клавішу «мишки».

Після того, як вказано тип задання функціональної залежності між змінними (встановлено вказівник типу на одне з позначень $y(X)$, $r(F)$, $x(T)$, *Stat*, *Poly*, $G(x,y)$ в рядку, розташованому під вікном «Вибір») та встановлено вказівник у вікні «Вибір» на потрібне місце, можна вводити необхідну інформацію – вирази, значення меж відрізків, значення аргументів виразів тощо.

Позначення функції у вікні «Вибір» та відповідний вираз подаються символами одного й того самого кольору після того, коли буде (у відповідь на запити програми) введено вираз і межі зміни аргументів. Сам вираз (після вказування області його визначення) з'являється у вікні «Функція», розташованому праворуч на екрані (див. рис. 1.8). Якщо ж вираз ще не введено, то вибране місце у вікні «Вибір» залишається порожнім і обведеним білою рамкою. Позначення функції може мати вигляд *X1*, *F2*, *T3*, *G4*, *P5*, *S1* залежно від типу задання функції, що розглядається. Перша літера позначає тип задання функціональної залежності.

Якщо на вибране (за допомогою послуги «Вибір») місце (від 1-го до 5-го) необхідно ввести нову функцію (одного з 6 вказаних типів задання), використовується підпункт «Нова функція» пункту «Об'єкт». Одночасно програма автоматично вибирає найлівіше місце (що відображається у вікні «Вибір»), на яке раніше не була введена жодна функція, якщо за допомогою послуги «Вибір» ніяке місце не було вказане.

У разі необхідності на місце раніше введеної функції можна ввести іншу, використовуючи підпункт «Змінити функцію» пункту «Об'єкт» (або «Змінити вибірку», якщо вказівник у вікні «Вибір» встановлено на тип *S*). Одночасно програма автоматично контролює ідентичність типу задання нової функціональної залежності і замінюваної функції. Якщо ж необхідно змінити не лише функцію, але і тип задання функціональної залежності, попередньо введену функцію слід вилучити, для чого призначено підпункт «Вилучити» пункту «Об'єкт».

Якщо необхідно змінити раніше задані межі відрізка, на якому задано функцію, використовується підпункт «Змінити відрізок» пункту «Об'єкт».

У разі звертання до послуг, пов'язаних із введенням нової інформації, таких як:

- «Нова функція» (в пункті «Об'єкт»),

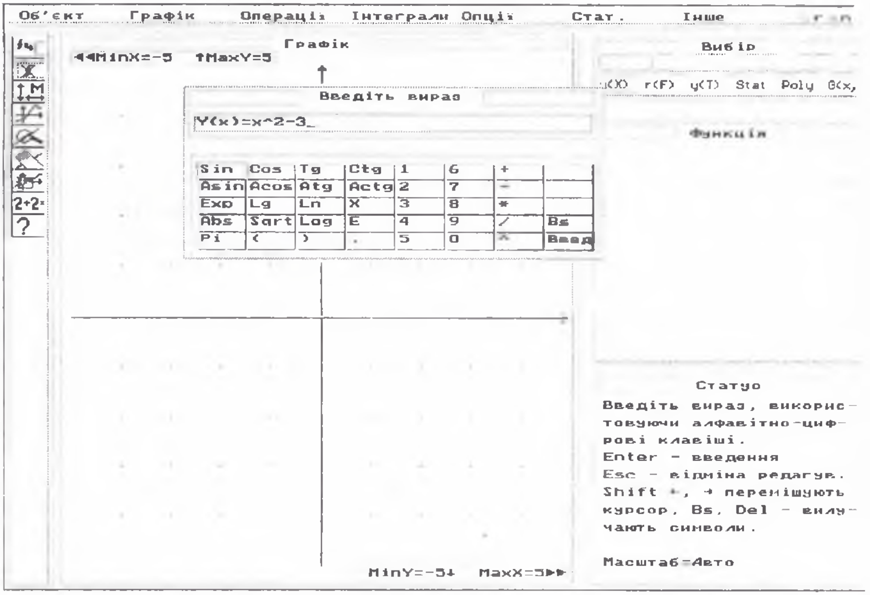

Об'єкт Графік Операції Інтеграли Опції Стат. Інше
Графік
◄◄MinX=-5 ↑MaxY=5
Введіть вираз
Y(x)=x^2-3_
Sin Cos Tg Ctg 1 6 +
Asin Acos Atg Actg 2 7 -
Exp Lg Ln X 3 8 *
Abs Sqrt Log E 4 9 / Bs
Pi ( ) . 5 0 ^ Введ
MinY=-5↓ MaxX=5►►
Вибір
r(F) y(T) Stat Poly
Функція
Статус
Введіть вираз, використовуючи алфавітно-цифрові клавіші.
Enter - введення
Esc - відміна редагув.
Shift ←, → переміщують курсор, Bs, Del - вилучають символи.
Масштаб=Авто

Рис. 1.5

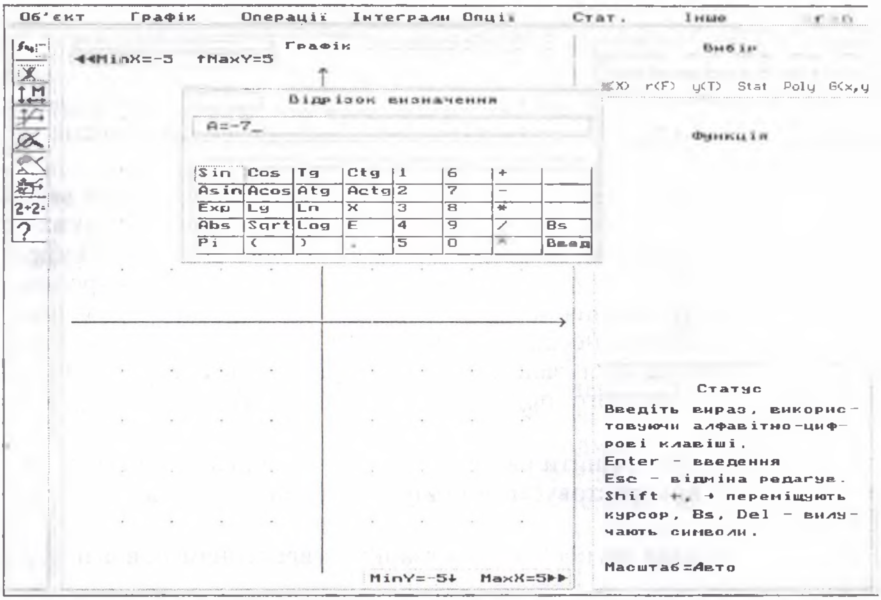

Об'єкт Графік Операції Інтеграли Опції Стат. Інше
Графік
◄◄MinX=-5 ↑MaxY=5
Відрізок визначення
A=-7_
Sin Cos Tg Ctg 1 6 +
Asin Acos Atg Actg 2 7 -
Exp Lg Ln X 3 8 *
Abs Sqrt Log E 4 9 / Bs
Pi ( ) . 5 0 ^ Введ
MinY=-5↓ MaxX=5►►
Вибір
r(F) y(T) Stat Poly
Функція
Статус
Введіть вираз, використовуючи алфавітно-цифрові клавіші.
Enter - введення
Esc - відміна редагув.
Shift ←, → переміщують курсор, Bs, Del - вилучають символи.
Масштаб=Авто

Рис. 1.6

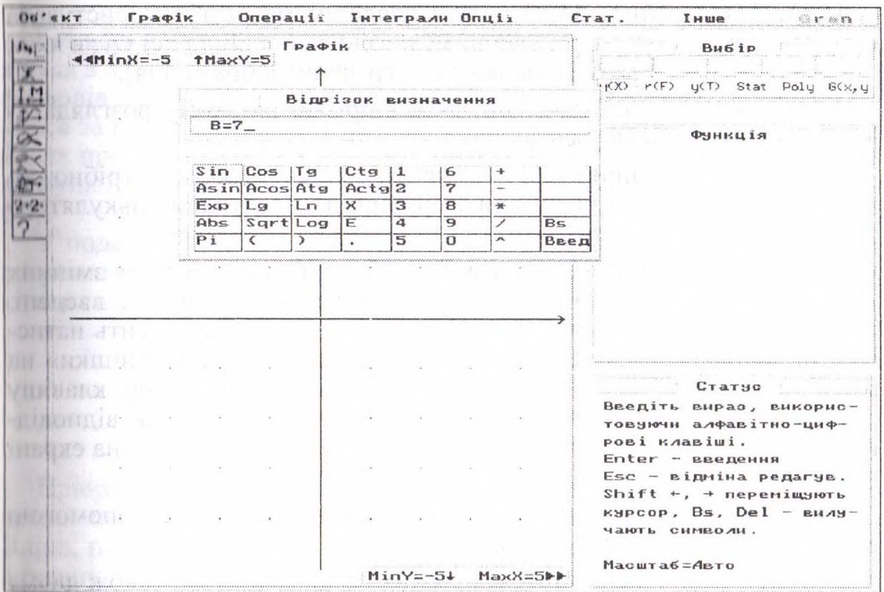


Рис. 1.7

- «Встановити масштаб», «Масштаб користувача» (в пункті «Опції»),
- «Т.т. побудови» (в пункті «Опції»),
- «Калькулятор» (в пункті «Інше»),

чи послуг, пов'язаних із зміною раніше введеної інформації, таких як:

- «Змінити функцію» (в пункті «Об'єкт»),
- «Змінити відрізок» (в пункті «Об'єкт») тощо,

у вікні «Графік» з'являється панель калькулятора, над якою розташовано рядок введення (темного кольору), а вище – напис «Введіть вираз» (при зверненні до послуг «Нова функція», (рис. 1.5), «Калькулятор», «Площа за точками») або «Визначення масштабу» (при зверненні до послуги «Масштаб користувача»), «Відрізок визначення» (при вказуванні меж, в яких змінюватиметься аргумент, рис. 1.6, 1.7) тощо.

На початку рядка введення залежно від типу інформації, що вводиться, можуть з'являтися різні написи:

$Y(x) = x$ – при введенні виразу $f(x)$ при явному заданні функції $y = f(x)$;

$G(x, y) = 1$ – при введенні виразу $G(x,y)$, аргументами якого є змінні x і y;

MinX, *MaxX*, *MinY*, *MaxY* – при введенні масштабу користувача (встановленні меж вздовж осі *Ox* та осі *Oy*, в яких будуть подаватися графічні зображення);

$A = -5$, $B = 5$ – при введенні меж відрізка, на якому розглядатиметься функція $y = f(x)$;

Calc – при введенні виразу, значення якого потрібно обчислити при зверненні до послуги «Калькулятор» тощо.

При цьому у рядку введення можуть бути подані значення змінних величин або вирази, що передбачені програмою чи раніше введені. Якщо немає потреби змінювати ці значення чи вирази, досить натиснути на клавіатурі клавішу *Enter* чи встановити курсор «мишки» на панелі калькулятора на позначення «Введ» і натиснути ліву клавішу «мишки». Після введення меж відрізка визначення функції відповідний вираз та межі аргумента з'являються у вікні «Функція» (на екрані праворуч, див. рис. 1.5, 1.6, 1.7, 1.8).

Введення нової інформації може здійснюватися за допомогою клавіатури та за допомогою «мишки».

За допомогою клавіатури інформація може вводитися також двома способами: без використання панелі калькулятора та з її використанням.

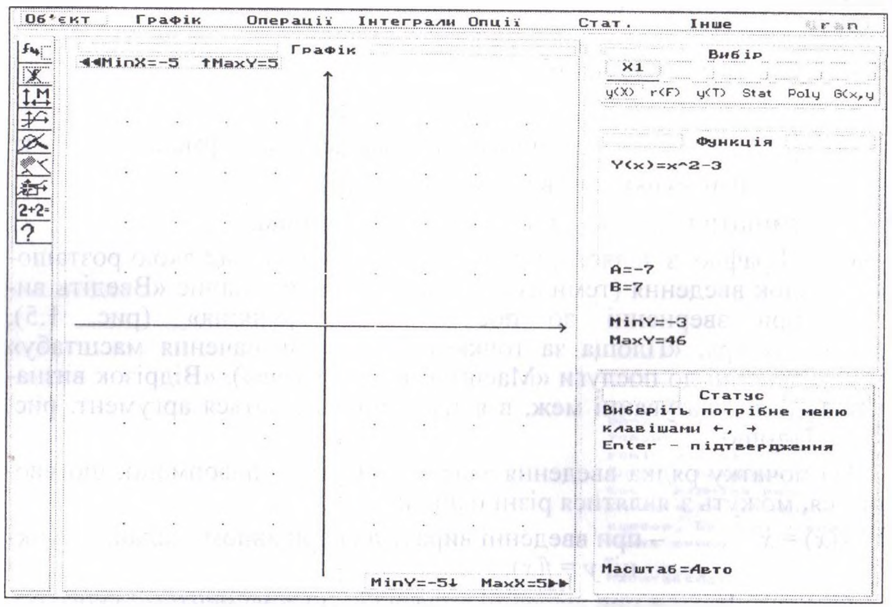


Рис. 1.8

Без використання панелі калькулятора всі необхідні символи вводяться з клавіатури як звичайно: слід набрати потрібну послідовність символів і натиснути клавішу *Enter*. Числові значення і вирази подаються за правилами, близькими до прийнятих у найбільш поширених мовах програмування (*BASIC*, *Pascal* тощо). Усі допустимі позначення функцій й операцій подано на панелі калькулятора (див. рис. 1.5, 1.6).

У поданих числових значеннях дробова частина, якщо вона є, відокремлюється від цілої крапкою (за цими ж правилами числа подаються і в тексті). Арифметичні операції позначаються знаками:

\+ – додавання,
\- – віднімання,
* – множення,
/ – ділення,
^ – піднесення до степеня.

Пріоритети (порядок виконання) операцій загальноприйняті. Бажаний порядок операцій може бути вказаний за допомогою дужок. Вираз, поданий у дужках, розглядається як єдине ціле і обчислюється в першу чергу. Всередині дужок можуть бути інші вирази, подані також у дужках. Кожній відкриваючій (лівій) дужці повинна відповідати закриваюча (права) дужка.

До виразів можуть бути включені також позначення (які розглядаються як неподільні символи) деяких функцій. Всі вони подані на панелі калькулятора (див. рис. 1.5, 1.6):

Sin – sin (синус),
Cos – cos (косинус),
Tg – tg (тангенс),
Ctg – ctg (котангенс),
Asin – arcsin (арксинус),
Acos – arccos (арккосинус),
Atg – arctg (арктангенс),
Actg – arcctg (арккотангенс),
Exp – експонента (e^x),
Lg – логарифм десятковий (за основою 10),
Ln – логарифм натуральний (за основою e),
Log – логарифм за довільною основою (при введенні основа вказується одразу після символа *Log),*
Abs – абсолютна величина,
Sqrt – корінь квадратний,
Pi – число π (= 3.141592654).

У тому разі, коли під час введення допущено похибку, або коли вираз, наявний у вікні введення, потрібно відредагувати (внести зміни), використовують звичайні засоби редагування:

- для вилучення символу зліва від курсора використовується клавіша *Back Space* (*Bs*); після вилучення символу всі інші, розташовані праворуч від курсора, і сам курсор зміщуються вліво на одну позицію;
- для вилучення символу в позиції, де розташовано курсор, використовують клавішу *Delete*;
- щоб вставити символ у позицію, де розташовано курсор, досить натиснути на клавіатурі відповідну клавішу, при цьому всі символи, розташовані в позиції курсора і праворуч від нього, зміщуються на одну позицію вправо (в програмі не передбачено скасування режиму вставляння символів у рядку введення);
- для переміщення курсора вздовж рядка введення потрібно натиснути і тримати клавішу *Ctrl* (або *Shift*), а далі за допомогою клавіш управління курсором (←, →) встановити курсор на потрібне місце. Якщо клавішу *Ctrl* (або *Shift*) не натиснуто, то клавішами управління курсором переміщується вказівник пунктів панелі калькулятора.

Після того, як значення чи вираз набрано з клавіатури чи відредаговано раніше введені, слід натиснути клавішу *Enter*. Це означатиме, що щойно набраний чи відредагований вираз введено до запам'ятовуючих пристроїв машини і з ним можна продовжувати роботу (вводити межі зміни аргументів, виконувати раніше вказану операцію тощо).

З використанням панелі калькулятора та клавіатури необхідні символи (в тому числі і позначення функцій) вводять таким чином. За допомогою клавіш управління вказівник пунктів панелі калькулятора (затемнений прямокутничок, див.рис.1.6) встановлюють на поле із зображенням потрібного символа, і далі натискають клавішу «Пропуск» (*Space Bar*), після чого вказаний символ з'являється у рядку введення. Після того, як всі набрані символи з'явилися в рядку введення, слід встановити вказівник пунктів панелі калькулятора на поле «Введ» і натиснути клавішу «Пропуск» або клавішу *Enter* (Введення). Редагування послідовності символів у рядку введення здійснюють аналогічно до попереднього. У цьому разі вилучити символ зліва від позиції курсора у рядку введення можна після встановлення вказівника пунктів панелі калькулятора на поле Bs і натиснення клавіші «Пропуск».

Переміщення курсора вздовж рядка введення здійснюється, як і раніше, за допомогою клавіш управління курсором (←, →) при натиснутій клавіші *Ctrl* (або *Shift*).

Відсутність операції *Delete* на панелі калькулятора компенсується за рахунок відповідного переміщення курсора (на одну позицію правіше) та операції *Bs*. Щоб вилучити всі введені символи, досить

встановити курсор правіше від усіх символів і далі повторити операцію *Bs* відповідну кількість разів.

За допомогою «мишки» інформація вводиться з використанням панелі калькулятора. Курсор «мишки» встановлюється на потрібний символ на панелі калькулятора і натискується ліва клавіша «мишки», після чого вказаний символ з'являється у рядку введення. Після того, як всі необхідні символи введено, слід вказати на пункт «Введ» панелі калькулятора, тобто встановити курсор «мишки» на пункт «Введ» і далі натиснути ліву клавішу «мишки».

Щоб відредагувати послідовність символів у рядку введення, слід за допомогою «мишки» вказати потрібну позицію, після чого з'являється вказівник позицій у рядку введення у позиції, вказаній за допомогою курсора «мишки». Якщо на вказане місце потрібно вставити новий символ, за допомогою «мишки» слід вказати на відповідний символ на панелі калькулятора. Якщо символ потрібно вилучити, слід вказати на пункт «*Bs*» панелі калькулятора. Щоб відмовитись від послуги (або припинити її виконання) і перейти до головного меню, досить натиснути праву клавішу «мишки» або клавішу *Esc* на клавіатурі.

Запитання для самоконтролю

1. Які типи задання функціональної залежності змінних передбачено програмою *GRAN1*?
2. Як вказати потрібний тип задання функціональної залежності змінних?
3. Як у вікні «Вибір» вибрати місце, на яке необхідно записати позначення функціональної залежності змінних?
4. Чи можна спочатку ввести вираз, а потім вказати на тип задання функціональної залежності змінних?
5. Яким буде тип задання функціональної залежності змінних, якщо не звертатися до пункту «Опції» і не вказувати жодного типу функціональної залежності?
6. Як вказати на потрібний тип функціональної залежності змінних, користуючись маніпулятором «мишка»?
7. Чи повинні різні функціональні залежності мати один і той самий тип задання?
8. Як можна перевірити, який вираз було щойно введено? Де його можна прочитати?
9. Які позначення операцій і функцій допускаються при введенні виразів? Де можна всі їх побачити?
10. Як визначаються пріоритети виконання операцій?
11. Як вводиться інформація з клавіатури без використання панелі калькулятора, поданої на екрані?
12. Як вводиться інформація з клавіатури з використанням панелі калькулятора, поданої на екрані?
13. Як можна вводити інформацію без використання клавіатури?
14. Як можна відредагувати раніше введену інформацію:
а) з використанням клавіатури? б) без її використання?
15. Чи можна вважати, що вираз введено до запам'ятовуючих пристроїв ЕОМ, якщо його набрано на клавіатурі і зображення виразу з'явилося на екрані у рядку введення над панеллю калькулятора?
16. Як можна відмовитись від послуги або припинити її виконання, якщо звернення до послуги вже розпочато?

§ 3. Координатна площина. Декартові та полярні координати

Одразу після завантаження програми *GRAN1* у полі «Графік» з'являється координатна площина з координатною сіткою, вузли якої помічено білим кольором. На осях абсцис (горизонтальній) та ординат (вертикальній) вказано значення поділок, що визначають масштаби вздовж цих осей (див. рис. 1.1 та ін.). Ці масштаби можна змінити за допомогою послуги «Встановити масштаб» пункту «Опції» (рис. 1.9).

Підпункт «Встановити масштаб» пункту «Опції», в свою, чергу містить два підпункти: Масштаб користувача *Alt-U*, Масштаб авто *Alt-A*.

У режимі «Масштаб користувача» можна встановити довільні межі вздовж осей *Ox* та *Oy*, в яких будуть подаватися зображення. Досить звернутися до цього пункту меню і далі у вікні «Визначення масштабу», яке з'являється на екрані після входження у вказаний пункт меню «Масштаб користувача» (рис. 1.10), ввести мінімальне (*Min X*) та максимальне (*Max X*) значення координат вздовж осі *Ox* та мінімальне (*Min Y*) і максимальне (*Max Y*) значення координат вздовж осі *Oy*, які бажано мати при поданні зображень (графіків, гістограм і т.д.).

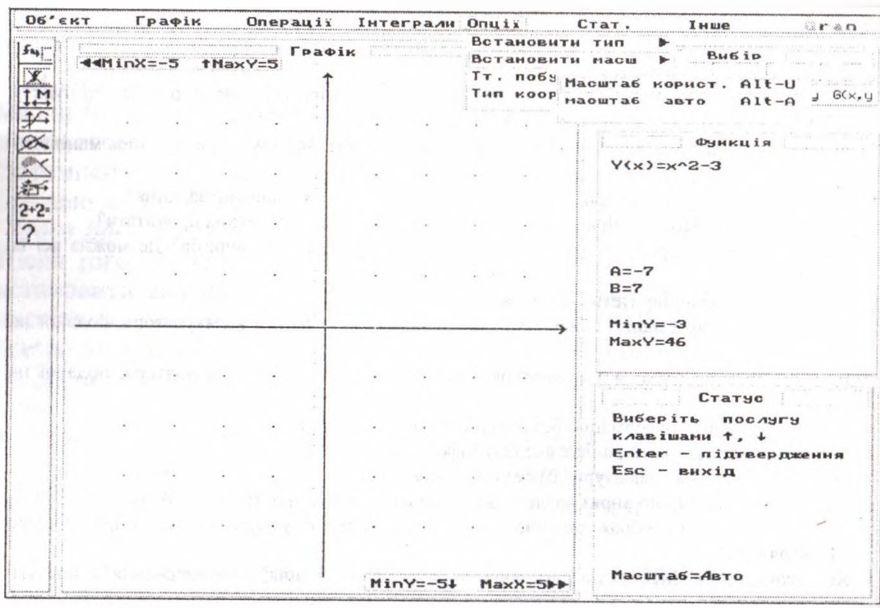


Рис. 1.9

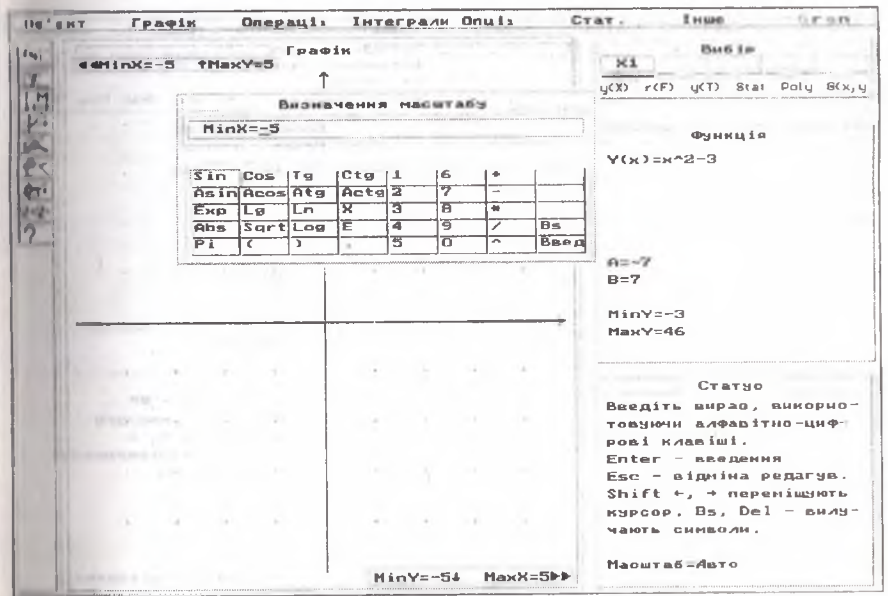


Рис. 1.10

У режимі «Масштаб авто» програма автоматично вибирає масштаби вздовж осей *Ox* та *Oy* залежно від меж, в яких змінюються абсциси і ординати при конкретних побудовах.

Щоб вказати бажаний тип координат, слід звернутись до підпункту «Тип координат» пункту «Опції» і далі до підпункту «Декартові координати» чи «Полярні координати» (рис. 1.11).

У декартовій системі координат положення точки на площині визначається її проекціями на вісь *Ox* (абсциса) та на вісь *Oy* (ордината).

У полярній системі координат положення точки на площині визначається її віддаллю від початку координат (полярний радіус) та кутом між додатним напрямом полярної осі (горизонтальної півпрямої, що виходить з початку координат і направлена вправо) і відрізком, який з'єднує розглядувану точку з початком координат. Цей кут (полярний кут) відкладається від полярної осі проти годинникової стрілки та змінюється в межах від 0 до 2π.

Щоб визначити координати деякої точки на площині, слід звернутися до підпункту «Координати» пункту «Графік» (рис. 1.12). Після звернення до цього підпункту на полі вікна «Графік» у початку координат з'являється курсор (у вигляді маленької стрілочки). Координати курсора подаються у спеціально відведеному полі над вікном «Графік» (вгорі ліворуч). При переміщенні курсора (за допомогою

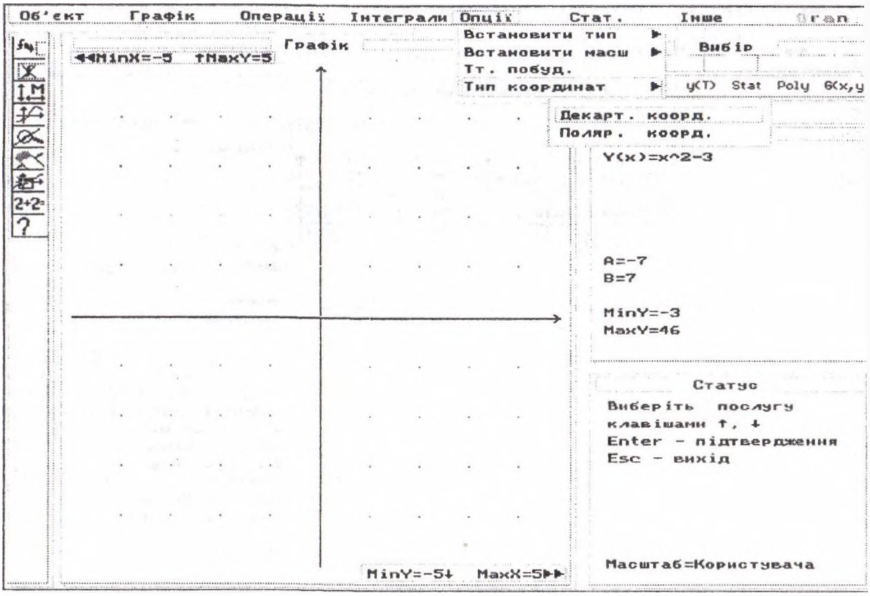


Рис. 1.11

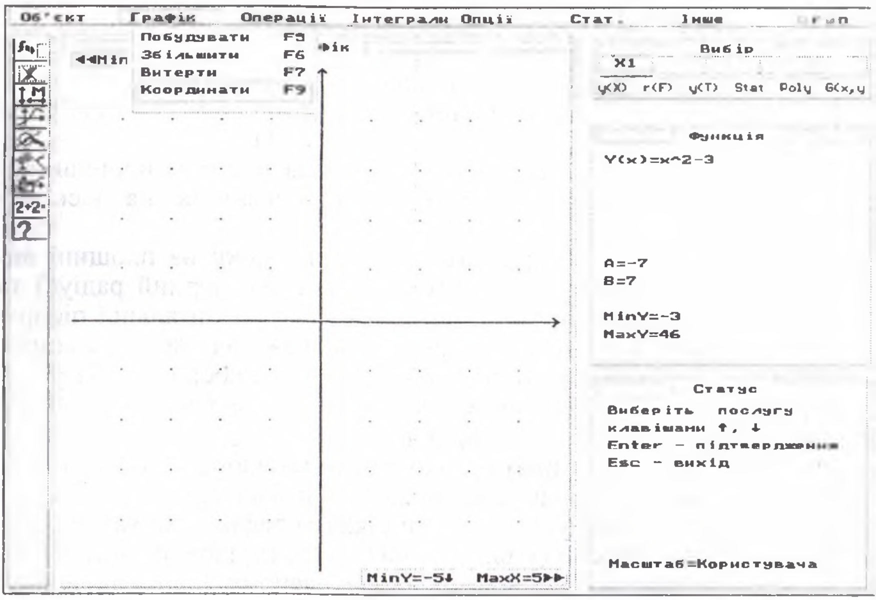


Рис. 1.12

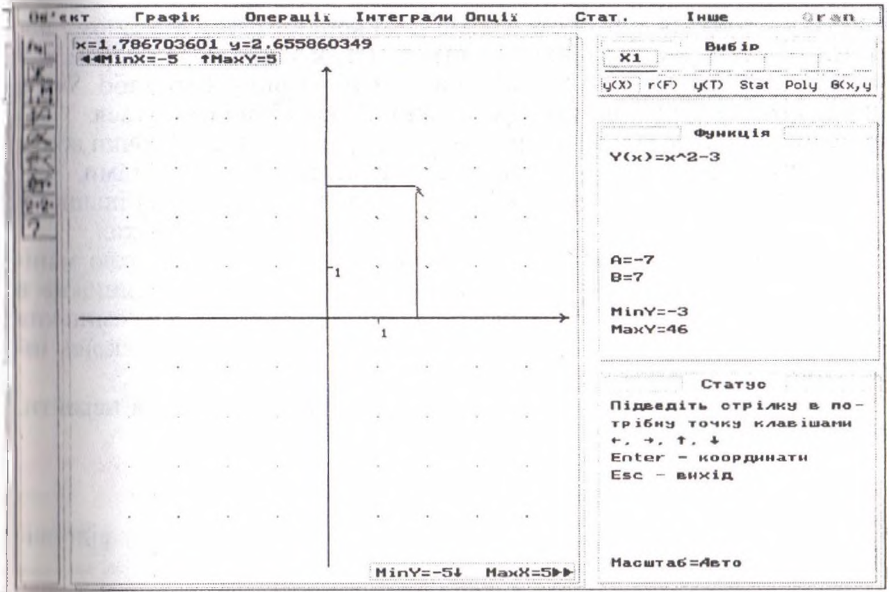


Рис. 1.13

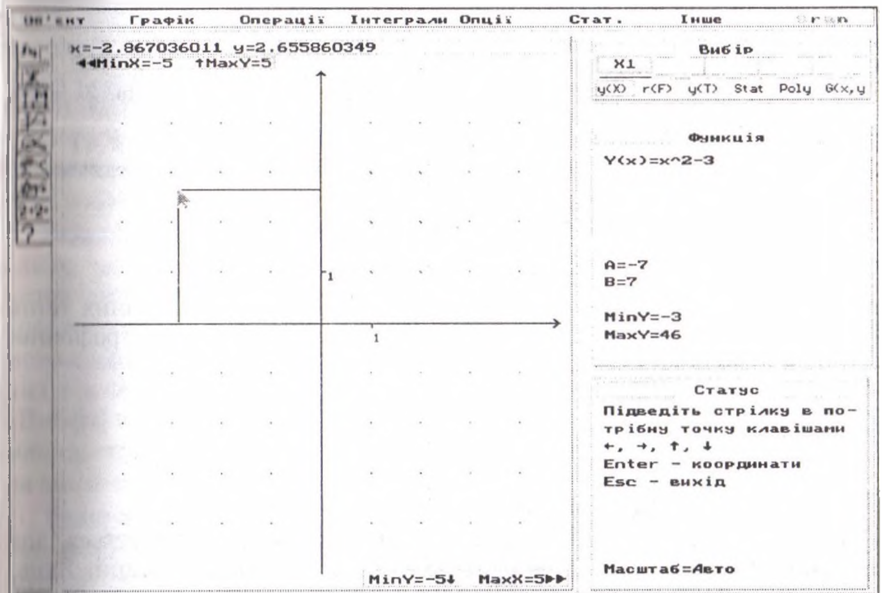


Рис. 1.14

клавіш управління курсором ←, →, ↑, ↓) координати у вказаному полі відповідним чином змінюються (рис. 1.13). Якщо перед переміщуванням курсора натиснути та утримувати клавішу *Ctrl* (або *Shift*) швидкість переміщення курсора у вікні «Графік» збільшується. У такий спосіб можна знайти координати наперед визначеної точки або ж встановити курсор у точці з наперед визначеними координатами.

Для закінчення роботи з послугою «Координати» (як і з більшістю інших) слід натиснути клавішу *Esc* або праву клавішу «мишки».

Визначити координати деякої точки можна і за допомогою маніпулятора «мишка». Для цього досить встановити курсор «мишки» в потрібній точці у вікні «Графік» і натиснути ліву клавішу «мишки» (не звертаючись попередньо до послуги «Координати» чи якоїсь іншої) (рис. 1.14).

Від полярних координат до декартових і навпаки можна перейти використовуючи формули:

$$x = \rho\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\varphi; \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

При використанні послуг програми *GRAN1* необхідність у відповідних обчисленнях відпадає.

Запитання для самоконтролю

1. Як можна встановити масштаби вздовж осей *Ox* та *Oy*?
2. Як можна змінити масштаб вимірювання полярного кута?
3. Як можна знайти декартові чи полярні координати деякої точки?
4. Як встановити курсор у точку із заданими координатами?
5. Як можна знайти полярні координати точки, знаючи її декартові координати? Як можна знайти декартові координати точки, знаючи її полярні координати?
6. Чи може полярний кут набувати значень: – 2? 4? 2?
7. Як можна визначити координати деякої точки, не звертаючись до послуги «Координати»?

§ 4. Побудова графіків функцій. Обчислення значень виразів

Для побудови графіків функціональних залежностей (різних типів задання) та виконання деяких інших операцій стосовно графічних побудов призначено пункт «Графік».

Тут є 4 підпункти (див. рис. 1.12):

Побудувати	F5
Збільшити	F6
Витерти	F7
Координати	F9.

Підпункт «Побудувати» пункту «Графік» використовується для побудови графіків однієї чи кількох (до 5) введених функцій. Якщо графік деякої введеної функції будувати не потрібно, тоді за допомогою послуги «Вибір» слід встановити вказівник у вікні «Вибір» на

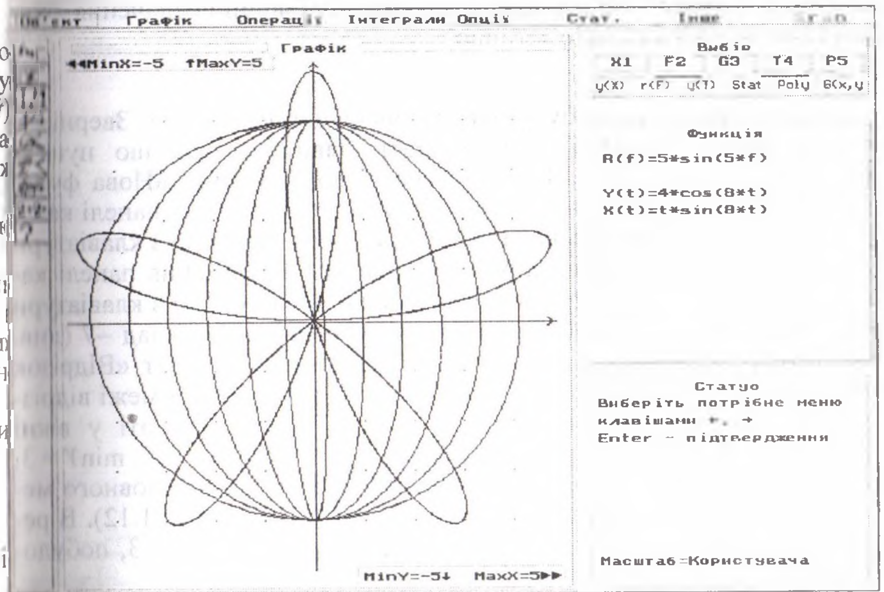


Рис. 1.15

позначення вказаної функції і натиснути клавішу «Пропуск». Після цього під відповідним полем у вікні «Вибір» зникає риска, якою підкреслено це поле (рис. 1.15). Графіки функцій, позначення яких залишаються підкресленими, будуть побудовані при використанні послуги «Побудувати» (див. рис. 1.15).

Вирази функціональних залежностей подаються у вікні «Функція» тим самим кольором, що й відповідні їм графіки, які подаються у вікні «Графік».

Якщо позначення функції не підкреслено, а є потреба його підкреслити, слід за допомогою послуги «Вибір» встановити вказівник на позначення функції і натиснути клавішу «Пропуск». Операцію підкреслювання позначення функції або скасовування підкреслювання можна здійснити також одночасним натискуванням клавіші *Alt* та однієї з клавіш F1, F2, F3, F4, F5 відповідно до номера поля у вікні «Вибір», в якому записано позначення функції, а також за допомогою маніпулятора «мишка», для чого досить встановити курсор «мишки» на місце підкреслювання і натиснути ліву клавішу «мишки».

Якщо жодне позначення функції не підкреслене, але на деякому з них встановлено вказівник (біла рамка) у вікні «Вибір», графік такої функції також будується, якщо відповідний вираз було введено. Якщо ж позначення деяких функцій підкреслено, то будуються графіки тільки цих функцій. При введенні виразів відповідні позначення функцій підкреслюються автоматично.

Приклади

1. Нехай потрібно побудувати графік функції $y = x^2 - 3$. Звернімося до пункту «Об'єкт», в результаті з'явиться підменю пункту «Об'єкт» (див. рис. 1.4). Звернімося далі до підпункту «Нова функція». В результаті у вікні «Графік» з'явиться зображення панелі калькулятора і запит «Введіть вираз» (див. рис. 1.5). Введемо з клавіатури вираз x^2 – 3, тоді у вікні «Графік» з'явиться зображення панелі калькулятора та запит «Відрізок визначення»: A=. Введемо з клавіатури значення лівої межі відрізка визначення функції, наприклад –7 (див. рис. 1.6). В результаті на екрані дисплея з'явиться запит «Відрізок визначення»: B= (див. рис. 1.7). Введемо значення правої межі відрізка визначення, наприклад 7 (див. рис. 1.7). В результаті у вікні «Функція» отримаємо: $Y(x) = x$^2 – 3, $A = -7$, $B = 7$, $\min Y = -3$, $\max Y = 46$ (див. рис. 1.8). Звернемось тепер до пункту головного меню «Графік» і далі до підпункту «Побудувати» (див. рис. 1.12). В результаті у вікні «Графік» з'явиться графік функції $y = x^2 - 3$, побудований на відрізку [–7, 7] (рис. 1.16).

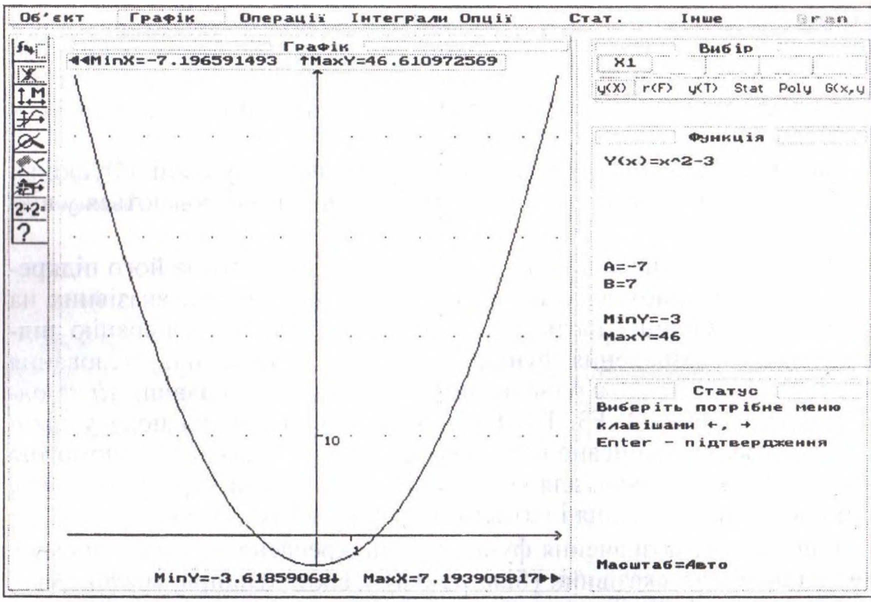


Рис. 1.16

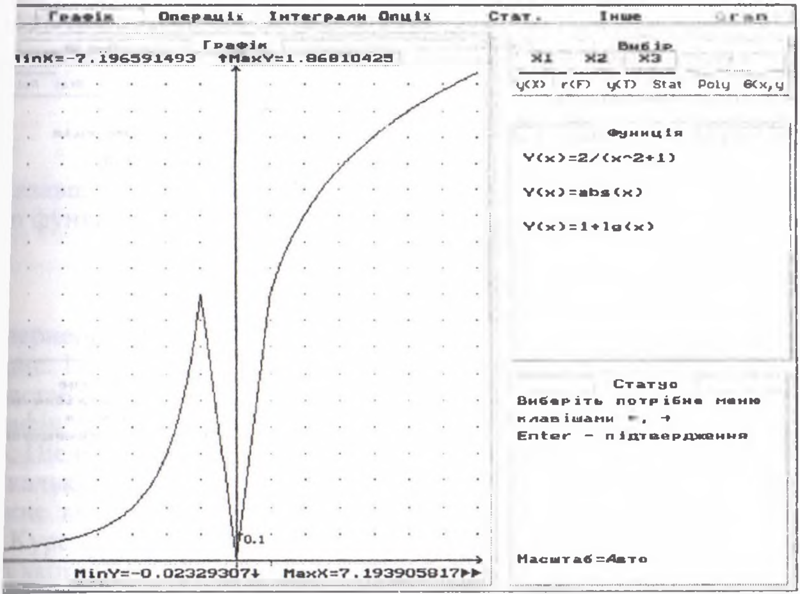


Рис. 1.17

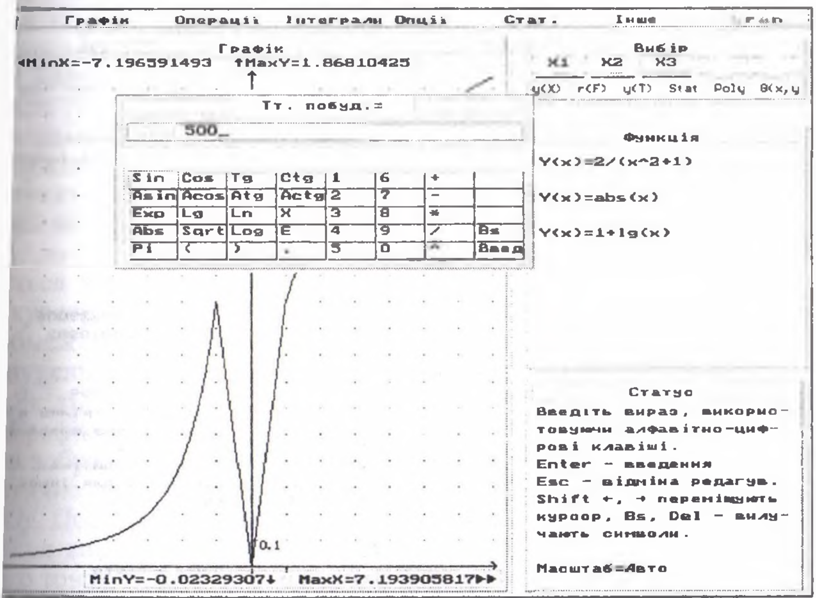


Рис. 1.18

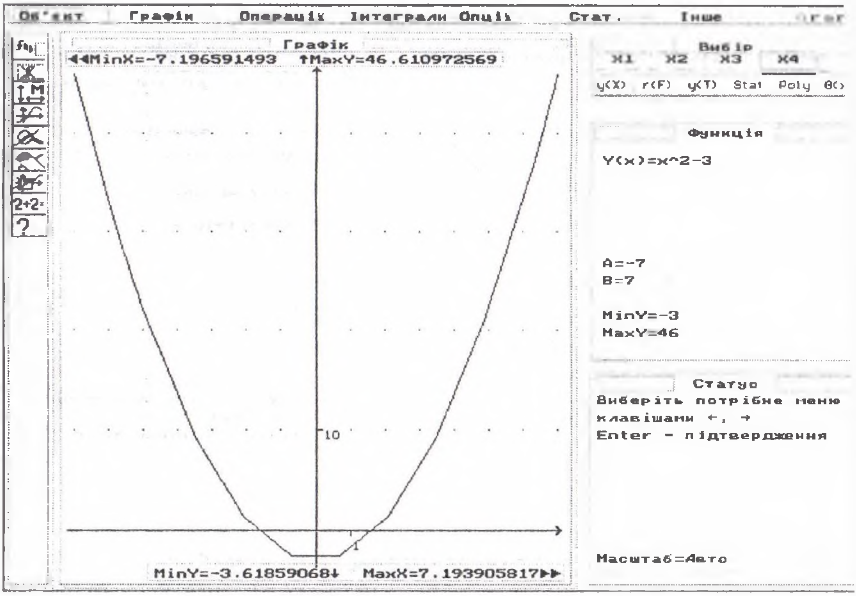


Рис. 1.19

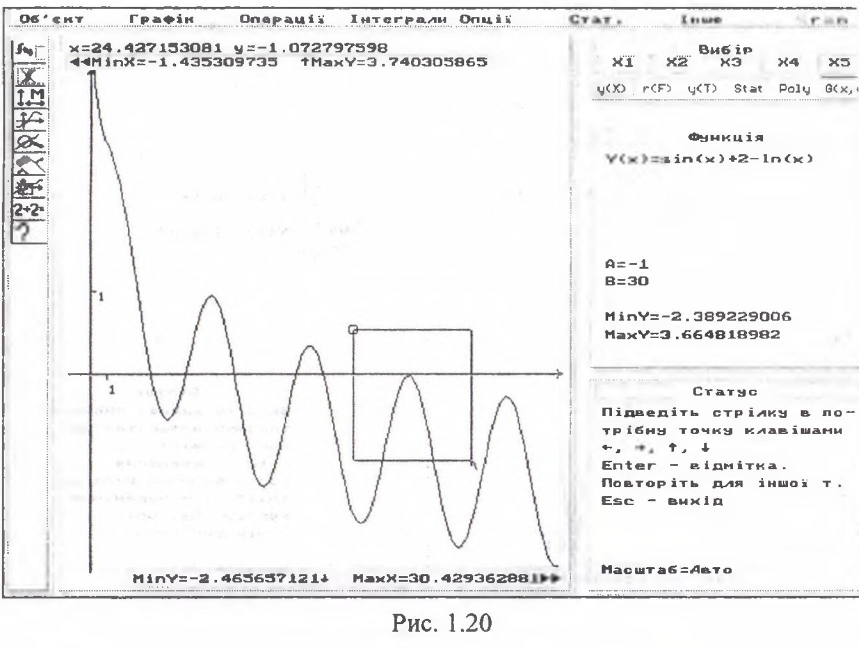


Рис. 1.20

2. Нехай на проміжку [–7, 7] функцію $f(x)$ задано таким чином:

$$f(x) = \begin{cases} 2/(x^2+1), & \text{якщо } x \le -1, \\ \text{abs}(x), & \text{якщо } -1 \le x \le 1, \\ 1+\lg(x), & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

Тоді, вказавши на тип задання функціональної залежності $y(x)$, введемо три функції:

2/(x^2+1) на проміжку [–7, –1],
abs(x) на проміжку [–1, 1],
1+lg(x) на проміжку [1, 7].

Після звернення до послуги «Побудувати» отримається графік, поданий на рис. 1.17.

Для встановлення кількості точок (від 10 до 500), за якими будується графік функції, призначено підпункт «Т.т. побудови» пункту «Опції». Після звернення до цієї послуги у вікні «Графік» з'являється панель калькулятора, над якою розміщено надпис «Т.т. побудови» та допоміжне вікно для введення кількості точок, за якими будується графік. Курсор у цьому допоміжному вікні встановлено на першу позицію, з якої розпочинатиметься введення числа (рис.1.18). Якщо жодного числа не введено, кількість точок побудови покладається рівною 100. Введення числа може бути здійснене з клавіатури або за допомогою вказаної панелі калькулятора (з використанням маніпулятора «мишка» чи клавіатури).

Слід мати на увазі, що із збільшенням кількості точок побудови швидкість обчислень і побудов графіків зменшується. Разом з тим із зменшенням кількості точок побудови втрачається точність графічних побудов (рис. 1.19).

Підпункт «Збільшити» пункту «Графік» призначено для збільшення певної частини вікна «Графік» до розмірів всього вікна. Після звернення до цього підпункту в лівому верхньому куті екрана з'являється курсор (у вигляді невеликої стрілочки). За допомогою цього курсора фіксуються дві протилежні вершини прямокутника, які обмежують збільшувану частину зображення. Щоб зафіксувати вершину, слід підвести курсор в потрібну точку і натиснути клавішу *Enter*. Як тільки буде зафіксовано другу вершину прямокутника, у вікні «Графік» почне будуватися збільшена до розмірів всього вікна частина зображення, яку було обмежено прямокутником. При цьому автоматично зміняться відповідним чином і масштаби вздовж осей *Ox* та *Oy*. Послуга «Збільшити» використовується в разі необхідності уточнення виду графіка в певній його частині, координат характерних його точок тощо.

Використовуючи маніпулятор «мишка» для встановлення вершини прямокутника досить перемістити курсор «мишки» у потрібне місце і натиснути ліву клавішу «мишки». Коли обидві вершини прямокутни ка визначено, слід вивести курсор «мишки» за поле вікна «Графік» натиснути ліву клавішу «мишки», після чого буде виконано операці збільшення.

3. Нехай потрібно з'ясувати, має чи ні графік функці $y(x) = \sin(x) + 2 - \ln(x)$ спільну точку з віссю Ox в області, обмежені прямокутником на рис. 1.20. На перший погляд відповідь стверд (якщо точність обчислень невелика). Однак якщо збільшити графік деякому околі досліджуваної точки, то виявиться, що спільної точк вказані лінії у вказаному околі не мають (рис. 1.21).

Збільшення масштабу, в якому будуються графіки, фактично при водить до збільшення точності обчислень в околі досліджуваної точки.

Щоб після операції «Збільшити» повернутися до попереднього зо браження, слід виконати операцію «Побудувати», якщо попередн було встановлено автоматичний вибір «Масштабу» в пункті «Опція» або ж перейти до автоматичного вибору масштабу чи змінити масш таби вздовж осей Ox та Oy, якщо попередньо було встановлен «Масштаб користувача».

Для виконання однієї з операцій «+» (додати), «–» (відняти), «* (помножити), «/» (поділити) над функціями, заданими у вигляд $y = f(x)$, позначення яких у вікні «Вибір» підкреслені, призначено під пункт «Арифметичні операції». Таких підкреслених позначень по винно бути тільки 2. Результуюча функція ставиться на місце, вказан у вікні «Вибір», причому її позначення автоматично підкреслюється.

Якщо перед виконанням арифметичної операції у вікні «Графік» було побудовано графіки функцій, над якими виконується операція, результуюча функція записується на місце однієї з тих, над яким виконується операція, то після виконання операції автоматично бу дуються графіки отриманих функцій.

При виконанні операції першим операндом є функція з меншим номером (позначення якої у вікні «Вибір» розташоване лівіше).

Нехай, наприклад, введено деякі функції X1, X2, X3 типу $y(X)$ причому X2 – функція виду $f(x) = 1$, X3 – функція виду $f(x) = 2 - \mathrm{abs}(x)$. Встановивши вказівник у вікні «Вибір» на вільне (четверте місце, звернемось до підпункту «Арифметичні операції» пункт «Операції» і виберемо в цьому підпункті операцію «/» (ділити) (рис 1.22). У результаті на вказане у вікні «Вибір» місце буде поміщен позначення виразу $1/(2 - \mathrm{abs}(x))$. Підкресливши позначення X2, X3 X4 (якщо вони не підкреслені) і знявши підкреслення з інших позна чень функцій, побудуємо графіки вказаних функцій (скориставшис послугою «Побудувати» пункту «Графік»). У результаті отримаєм зображення, подане на рис. 1.23.

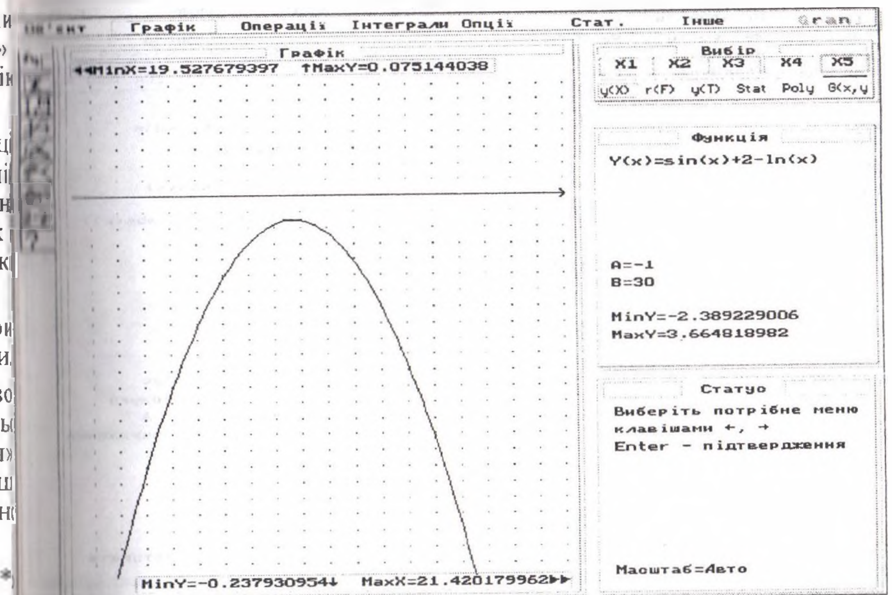


Рис. 1.21

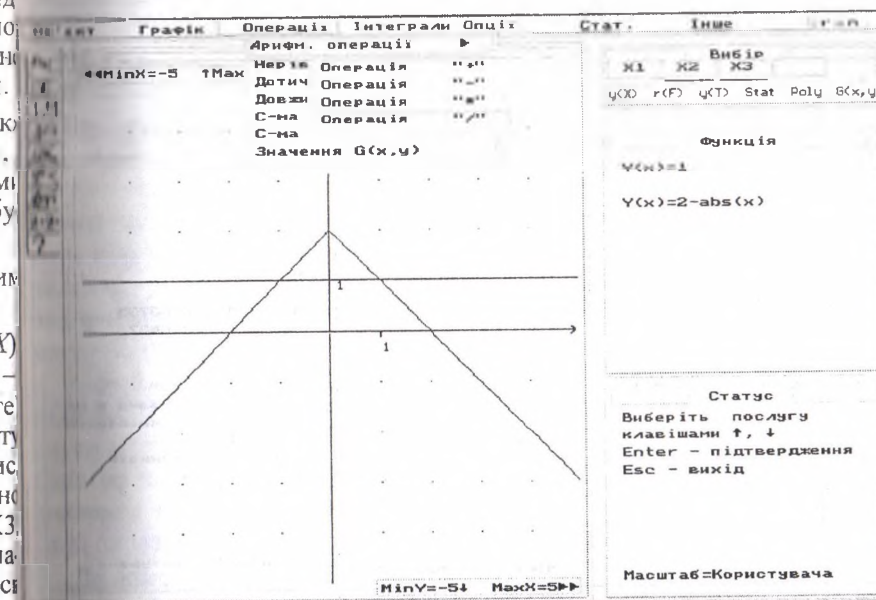


Рис. 1.22

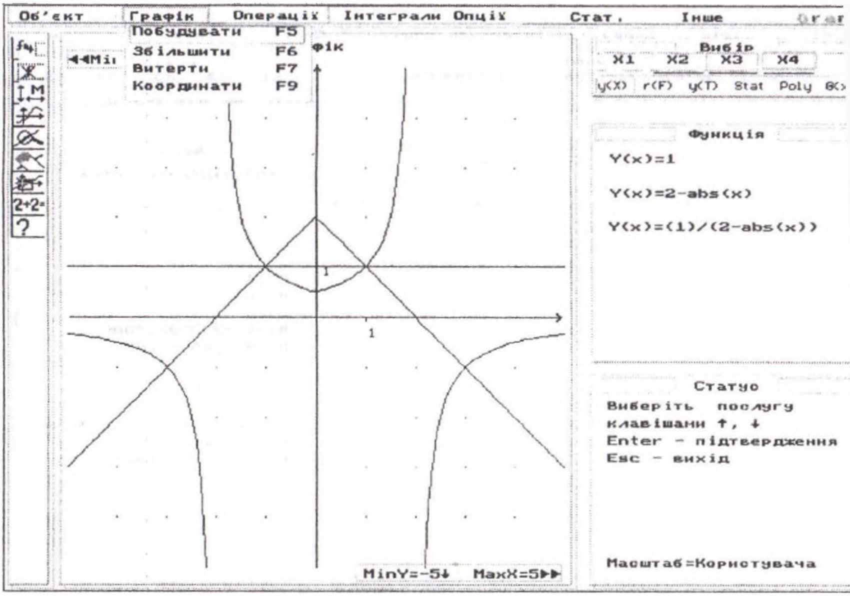


Рис. 1.23

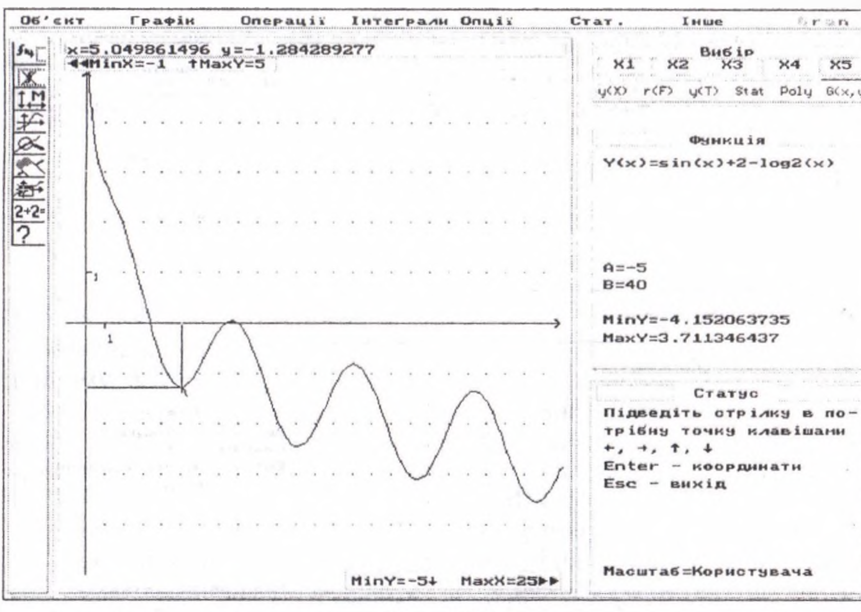


Рис. 1.24

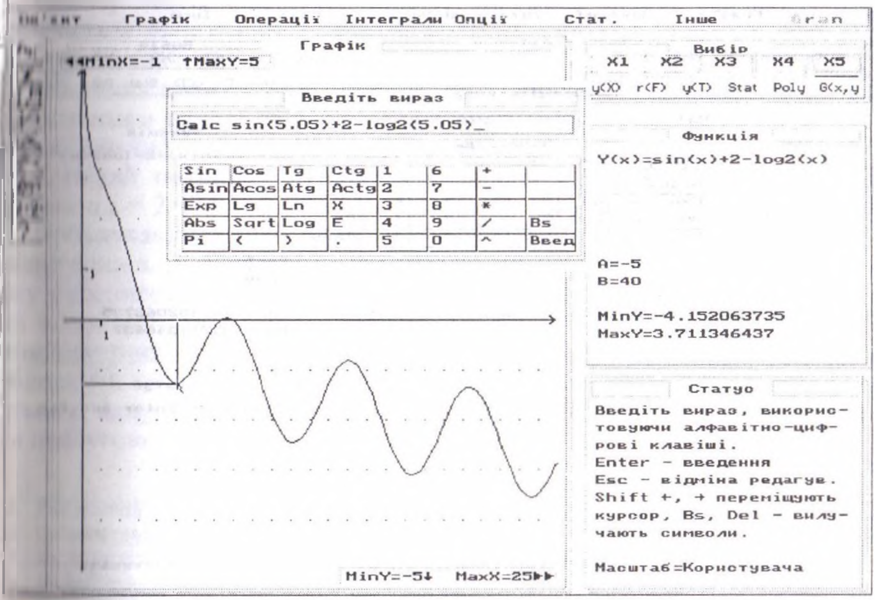


Рис. 1.25

При необхідності вилучити із вікна «Графік» побудовані там зображення використовується підпункт «Витерти» пункту «Графік».

При необхідності обчислити значення *y* деякого виразу виду *f*(*x*) для заданого значення *x* можна скористатися графіком функції *y* = *f*(*x*). Для цього слід, звернувшись до послуги «Координати», встановити курсор у довільній точці з заданою абсцисою *x* і далі перемістити курсор у вертикальному напрямку (вгору чи вниз) в точку, що належить графікові функції. Відповідні координати *x* , *y* буде подано над вікном «Графік» (зліва вгорі) (рис. 1.24). При цьому чим більший масштаб побудови, тим точніші результати.

Інший спосіб обчислення значення того ж виразу – звернення до підпункту «Калькулятор» пункту «Інше». Після звернення до цієї послуги у вікні «Графік» з'являється панель калькулятора з надписом *Calc* на початку рядка введення (рис. 1.25). Щоб одержати шукане значення виразу, слід ввести його до рядка введення (як і будь-які інші вирази).

До виразу, що вводиться і відображається у вікні *Calc*, можуть входити будь-які функції, позначення яких є на панелі калькулятора, однак до виразу не можуть входити змінні, тобто на місці аргументів повинні бути вказані їхні конкретні значення.

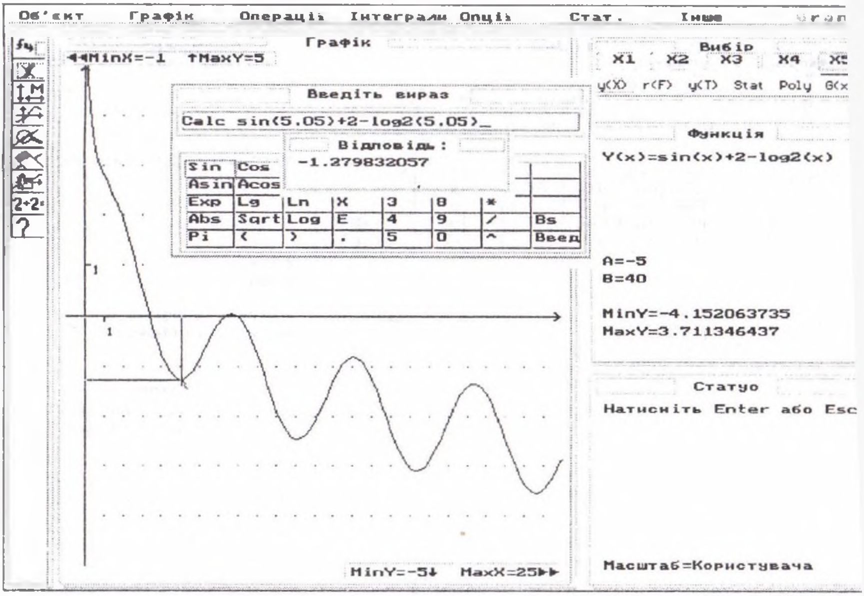


Рис. 1.26

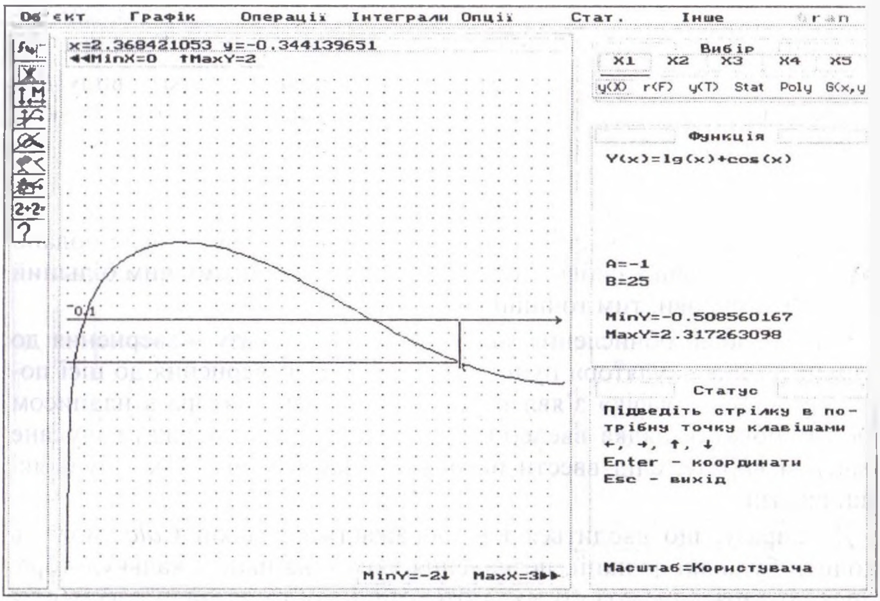


Рис. 1.27

…виразу після введення виразу на полі панелі калькулятора з'являється допоміжне вікно з написом «Відповідь», в якому подається шукане значення виразу (рис. 1.26).

Введення виразів здійснюється, як і раніше, з клавіатури чи з використанням панелі калькулятора та відповідних органів управління введенням інформації клавіатури чи «мишки».

4. Нехай потрібно обчислити значення виразу $\lg(x) + \cos(x)$ при значенні $x = 2.37$.

Побудувавши графік функції $y = \lg(x) + \cos(x)$ на проміжку [0, 3] і звернувшись до послуги «Координати», слід встановити курсор в точку з абсцисою $x = 2.37$, після чого перемістити курсор вгору чи вниз до точки на побудованому графіку. Ордината цієї точки і буде шуканим значенням виразу $\lg(2.37) + \cos(2.37)$ (рис. 1.27). Якщо необхідно збільшити точність обчислень, слід змінити відрізок, на якому змінюється x, наприклад, покласти $A = 2.3$, $B = 2.5$ тощо, або ж скористатися послугою «Збільшити».

Запитання для самоконтролю

1. Яку послугу програми *GRAN1* призначено для побудови графіків функцій?
2. Скільки графіків можна побудувати одночасно?
3. Як дізнатися, який графік відповідає тому чи іншому виразові?
4. Як побудувати графіки лише двох залежностей, якщо введено більше, ніж два вирази?
5. Чи обов'язково всі залежності, графіки яких будуються, повинні мати однакові типи задання?
6. Як можна збільшити частину графіка?
7. Як можна побудувати графік однієї з функцій: $f_1(x) + f_2(x)$, $f_1(x) - f_2(x)$, $f_1(x) * f_2(x)$, $f_1(x) / f_2(x)$, якщо вирази для $f_1(x)$ і $f_2(x)$ вже введено і їх графіки побудовано?
8. Чи всі арифметичні операції над графіками функцій $f_1(x)$ і $f_2(x)$ можна виконати, якщо вирази $f_1(x)$ і $f_2(x)$ вже введено?
9. Як можна визначити значення виразу $f(x)$ при заданому значенні змінної x, користуючись послугами програми *GRAN1*?
10. Як відновити графік, якщо частину графіка збільшували?
11. Як побудувати графік функції, визначеної різними аналітичними виразами на кількох суміжних проміжках?
12. Як можна збільшити точність побудови графіка заданої функції на заданому проміжку?
13. Як збільшити точність визначення координат точок, що лежать на графіку в околі деякої точки?
14. Як вилучити всі побудови у вікні «Графік»?
15. Як вилучити частину побудов у вікні «Графік» і залишити лише окремі з них?

Вправи для самостійного виконання

Побудувати графіки поданих нижче функцій. Для вказаних значень x визначити відповідні значення $y = f(x)$.

1. $y = 2\sin x$; $x = 0; 1; 1.57; 2; 3; 3.14$.
2. $y = \cos 2x$; $x=0; 1; 1.57; 2; 3; 3.14$.
3. $y = 2^x$; $x=0; 1; 2; 3$.
4. $y = \log_2 x$; $x=1; 2; 4; 8$.
5. $y = ||x-1| - |x-2||$; $x = -2; -1; 0; 1; 2$.
6. $y = \dfrac{x-1}{x+2}$; $x = -3; -1; 0; 1; 2; 3$.
7. $y = (x-1)^2 (x-2)^3$; $x = -3; -1; 0; 1; 2; 3; 4$.
8. $y = \sqrt[3]{x}$; $x = -8; -4; -2; 0; 1; 2; 4; 8$.

9. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$; $x = -4; -2; -1; 0; 1; 2; 4$ (гіперболічний косинус).

$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$; $x = -4; -2; -1; 0; 1; 2; 4$ (гіперболічний синус).

10. $y = \frac{\sin x}{x}$; $x = -4; -2; -1; 0; 1; 2; 4$.
11. $y = (1+x)^x$; $x = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$.
12. Подати на екрані одночасно графіки двох функцій
$y_1 = c(a^2 - x^2)(5a^2 - x^2)$, $(c<0)$;
$y_2 = c(a^2 - x^2)^2$ для значень x, що змінюються в межах від $-a$ до $+a$.
Розглянути кілька значень a: 2, 4, 6 та при кожному a кілька значень c: -0.1, -0.5, -1, -2.
13. Подати на екрані одночасно графіки функцій: $y = \sin x$, $y = 2\sin x$, $y = \sin 2x$, $y = \sin(x+2)$.
14. Подати на екрані одночасно графіки функцій: $y = (1.1)^x$, $y=(1.2)^x$, $y=2^x$, $y=3^x$, $y=4^x$.
15. Подати на екрані одночасно графіки функцій:
$y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$, $y = \log_4 x$, $y = \lg x$, $y = \log_{1/2}(x)$, $y = \log_{1/4}(x)$.
16. Подати на екрані одночасно графіки функцій:

$y = x^2 - 3$, $y = \frac{1}{x^2 - 3}$

17. Побудувати графік функції $f(x) = x/\ln(x)$. Куди прямує значення функції $f(x)$, якщо значення аргументу x прямує до $+\infty$?
18. Яка функція зростає швидше: x^n чи n^x? (покласти n=2, 3, 4).

§ 5. Неявно задані функції

Якщо залежність між змінними x і y задано у вигляді $G(x, y) = 0$, де $G(x, y)$ – деяка функція двох змінних x і y, визначена в деякій області зміни значень x і y, тоді говорять, що залежність змінної y від змінної x (або, навпаки, змінної x від змінної y) задана неявно. Якщо для кожного значення x із деякого проміжку існує значення y, яке разом з x задовольняє рівняння $G(x, y) = 0$, то тим самим визначається функція $y = f(x)$, для якої рівність $G(x, f(x)) = 0$ задовольняється при всіх значеннях x із вказаного проміжку (стає тотожною відносно x).

Перш ніж вводити вираз $G(x, y) = 0$, слід встановити тип заданн функціональної залежності «тип $G(x, y)$» (див. рис. 1.3). Далі в пункт «Об'єкт» слід обрати підпункт «Нова функція» і ввести потрібний вираз як звичайно. Введений вираз відображається у вікні «Функція». Для побудови графіка залежності $G(x, y) = 0$ слід скористатися послугою «Побудувати» пункту «Графік» як і раніше. Всі правила стосовно графічних побудов залишаються такими ж, як і в §4.

Приклади

Рівняння виду $ax + by + c = 0$ описує пряму лінію. На рис. 1.28 подано графік прямої $0 = x + y - 1$. Рівняння виду $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$ описує коло радіуса r з центром у точці з координатами $x = a$, $y = b$. На рис. 1.29 подане зображення кола $0 = x^2 + y^2 - 16$ радіуса 4 з центром в початку координат.

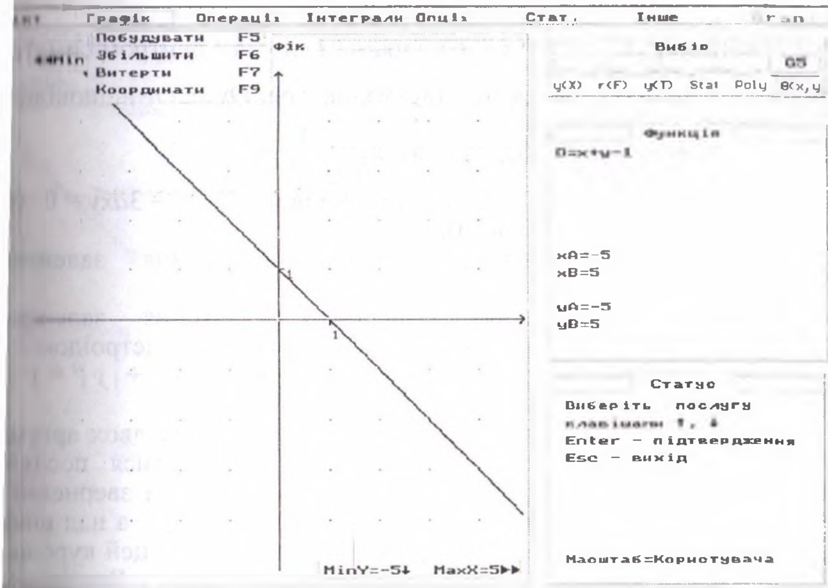


Рис. 1.28

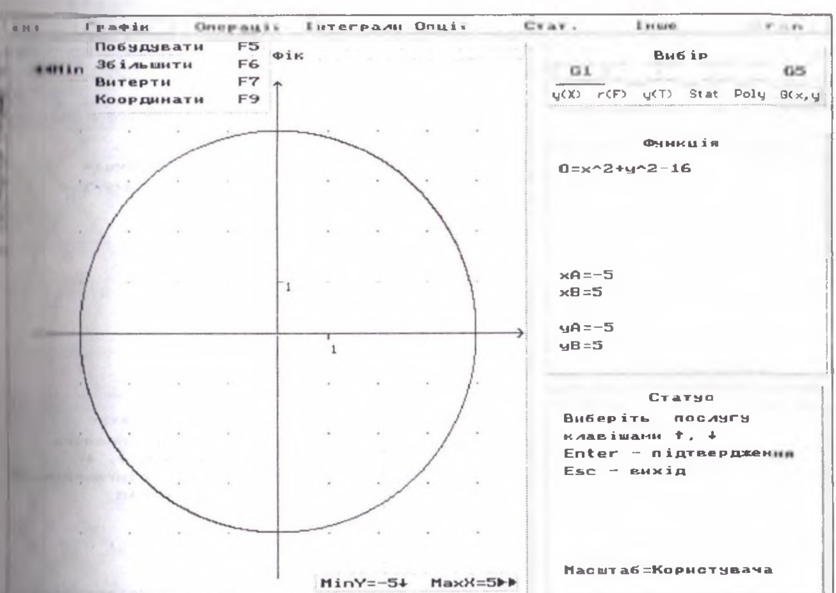


Рис. 1.29

Рівняння виду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ є рівнянням еліпса з центром симетрії і початку координат і півосями a та b вздовж осі Ox та Oy відповідно.

На рис. 1.30 подане зображення еліпса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

На рис. 1.31 подане зображення кривої $x^3+y^3-3axy=0$ (пр $a=1$) (так званий лист Декарта).

На рис. 1.32 подане графічне зображення залежност $0=\sin(\sin(x^2)+\cos(y^2))$.

На рис. 1.33 подане графічне зображення залежност $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, $(a>0)$ при $a=4$. Таку криву називають астроїдою.

На рис. 1.34 подане зображення залежностей $|x|^q+|y|^q=1$ дл значень $q=1/2$, 1, 2, 15.

При необхідності обчислити значення функції (від двох аргуменів) $G(x, y)$ у деякій точці (x, y) можна скористатися послугою «Значення G(x,y)» пункту «Операції» (рис. 1.35). При зверненні д цієї послуги на полі вікна «Графік» з'являється курсор, а над вікном «Графік» – координати x і y точки, в якій встановлено цей курсор, т значення функції $z=G(x, y)$, позначення якої відмічено «Вказівником функцій» (взято в білу рамочку) (рис. 1.36). При переміщуванні кур сора по площині xOy змінюються координати точ

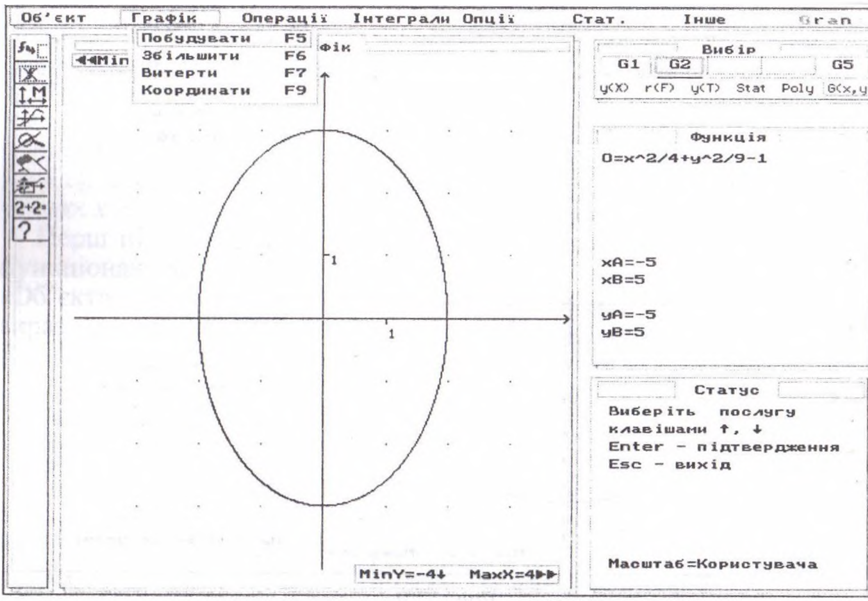


Рис. 1.30

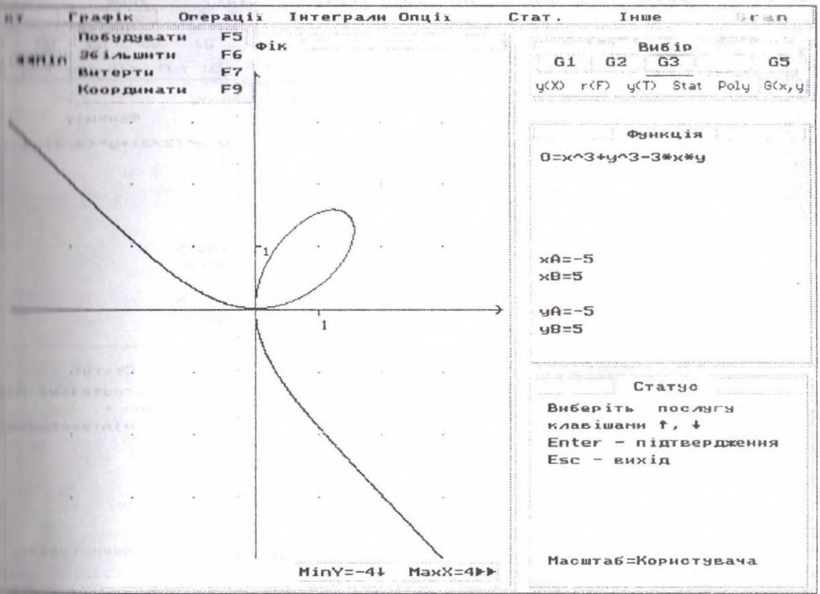


Рис. 1.31

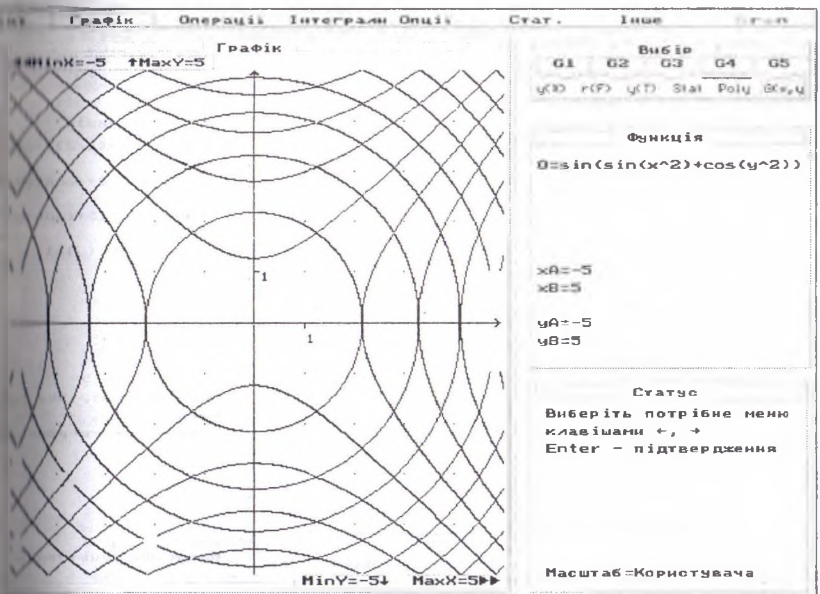


Рис. 1.32

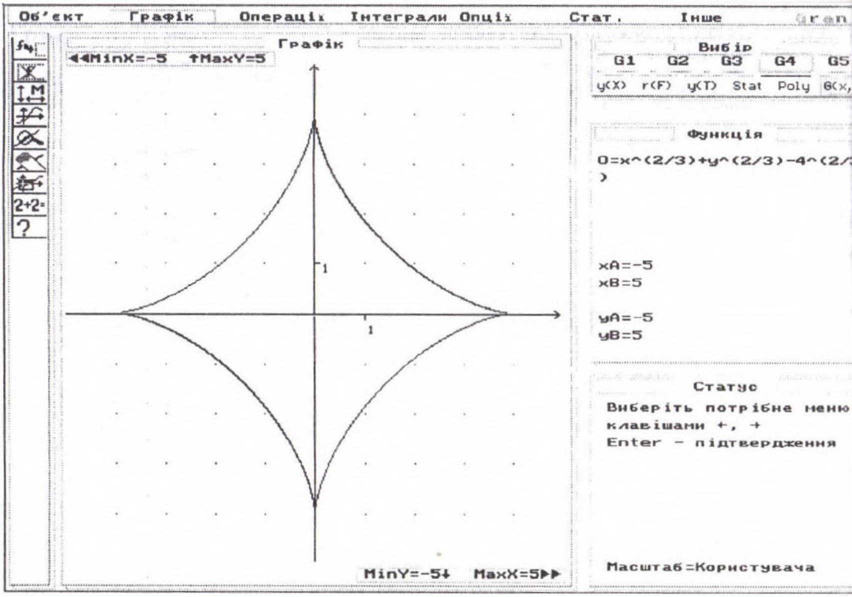


Рис. 1.33

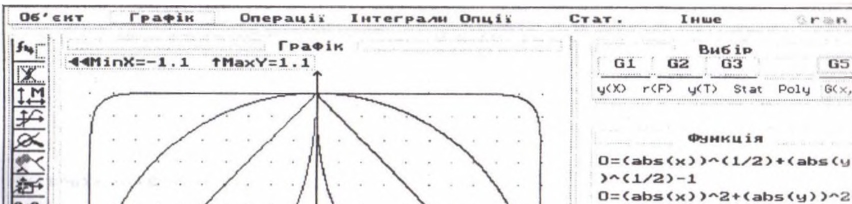


Рис. 1.34

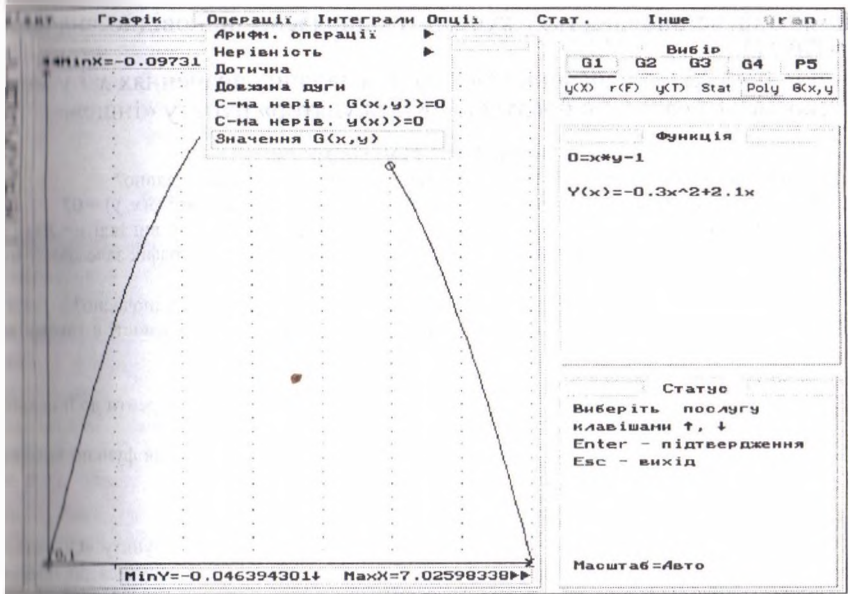


Рис. 1.35

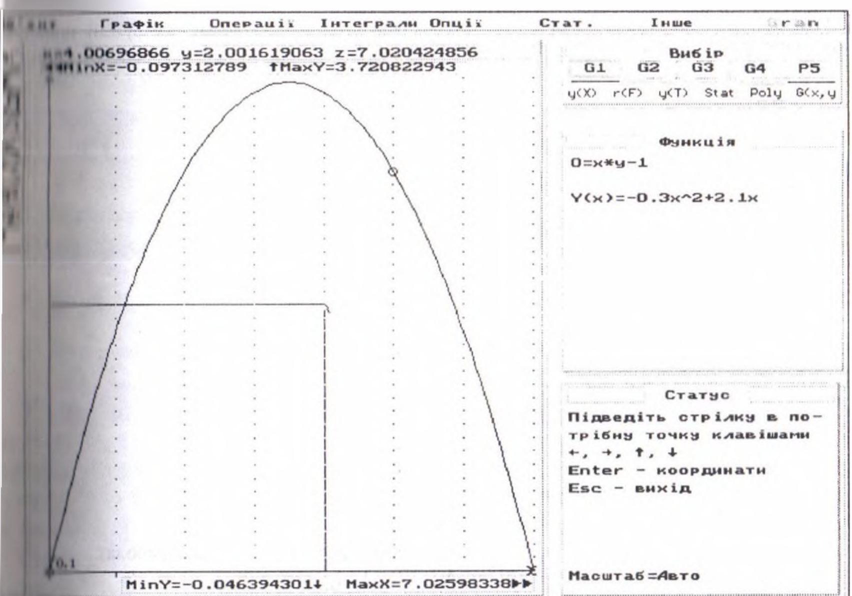


Рис. 1.36

ки, в якій встановлюється курсор, і одночасно відповідне значенн $z = G(x, y)$.

Для обчислення значення $G(x, y)$ при заданих значеннях x і y мож на скористатися також послугою «Калькулятор» пункту «Інше».

Запитання для самоконтролю

1. В якому випадку говорять, що залежність між змінними x та y задано неявно?
2. Як побудувати графік залежності між змінними x та y, заданої у вигляді $G(x, y) = 0$?
3. Чи потрібно відшукувати явне визначення змінної y через змінну x у вигляді $y = f(x)$ (чи навпаки змінної x через змінну y у вигляді $x = g(y)$), щоб побудувати графік залежності між змінними x та y?
4. Скільки графіків залежностей виду $G(x, y) = 0$ можна подати на екрані одночасно?
5. Чи може вираз $G(x, y)$ бути сталою? Яким буде графічне подання залежності в такому випадку?
6. Чи може у виразі $G(x, y)$ бути відсутньою змінна x чи змінна y?
7. Як від явного задання залежності між змінними x і y у вигляді $y = f(x)$ перейти до її неявного задання у вигляді $G(x, y) = 0$?
8. Як з використанням послуг програми *GRAN1* можна обчислити значення функції від двох аргументів?

Вправи для самостійного виконання

1. Встановивши тип $G(x, y)$ і звернувшись до послуги «Нова функція» пункту «Об`єкт», у відповідь на запит «Введіть вираз» ввести сталу 0 (нуль) і далі звернутися до послуги «Побудувати». Пояснити отриманий результат.
2. За тих самих умов, що і у вправі 1, ввести довільну сталу, відмінну від нуля і звернутися до послуги «Побудувати». Пояснити отриманий результат.
3. Використовуючи неявне задання залежності між змінними x і y (тип $G(x, y) = 0$), побудувати графіки функцій: $y = \frac{1}{x}$; $y = \sin x$; $y = x^2$; $y = \sqrt[3]{x}$; $y = \frac{\sin x}{x}$; $y = (1 + x)^x$; $y = x\ln x$; $y^2 =$ … $y = \sqrt{x}$; $y = \log_2(1 - x)$; $y = \frac{1}{\log_2(1-x)}$; пояснити отримані результати.
4. Побудувати графіки функціональних залежностей:
   1) $0 = xy - a$, поклавши $a = -2, -1, 0, 1, 2$ (гіпербола);
   2) $0 = 1 - \log_2(xy)$;
   3) $\sin(2(\text{abs}(x) + \text{abs}(y))) = 0$;
   4) $\sin(\sin(xy) + \cos(xy)) = 0$;
   5) $\sin(2(x^2 + y^2)) = 0$;
   6) $\sin(2\text{sqrt}(x^2 + y^2)) = 0$;
   7) $0 = \sin(32\,|xy|)/2 + x^{20} + y^{20} - 1$;
   8) $0 = \sin(32\,|xy|)/2 + x^2 + y^2 - 1$;
   9) $0 = x^{20} + y^{20} - 1 + \sin(8(x + y))$;
   10) $0 = x^2 + y^2 - 1 + \sin(32xy)$;
   11) $\sin((x^2 + y^2)^k)$ для значень $k = 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8, 16$;
   12) $\cos((\text{abs}(x)+\text{abs}(y))^k)$ для значень $k = 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8, 16, 20, 25, 32$.
5. Побудувати графіки функціональних залежностей:
   а) $y^2 - ax^3 = 0$, поклавши $a = 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ (так звана напівкубічна парабола);
   б) $(y - x^2)^2 - x^5 = 0$;
   в) $y^2 - x^4 + x^6 = 0$;
   г) $y^2 - y^4 - x^4 + x^6 = 0$;
   д) $y^2 - x^2(x - 1) = 0$.
6. Побудувати графіки залежностей $G(x, y) = 0$, якщо:
   а) $G(x, y) = x^2 - 3$;
   б) $G(x, y) = \sin x$;
   в) $G(x, y) = \text{abs}(y)$;
   г) $G(x, y) = \text{tg}\, x$.

   Пояснити отримані результати.
7. Обчислити значення функції $G(x, y) = x/y$ в точках перетину ліній $xy - 1 = 0$, $x(y^2 + 1) - 0.1 = 0$.

§ 6. Обернені функції та їхні графіки

Нехай функцію $y = f(x)$ визначено на деякій множині X (область визначення функції $f(x)$), і нехай Y – множина тих значень x, яких набуває функція $f(x)$, коли змінна x набуває всеможливих значень із множини X. Якщо вибрати певне значення y_0 із множини Y, то в множині X знайдеться таке значення x_0, при якому функція $f(x)$ набуває значення y_0, тобто $f(x_0) = y_0$. Таким чином, кожному значенню $y \in Y$ відповідає певне значення $x \in X$. Цим визначається на множині Y функція $x = g(y)$, яка називається функцією, оберненою до функції $y = f(x)$. При цьому якщо відповідність $y = f(x)$, за якою множина X відображається у множину Y (пишуть $f: X \to Y$), взаємно однозначна, тобто кожному $x \in X$ за правилом $f(x)$ відповідає єдине значення $y \in Y$ і різним значенням $x \in X$ відповідають різні значення $y \in Y$, то обернена функція визначається однозначно. Якщо ж відповідність $f: X \to Y$ не є взаємно однозначною, тоді і обернена функція визначається неоднозначно.

Прикладами, коли обернена функція визначається однозначно, можуть бути такі:

1) лінійна функція $f(x) = ax + b$, $(a \neq 0)$;
2) степенева функція x^n при непарних n $(n \neq 0,\ n = 2k + 1,\ k = 0, 1, 2, \ldots)$;
3) показникова функція $f(x) = a^x$, $(a > 0,\ a \neq 1)$;
4) логарифмічна функція $f(x) = \log_a x$, $(a > 0,\ a \neq 1)$;
5) функція $y = \frac{a}{x}$, $(a \neq 0)$;
6) будь яка неперервна монотонно зростаюча або монотонно спадаюча функція.

У наведених прикладах кожному допустимому значенню x (із області визначення функції $f(x)$) відповідає єдине значення y із області значень функції $f(x)$, і навпаки, кожне значення y із області значень функції $f(x)$ відповідає тільки одному значенню x із області визначення функції $f(x)$.

Отже, в такий спосіб встановлюється взаємно однозначна відповідність $f: X \to Y$ між елементами (точками) множини X (області визначення функції $f(x)$) і елементами (точками) множини Y (області значень функції $f(x)$). При взаємно однозначній відповідності $f: X \to Y$

завжди існує єдина обернена до $f(x)$ функція $g(y)$, $(g: Y \to X)$, така, що для будь якого $x \in X$ $g(f(x)) = x$, $(x \in X, f(x) \in Y, g(f(x)) \in X)$, і для будь якого $y \in Y$ $f(g(y)) = y$, $(y \in Y, g(y) \in X, f(g(y)) \in Y)$.

Таким чином, у розглядуваному випадку функції $f: X \to Y$ і $g: Y \to X$ є взаємно оберненими одна до одної.

Прикладами, коли обернена функція визначається неоднозначно, можуть бути такі:

1) $f(x) = a$, (a – const); оскільки одне і те ж значення $y = a$ ставиться у відповідність нескінченній множині значень x із області визначення функції $f(x)$, то неможливо однозначно визначити значення x, якому відповідає значення $y = a$. В цьому разі оберненої функції не існує.

2) будь-яка функція, яка набуває одного і того ж значення на деякому інтервалі (чи на кількох інтервалах). Зокрема так звані кусково-сталі функції (рис. 1.37);

3) функція $f(x) = x^2$.

Якщо $x \in [0, \infty[$, тоді ця функція встановлює взаємно однозначну відповідність $f: [0, \infty[\to [0, \infty[$, причому кожному значенню $x \in [0, \infty[$ відповідає єдине значення $y \in [0, \infty[$ і різним x із $[0, \infty[$ відповідають різні y із $[0, \infty[$. Таким чином, в даному випадку обернена до $f(x)$ функція визначається однозначно: $x = \sqrt{y}$.

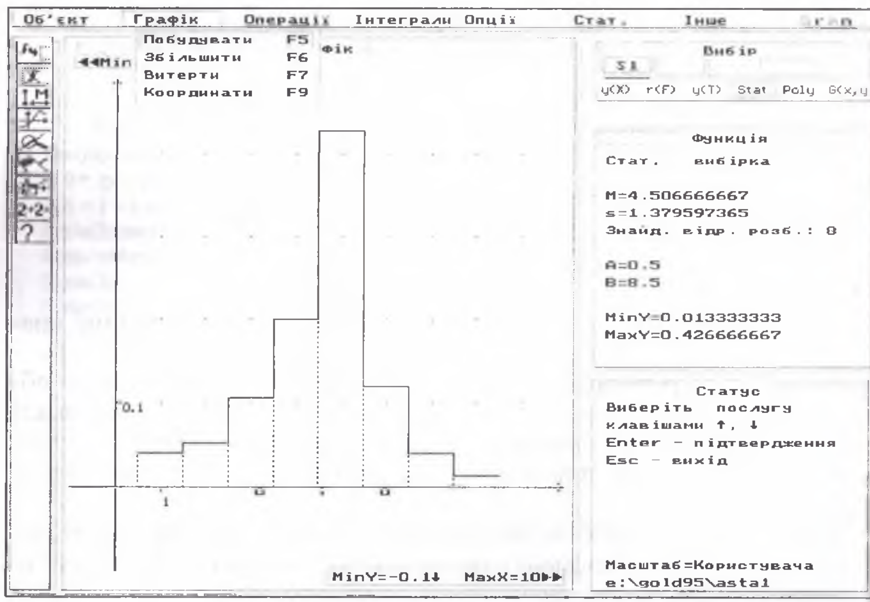


Рис. 1.37

Якщо $x \in]-\infty, 0]$ і $f:]-\infty, 0] \to [0, \infty[$, то, міркуючи аналогічно, можна зробити висновок, що і в цьому випадку обернена до $f(x)$ функція визначається однозначно: $x = -\sqrt{y}$.

Якщо ж за область визначення функції $f(x)$ взяти множину $]-\infty, \infty[$, тоді однозначно визначити функцію $g(y)$, обернену до $f(x)$, неможливо, оскільки $g_1(y) = +\sqrt{y}$ відображає множину значень $[0, \infty[$ функції $f(x)$ на множину $[0, +\infty[$, а $g_2(y) = -\sqrt{y}$ відображає ту ж множину значень $[0, \infty[$ на $]-\infty, 0]$, причому

$g_1(f(x)) = x$ для $x \in [0, \infty[$, $g_2(f(x)) = x$ для $x \in]-\infty, 0]$,

$f(g_1(y)) = y$, $y \in [0, \infty[$, $g_1(y) \in [0, \infty[$,

$f(g_2(y)) = y$, $y \in [0, \infty[$, $g_2(y) \in]-\infty, 0]$;

4) $y = \sin x$. Міркуючи аналогічно до попереднього, можна зробити висновки: якщо область визначення функції $f(x) = \sin(x)$ задано так, що двом різним значенням x не ставиться у відповідність одне і те ж значення y, тоді обернена функція $g(y)$ визначається однозначно. Як правило, за таку область визначення обирають проміжок $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Якщо ж область визначення така, що двом різним значенням x за правилом $f(x)$ може бути поставлене у відповідність одне і те ж значення y, тоді цю область слід поділити на частини так, щоб у кожній з цих функція $f(x)$ монотонно зростала або монотонно спадала. У різних частинах області визначення функція $f(x)$ може мати різні обернені функції.

Нехай задано деяку функцію $y = f(x)$, визначену в деякій області. Якщо побудувати графік цієї функції, то за графіком можна визначити значення оберненої функції $g(y)$ таким чином: на осі Oy вибрати значення y (аргумент функції $g(y)$) із області значень функції $f(x)$ і від вибраної точки на осі Oy провести паралельно осі Ox пряму до перетину з графіком залежності $y = f(x)$. У такий спосіб буде отримано значення $x = g(y)$ таке, що $f(x) = f(g(y)) = y$. Отже, якщо аргумент функції g вибирати на осі Oy (в області значень функції $f(x)$), то графік функції $y = f(x)$ є водночас і графіком оберненої функції $x = g(y)$.

Якщо ж аргумент функції g відкладати на осі Ox, то тоді доведеться поміняти ролями змінні x і y і спочатку побудувати графік функції $x = f(y)$, після чого на осі Ox вибирати аргумент для функції g (із області значень функції $f(y)$), від вибраної точки на осі Ox провести паралельно осі Oy пряму до перетину з графіком функції $x = f(y)$, і таким чином буде отримано значення оберненої функції $g(x)$. Отже, графік функції $x = f(y)$ є в той же час і графіком функції $y = g(x)$, оберненої до функції $x = f(y)$. За заданим x значення $g(x)$ за графіком за-

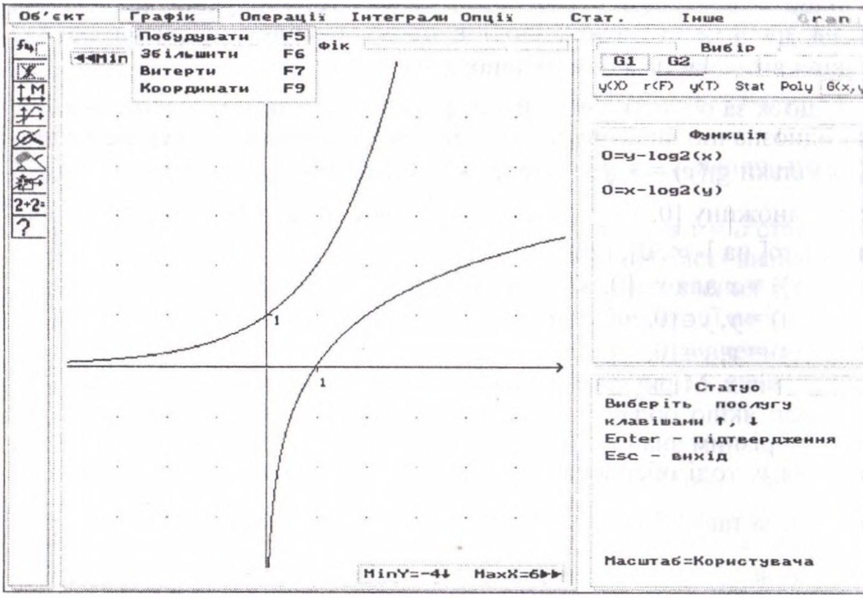


Рис. 1.38

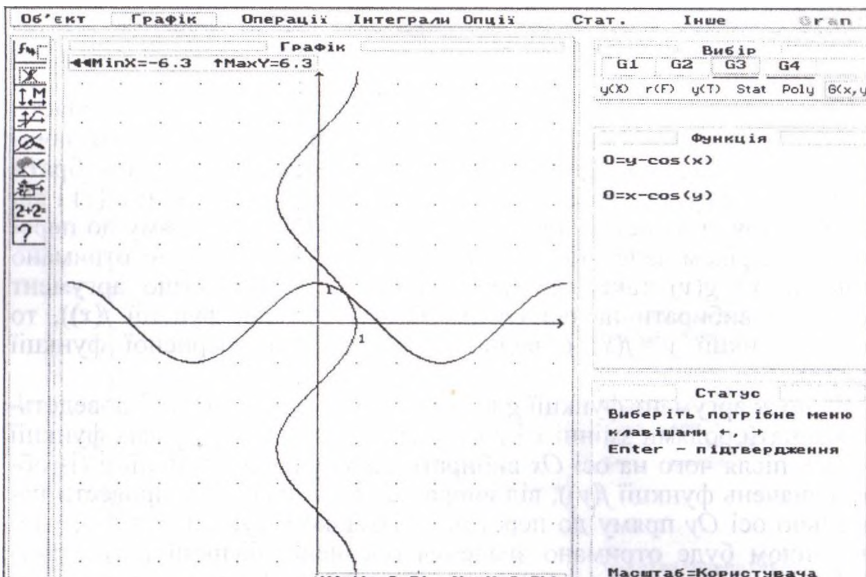


Рис. 1.39

...ності $x = f(y)$ визначається так само, як і за заданим y значення ... визначається за графіком залежності $y = f(x)$.

Таким чином, графік функції $y = g(x)$ отримується як дзеркальне зображення графіка $y = f(x)$ відносно прямої $y = x$ (бісектриси першого координатного кута).

Щоб побудувати графіки функції $y = f(x)$ і оберненої до $f(x)$ функції $y = g(x)$ з використанням послуг програми *GRAN1*, зручно подати залежності між змінними x і y у вигляді $0 = y - f(x) = G_1(x, y)$ та $x - f(y) = G_2(x, y)$, після чого побудувати графіки залежностей $G_1(x, y) = 0$ та $G_2(x, y) = 0$.

Приклади

1. Побудуємо графіки залежностей:

$$0 = y - \log_2(x), \quad 0 = x - \log_2(y).$$

Легко помітити (рис. 1.38), що графік залежності $x - \log_2(y) = 0$ є в той же час графіком функції $y = 2^x$, оберненою до якої є функція $y = \log_2(x)$. При цьому $g(f(x)) = 2^{\log_2 x} = x$, $f(g(x)) = \log_2(2^x) = x$.

2. Побудувавши графіки залежностей $0 = y - \cos(x)$ та $0 = x - \cos(y)$, легко переконатися (рис. 1.39), що графік залежності $0 = x - \cos(y)$ є в той же час графіком функції $y = \arccos(x)$ (визначеної на проміжку $[-1, 1]$), якщо областю визначення функції $y = \cos(x)$ є проміжок $[0, \pi]$. У такому разі між множинами $[0, \pi]$ (на осі Ox) і $[-1, 1]$ (на осі Oy) встановлюється взаємно однозначна відповідність: функція $y = \cos(x)$ відображає проміжок $[0, \pi]$ в проміжок $[-1, 1]$, функція $y = \arccos(x)$ відображає проміжок $[-1, 1]$ в проміжок $[0, \pi]$. При цьому $\cos(\arccos(x)) = x$, $\arccos(\cos(x)) = x$.

Запитання для самоконтролю

1. Коли функція $g(x)$ буде обернена до функції $f(x)$?
2. Чи може бути функція обернена сама до себе? Навести приклади.
3. Коли обернена до $f(x)$ функція визначається однозначно?
4. Чи залежить існування оберненої функції від того, в якій області визначено функцію $f(x)$?
5. Чи можна отримувати значення функції $g(x)$, оберненої до $f(x)$, якщо побудовано лише графік функції $y = f(x)$?
6. Чи можна графік функції $y = f(x)$ вважати в той же час і графіком оберненої функції $x = g(y)$?
7. Як побудувати графік функції $y = g(x)$, оберненої до функції $y = f(x)$?
8. Як розташовуються на площині xOy графіки функції $y = f(x)$ та оберненої до неї $y = g(x)$?
9. Як зміниться графік функціональної залежності $G(x,y) = 0$, якщо поміняти місцями змінні x і y?

Вправи для самостійного виконання

1. Побудувати графіки заданих і обернених до заданих функцій: $y = x$; $y = 1/x$; $y = \sin x$; $y = \dfrac{1}{x^2+1}$; $y = 2^x$; $y = \mathrm{tg}(x)$.
2. Побудувати графіки функціональних залежностей:

1. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1=0$ і $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}-1=0$.

2. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}-1=0$ і $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}-1=0$.

3. $|x|^q+|y|^q=1$ для значень $q=-3, -2, -1, 1/2, 1/4$.

§ 7. Параметричне задання функціональної залежності

Часто буває зручно не задавати залежність між змінними x і y безпосередньо у вигляді рівності деяких виразів, до яких входять змінні x і y, а виразити ці змінні через деяку третю допоміжну t, подавши відповідно у вигляді:

$$x=\varphi(t),\ y=\phi(t).$$

Якщо при цьому функція $\varphi(t)$ має обернену $t=\omega(x)$, таку, що $\varphi(\omega(x))=x$, $\omega(\varphi(t))=t$, то можна встановити безпосередній зв'язок між змінними x і y у вигляді $y=\phi(\omega(x))$.

Задання функціональної залежності між змінними x і y у вигляді $x=\varphi(t)$, $y=\phi(t)$ називають параметричним, а змінну t – параметром. Виключаючи тим чи іншим чином параметр t із рівностей $x=\varphi(t)$, $y=\phi(t)$, можна отримати вираз, що описує безпосередньо функціональну залежність між змінними x і y. Параметричне задання функціональних залежностей буває особливо зручним при дослідженні траекторій рухомих точок, координати яких x і y змінюються залежно від часу t. Функції $x=\varphi(t)$, $y=\phi(t)$ і описують траекторію руху точки (x,y) на площині xOy.

Щоб за допомогою послуг програми *GRAN1* побудувати графік функціональної залежності між змінними x і y, заданої через параметр t у вигляді $x=\varphi(t)$, $y=\phi(t)$, слід вказати на тип «Тип x=$x(t)$, y=$y(t)$», звернувшись до підпункту «Тип x=$x(t)$, y=$y(t)$, Alt-T» пункту «Опції». Далі в пункті «Об'єкт» слід звернутися до підпункту «Нова функція», після чого у вікні «Графік» з'явиться панель калькулятора і напис над рядком введення «Введіть вираз». При цьому на початку рядка введення подається напис виду $x(t)$ = ... (рис. 1.40). Після того, як введено вираз для $x(t)$, з'являється запит «Введіть вираз» і на початку рядка введення напис $y(t)$=..... . Коли введено вирази $x(t)$ і $y(t)$, з'являться також запити про нижню і верхню межі зміни параметра t (рис. 1.41). Після введення відповідей на всі передбачені програмою запити введені вирази з'являються у вікні «Функція». Далі за допомогою послуг, перелічених у пункті «Графік» та інших пунктах, можна виконувати всі передбачені програмою графічні операції стосовно розглядуваної функціональної залежності між змінними x і y.

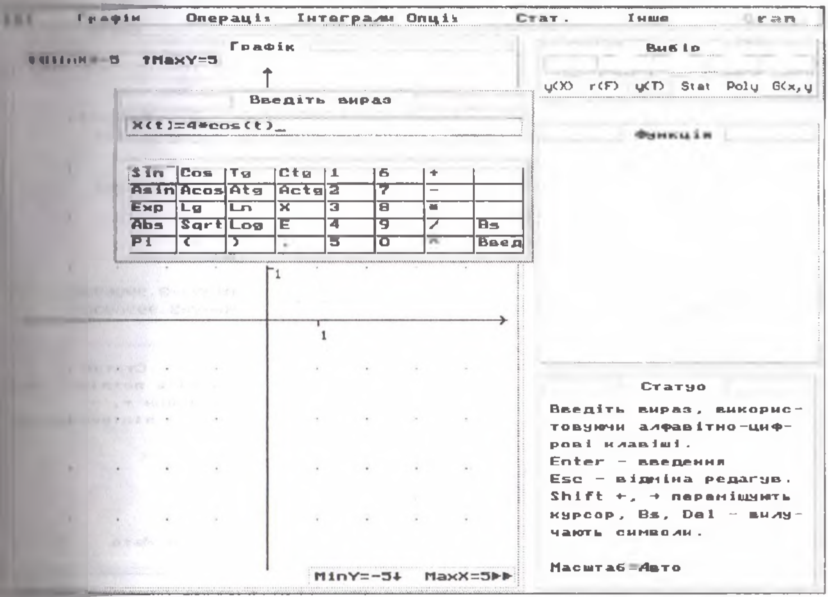


Рис. 1.40

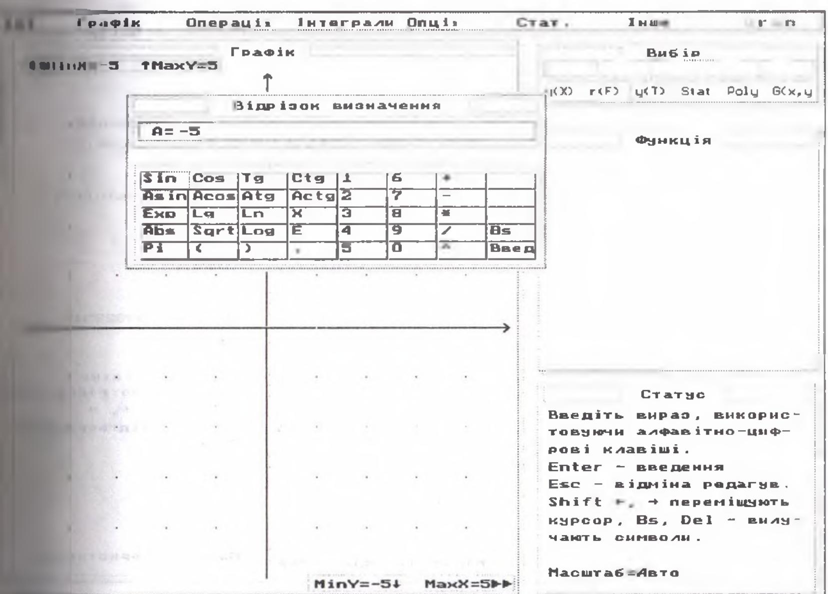


Рис. 1.41

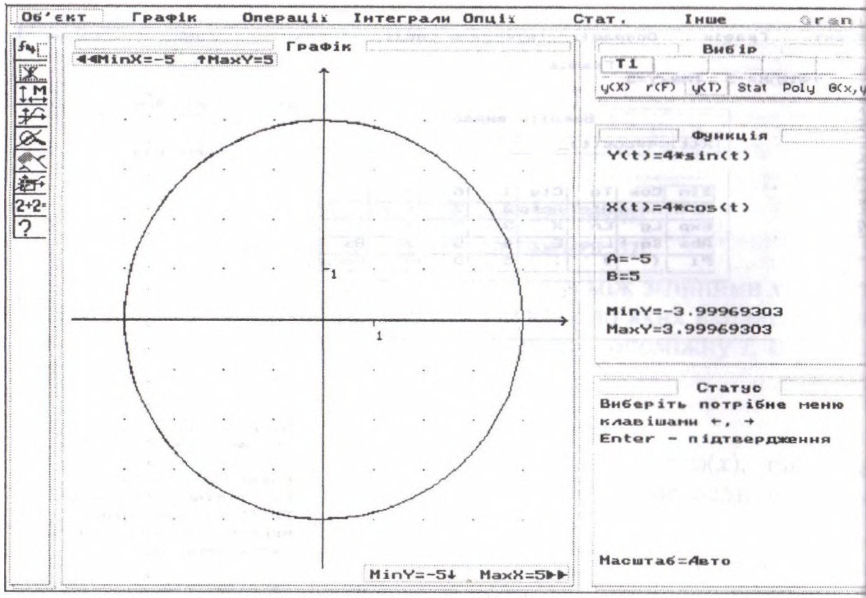


Рис. 1.42

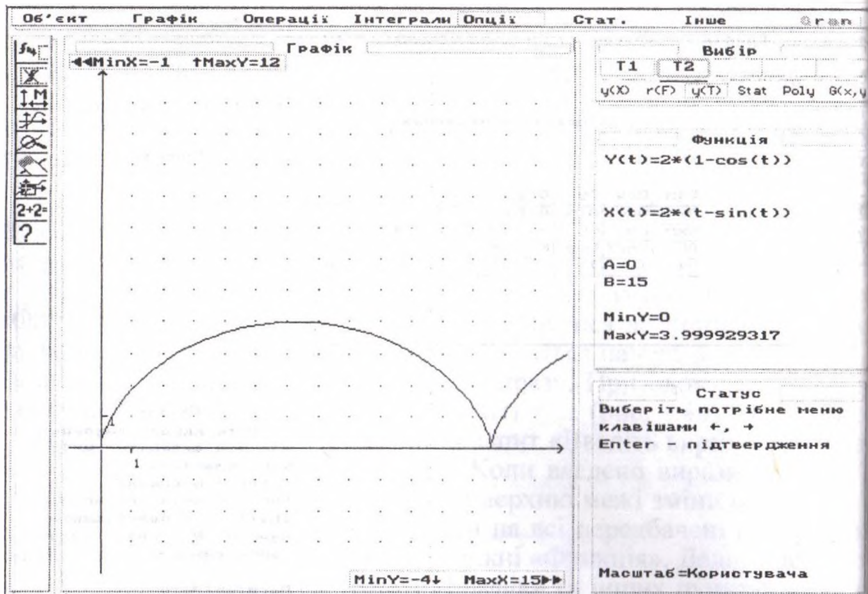


Рис. 1.43

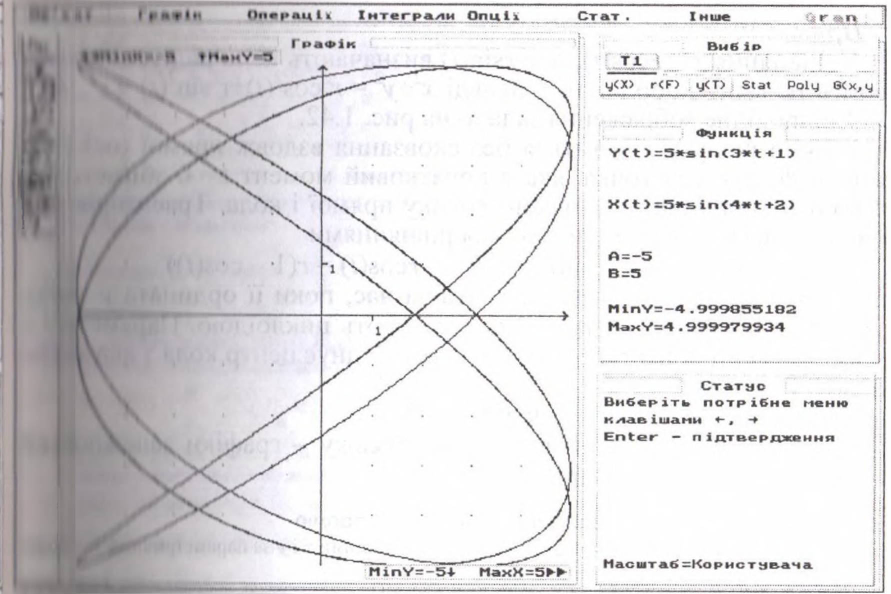


Рис. 1.44

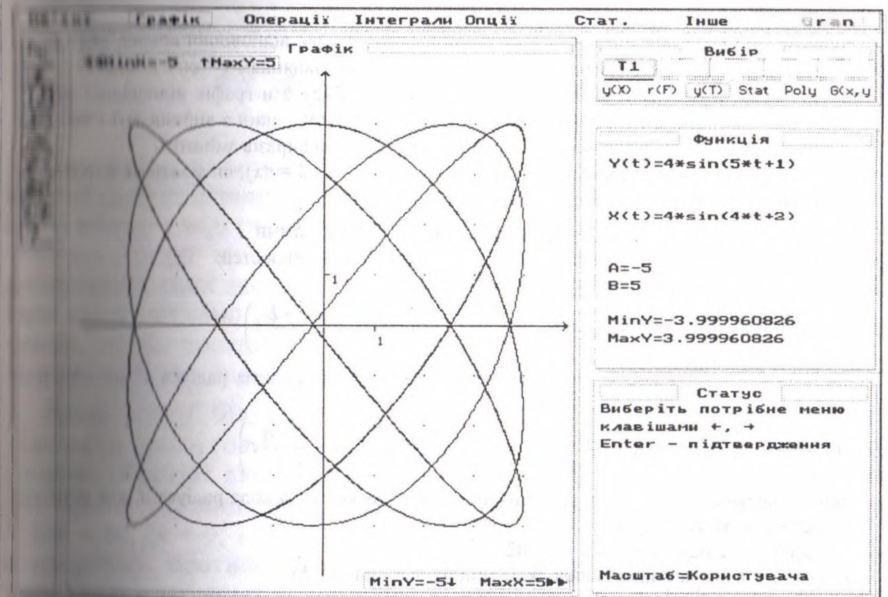


Рис. 1.45

Приклади

1. Рівняння $x = r\cos(t)$, $y = r\sin(t)$ визначають коло радіуса r з центром в початку координат. Справді $x^2+y^2 = r^2\cos^2(t)+r^2\sin^2(t) = r^2$. Для $r = 4$ відповідне зображення задано на рис. 1.42.

2. Коло радіуса r котиться без сковзання вздовж прямої (осі Ox), на колі фіксується точка, яка в початковий момент $t = 0$ збігається з початком координат і є точкою дотику прямої і кола. Траєкторія цієї точки, як легко бачити, описується рівняннями

$$x = rt - r\sin(t) = r(t - \sin(t)),\ \ y = r - r\cos(t) = r(1 - \cos(t)).$$

Криву, яку описує вказана точка за час, поки її ордината y знову стане рівною нулеві (при $t = 2\pi$), називають циклоїдою. Параметр t – це кут, на який повертається радіус, що з'єднує центр кола з вказаною точкою на колі.

Графік циклоїди подано на рис. 1.43.

На рис. 1.44, 1.45 подано фігури Ліссажу – графіки залежностей $x = A_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1)$, $y = A_2\sin(\omega_2 t+\varphi_2)$.

Запитання для самоконтролю

1. Як можна встановити безпосередній зв'язок між змінними x і y за параметричним заданням відповідної функціональної залежності?
2. Як за допомогою програми *GRAN1* можна отримати графік залежності між змінними x і y за її параметричним заданням?
3. Як можна знайти значення змінної y, яке відповідає вказаному значенню змінної x, якщо зв'язок між змінними x і y задано у параметричній формі?
4. Якщо задано рівняння $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$ і побудовано графік відповідної кривої, яким буде по відношенню до нього графік кривої, що визначається рівнянням $x = \phi(t)$, $y=\varphi(t)$?
5. Якщо задано рівняння $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$ і потрібно побудувати графік відповідної залежності між змінними x і y з використанням програми *GRAN1*, який з виразів $\varphi(t)$ і $\phi(t)$ слід вводити першим? Що відбудеться, якщо порядок введення виразів змінити?
6. Якщо залежність між змінними y і x задано явно у вигляді $y = f(x)$, чи можна задати її в параметричній формі?

Вправи для самостійного виконання

Побудувати графіки параметрично заданих функціональних залежностей:

1. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ при конкретних a і b (еліпс);
2. $x = (a+b)\cos(t) - a\cos\left(\dfrac{a+b}{a}t\right)$, $y = (a+b)\sin(t) - a\sin\left(\dfrac{a+b}{a}t\right)$

   при конкретних a і b ($a \le b$) (епіциклоїда, яку описує точка кола радіуса a, яке котиться зовні по колу радіуса b);
3. $x = (b-a)\cos(t) - a\cos\left(\dfrac{b-a}{a}t\right)$, $y = (b-a)\sin(t) - a\sin\left(\dfrac{b-a}{a}t\right)$

   при конкретних a і b, ($a \le b$) (гіпоциклоїда, яку описує точка кола радіуса a, яке котиться всередині по колу радіуса b);
4. $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - a\sin 2t$

   (кардіоїда, яка є частинним випадком епіциклоїди при $a = b$);
5. $x = b\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$ (астроїда, яка є частинним випадком гіпоциклоїди при $a = b/4$);
6. Побудувати фігури Ліссажу для значень:

$A_1 = 4$, $A_2 = 4$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_2 = \pi/4$, $\varphi_2 = \pi/2$, $\varphi_2 = 3\pi/4$, $\varphi_2 = \pi$;
$A_1 = 4$, $A_2 = 4$, $\omega_1 = 1$, $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = 1$, $\omega_2 = 2, 3, 4, \ldots, 15$;
$A_1 = 4$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 7$, $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = 2$, $A_2 = 1$, $A_2 = 2$, $A_2 = 3$, $A_2 = 4$;
$A_1 = 4$, $A_2 = 4$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$;
$A_1 = 4$, $A_2 = 4$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 3$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$;
$A_1 = 4$, $A_2 = 4$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 7$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$;
$A_1 = 4$, $A_2 = 4$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 7$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 1$.

…рдинати тіла, кинутого із початковою швидкістю V_0 під кутом α до горизонту, змінюю… …часом t за законом:

$$x = (V_0\cos\alpha)t, \quad y = (V_0\sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2}, \quad g = 9.8.$$

…и заданих V_0 і α знайти:

…найбільшу висоту, на яку піднімається тіло;

…відстань точки падіння тіла від точки старту, якщо

$V_0 = 6$, $\alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5}{6}\pi$; $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $V_0 = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$;

…яким повинен бути кут α, щоб при заданому V_0 точка падіння тіла була віддалена від точки старту на $D = 4$, якщо $V_0 = 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$?

…якою повинна бути V_0, щоб при заданому α точка падіння була віддалена від точки старту на $D = 5$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5}{6}\pi$?

…ціль знаходиться за укриттям, вершина якого має координати (x_1, y_1). Координати мі…ні (x_2, y_2), $(x_2 > x_1, y_2 < y_1)$. Гармату розташовано в пункті з координатами (x_0, y_0), $(x_0 < x_1, y_0 < y_1)$. Якими повинні бути початкова швидкість снаряда і нахил до горизонту кута ки…дання, щоб снаряд влучив у точку (x_2, y_2), перелетівши вершину укриття на висоті y_1+h.

Для конкретних розрахунків покласти $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $x_1 = 5$, $y_1 = 4$, $x_2 = 6$, $y_2 = 0$, h=0.01.

§ 8. Функціональні залежності в полярних координатах

…значимо полярний радіус деякої точки M на площині через r, а …дний полярний кут – через f. Будь-якій функціональній залеж…ті виду $r = w(f)$ (явній) чи виду $F(r, f) = 0$ (неявній) у полярній сис… координат відповідає певний графік (множина точок, полярні …рдинати яких задовольняють вказану функціональну залежність). …ньому будемо вважати, що якщо кут f набуває від'ємного зна…ня, то від полярної осі за годинниковою стрілкою відкладається …дний кут, рівний заданому за абсолютною величиною.

Якщо кут f більший за 2π, то це означає, що спочатку слід …ласти проти годинникової стрілки ціле число кутів величиною 2π …них обертів), яке вміщується в заданому f, після чого від полярної … проти годинникової стрілки відкласти кут величиною $0 \le f - 2k\pi < 2\pi$, ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Якщо $r < 0$, то такий радіус відкладається …прямку, протилежному до того, що визначається кутом f. Щоб …йти від полярних координат до декартових, потрібно розв'язати …му рівнянь $x = r\cos f$, $y = r\sin f$ відносно змінних r і f і далі у вираз

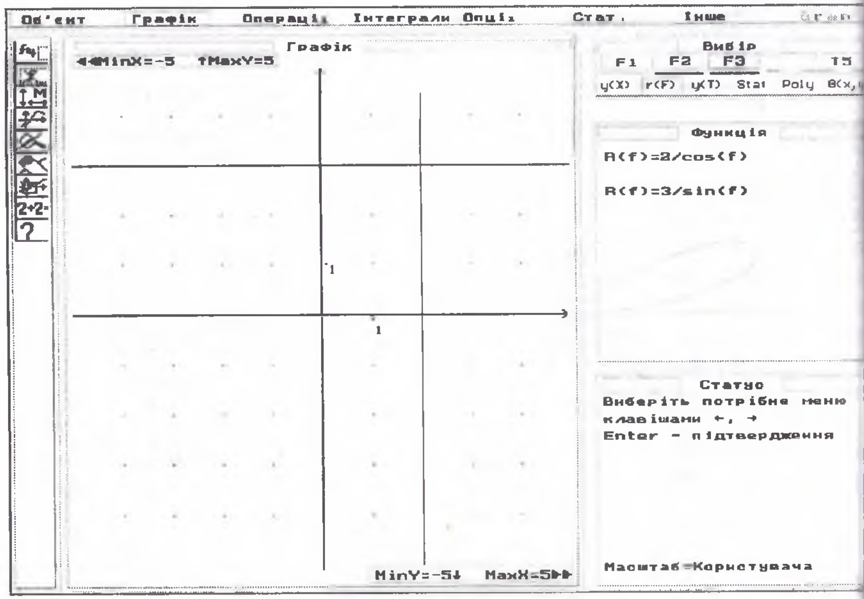


Рис. 1.49

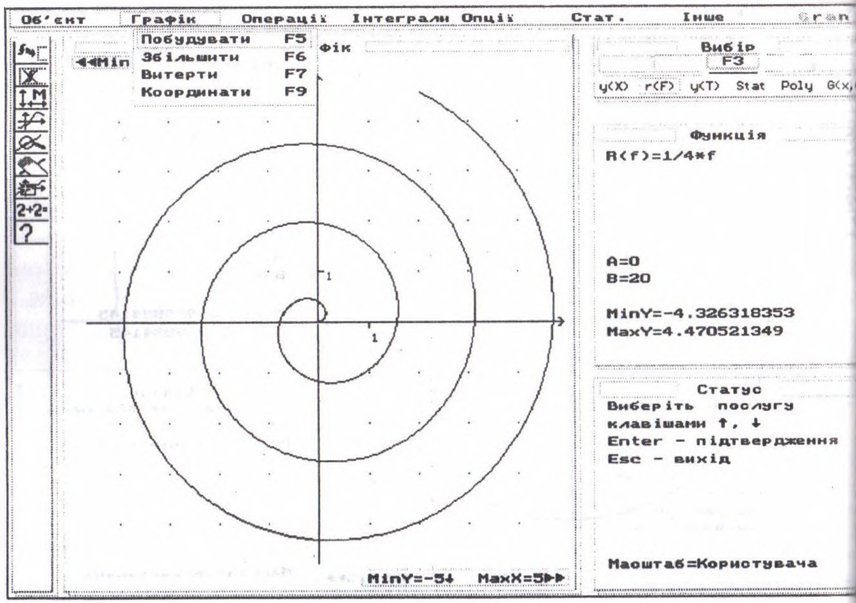


Рис. 1.50

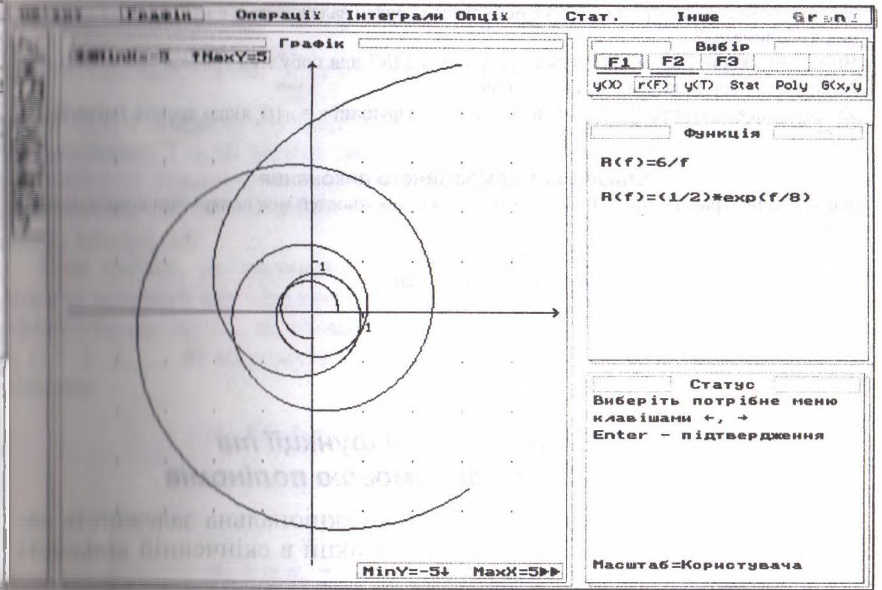


Рис. 1.51

2. Графіком залежності $r = a$ ($a = \text{const}$, $a > 0$) буде коло радіуса a (рис. 1.48).

3. Графіком залежності $\varphi = b$ ($b = \text{const}$) буде промінь, що виходить з полюса і нахилений до полярної осі під кутом b.

4. Графіком залежності $r = \dfrac{a}{\cos(f)}$ ($a = \text{const}$, $a > 0$) буде пряма, перпендикулярна до полярної осі і віддалена від полюса вздовж полярної осі на a; $r = \dfrac{a}{\sin(f)}$ – пряма, паралельна полярній осі (рис. 1.49).

5. Графіком залежності $r = af$ ($a > 0$, $a = \text{const}$, $f \geq 0$) буде спіраль Архімеда (рис. 1.50); залежності $r = \dfrac{a}{f}$ ($a > 0$, $f \geq 0$) – гіперболічна спіраль; залежності $r = be^{af}$, ($a > 0$, $b > 0$, $f \geq 0$) – логарифмічна спіраль (рис. 1.51).

Запитання для самоконтролю

1. Як від виразу, заданого в полярних координатах, перейти до виразу, заданого в декартових координатах?
2. Як на координатній площині подаються точки з від'ємними полярними кутами?
3. Як на координатній площині подаються точки, полярні радіуси яких від'ємні?

4. Як за допомогою програми *GRAN1* побудувати графік залежності $r = w(f)$, заданої в поля[illegible] них координатах?
5. Чи можна скористатися послугами програми *GRAN1* для побудови графіка залежності м[illegible] полярними координатами, заданої неявно?
6. Як зміниться множина $[0, 2\pi]$ значень аргумента функції $r = w(f)$, якщо замість f підстави[illegible] $k*f$?

Вправи для самостійного виконання

За допомогою програми *GRAN1* побудувати графіки залежностей між полярними координата[illegible] r і f (при конкретних a, h):

1. $r = 2a\cos(f) + h$, (a, h – const, $a > 0$, $h > 0$); розглянути випадки: а) $h > 2a$; б) $h < 2a$; в) $h = 2a$.
2. $r = \sqrt{2a^2\cos 2f}$ та $r = -\sqrt{2a^2\cos 2f}$.
3. $r = 5 * \sin(9f)$.
4. $r = \cos(f)$; $r = \cos(2f)$; $r = \cos(3f)$; $r = \cos(5f)$.

§ 9. Таблично задані функції та їх наближення за допомогою поліномів

Часто з тих чи інших причин деяка функціональна залежність з[illegible] дається за допомогою таблиці значень функції в скінченній кількост[illegible] точок у вигляді

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$f(x_i)$	y_1	y_2	…	y_n

.

Іноді аналітичний вираз функції $f(x)$ взагалі невідомий, а відом[illegible] лише її значення в деяких окремих точках, знайдені в результаті сп[illegible] стережень чи вимірювань у деякому експерименті. Якщо [illegible] відповідності до заданої таблиці зобразити точки (x_i, y_i), (i = 1, 2, [illegible] n) на координатній площині, то в такий спосіб можна отримати н[illegible] ближене графічне подання досліджуваної функціональної залежност[illegible] Якщо точок $x_1, x_2, \ldots, x_n$ досить багато, вони розташовані досить густ[illegible] і є впевненість, що досліджувана функція $f(x)$, значення якої подано[illegible] таблиці, на проміжку $[x_1, x_n]$ змінюється досить плавно, то за вказ[illegible] ним наближеним графічним поданням можна досить повно охаракт[illegible] ризувати загальну поведінку функції.

Однак іноді виникає потреба знайти принаймні наближене анал[illegible] тичне подання таблично заданої функціональної залежності. Іно[illegible] вдається підібрати функцію $\varphi(x)$ таку, що значення $\varphi(x_i)$ досить бл[illegible] зькі до поданих в таблиці значень y_i при всіх значеннях x_i (i = 1, 2, [illegible] n). Як правило, без спеціальних досліджень підібрати таку функці[illegible] $\varphi(x)$ нелегко.

Часто функцію, значення якої в точках x_i, поданих у таблиці, як[illegible] мога менше відрізнялися б від значень y_i досліджуваної функції $f(x$[illegible] шукають у вигляді полінома виду $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m$ д[illegible] [illegible] степеня m. При цьому невідомі коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_m$ добирають так, щоб сума $\sum_{i=1}^{n}(P(x_i) - y_i)^2$ квадратів різниць значень полінома $P(x)$ і значень функції $f(x)$ в точках x_i, поданих в таблиці, була [illegible]ю. Такий метод знаходження полінома $P(x)$ степеня не ви[illegible] наперед заданого m, який найменше у вказаному розумінні відхиляється від таблично заданої функції $f(x)$, називають методом найменших квадратів.

При цьому, як правило, задається наперед степінь полінома m, [illegible] менший від кількості n точок в таблиці. Якщо $m \ge n-1$, то коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_m$ полінома $P(x)$ можна дібрати так, що для всіх i (i = 1, 2, …, n) матимуть місце рівності $P(x_i) = y_i$, оскільки система [illegible]

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_{n-1}x_1^{n-1} = y_1,$$
$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_{n-1}x_2^{n-1} = y_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_{n-1}x_n^{n-1} = y_n$$

[illegible] має розв'язок, причому єдиний.

У програмі *GRAN1* передбачено відшукання за методом найменших квадратів полінома $P(x)$ степеня не вище 7, який найкраще на[illegible] таблично задану функцію не більше ніж в 1000 точках.

Перш ніж вводити таблицю, за допомогою якої задається досліджувана функціональна залежність, слід встановити тип *Poly*, для [illegible] необхідно звернутися до підпункту «Поліном Alt-P» пункту [illegible] (рис. 1.52) або встановити курсор «мишки» на тип *Poly* під [illegible] «Вибір» і натиснути ліву клавішу «мишки». Цей же результат [illegible], якщо одночасно натиснути клавіші *Alt-P*.

При табличному заданні функції (тип *Poly*) (та роботі із статистичними вибірками (тип *Stat*)) інформація вводиться у вигляді таблиць з клавіатури або з деякого файла.

При введенні таблично заданої функції (після встановлення типу *Poly* та звернення до підпункту «Нова функція») у вікні «Графік» [illegible] додаткове вікно із підпунктами «Таблиця з клавіатури», «[illegible] з файла» (рис. 1.53).

Після звернення до підпункту «Таблиця з клавіатури» у вікні «Графік» з'являється додаткове вікно (поле введення даних) із написами у верхньому рядку «1:1», «Ред», «Ins» (рис.1.54). Цифри в лівому верхньому куті вказують координати курсора в полі введення (номер рядка і номер позиції в рядку). Максимальна кількість стовпців у полі введення – 26, максимальна кількість рядків – 1000.

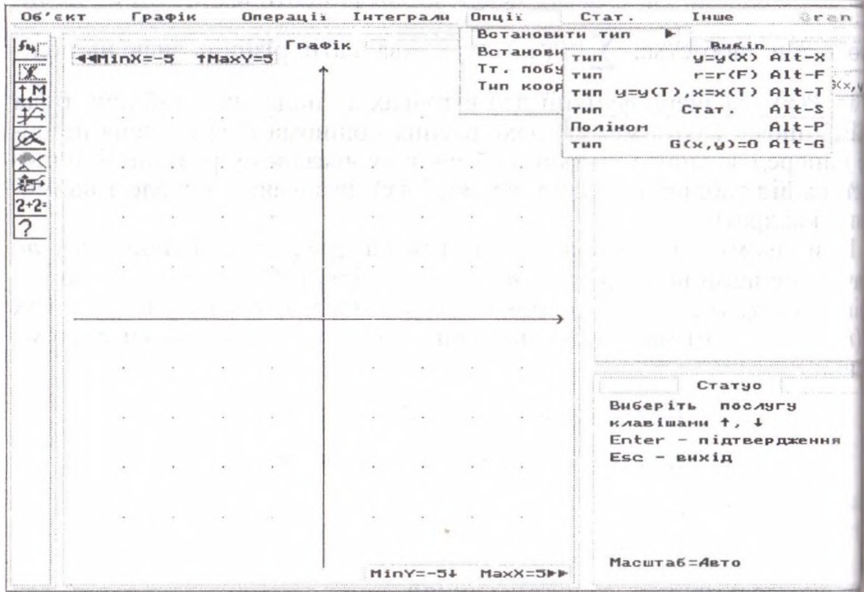


Рис. 1.52

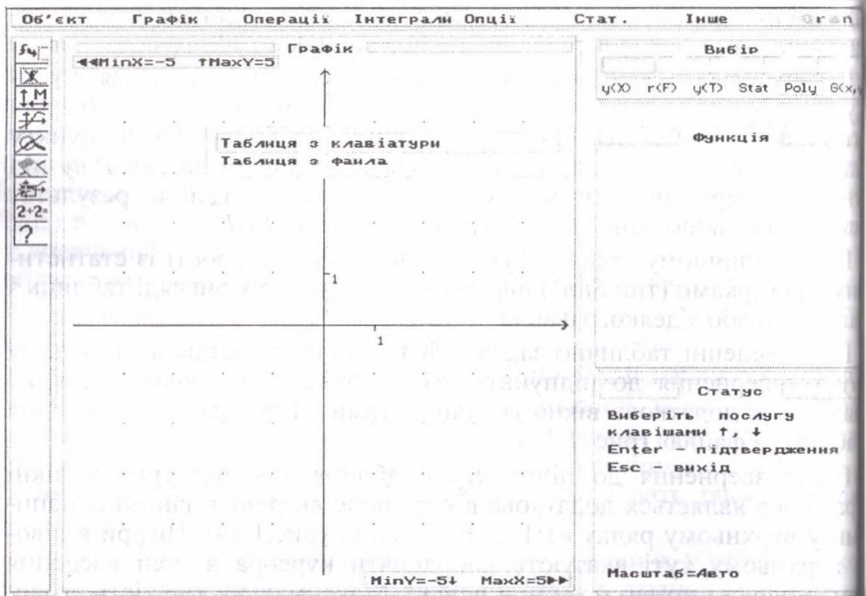


Рис. 1.53

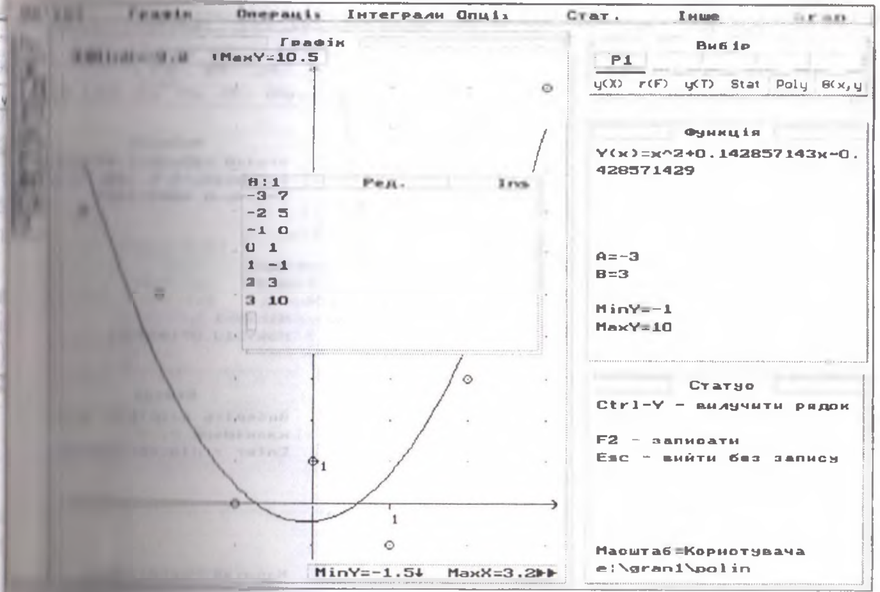


Рис. 1.54

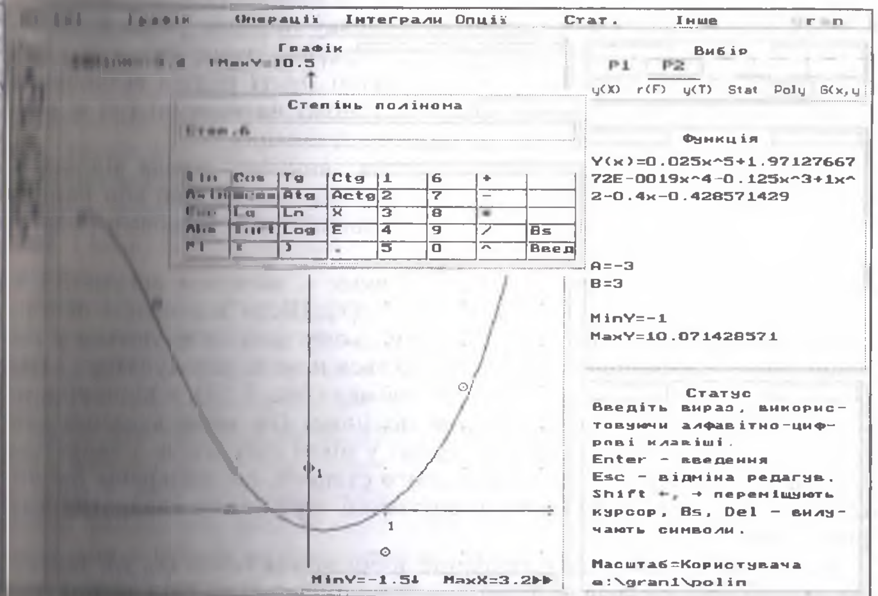


Рис. 1.55

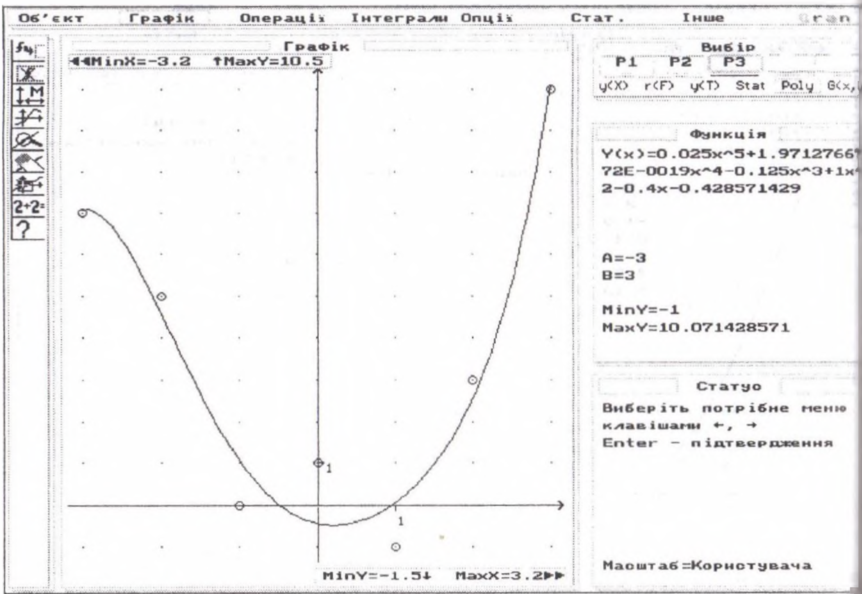


Рис. 1.56

Поле *Ins* вказує на те, що встановлено режим вставляння символі тобто при введенні деякого символу в деяку позицію рядка всі ін символи, починаючи з позиції курсора і правіше, зміщуються на од позицію вправо. Після натиснення клавіші *Insert* режим вставлян змінюється на режим заміни. При повторному натисненні тієї ж кл віші режим заміни змінюється на режим вставляння.

Інформація вводиться з клавіатури як звичайно. Числа відокре люються одне від одного комою або пропуском. Щойно або рані введена інформація може бути змінена звичайними засобами редаг вання.

Числа вводяться парами, перше з яких – значення аргумента друге – відповідне значення функції $y = f(x)$. Після закінчення набо даних слід натиснути клавішу F2. При цьому дані записуються у р бочий файл, а на полі «Графік» з'являється панель калькулятора і н рядком введення запит «Степінь полінома» (рис. 1.55), у відповідь який слід вказати бажаний степінь полінома (не вище вказаного початку рядка введення). В результаті у вікні «Функція» з'являєт аналітичний вираз – поліном вказаного степеня, що найкраще набл жає таблично задану функцію в розумінні середнього квадратичн (рис. 1.56).

Якщо необхідно подати графічне зображення точок (x_i, y_i), зане них до таблиці, та графік отриманого полінома $P(x)$, слід звернут до послуги «Побудувати» пункту «Графік» (див. рис. 1.56).

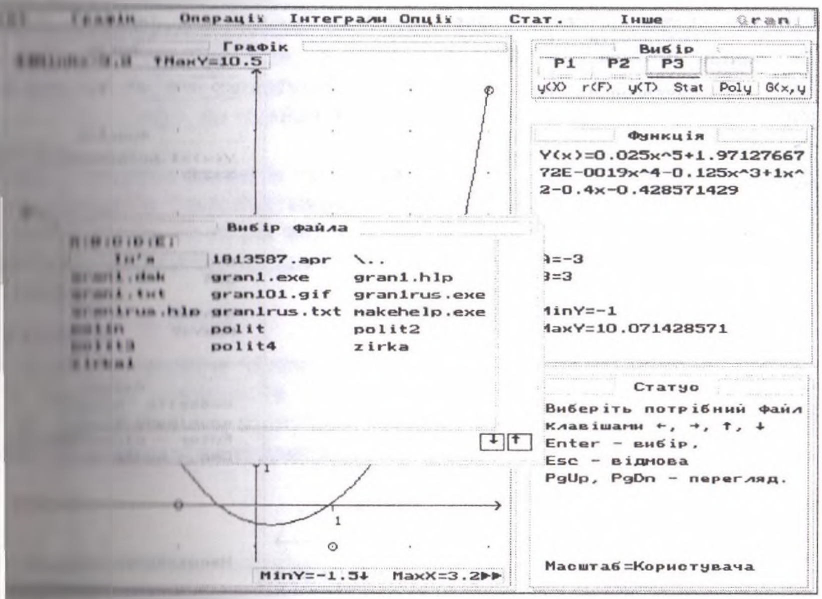


Рис. 1.57

...бочі файли з таблично поданими даними зберігаються доти, по-...функції (типу *Poly* чи *Stat*) не буде вилучено. Якщо ...ія чи статистична вибірка вилучаються (при зверненні до під-...у «Вилучити» пункту «Об'єкт» головного меню), то і відповід-...робочий файл, створений під час даного сеансу роботи з програ-...вилучається. Якщо ж вийти з програми, не вилучаючи ...функції типу *Poly* (чи статистичні вибірки типу *Stat*), ...зберігаються в директорії, що в даний момент використову-... і можуть бути використані в подальших сеансах роботи з про-...

...файли, що утворюються за програмою при введенні табли-...функцій (типу *Poly*), мають розширення *Apr*, а робочі ..., що утворюються за програмою при введенні статистичних ... (типу *Stat*), мають розширення *Sta* (рис. 1.57).

...при табличному заданні функції (типу *Poly*) таблиця вводи-...файла, то слід звернутися до підпункту «Таблиця з файла», піс-... у вікні «Графік» з'являється додаткове вікно із написом ...файла», під яким подано перелік імен файлів, наявних у дире-..., що в даний момент використовується (див. рис. 1.57). Щоб ...дані з деякого із цих файлів, досить вказати ім'я потрібного ...

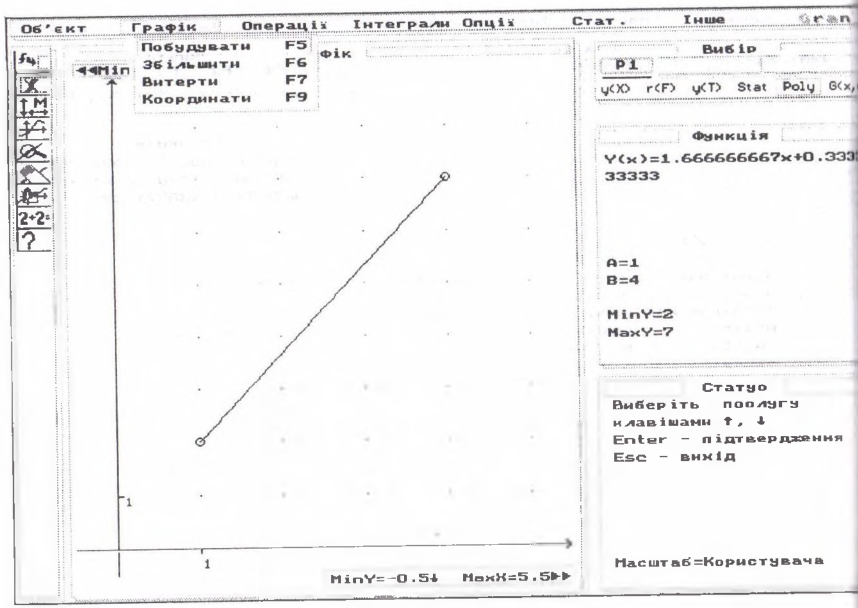


Рис. 1.58

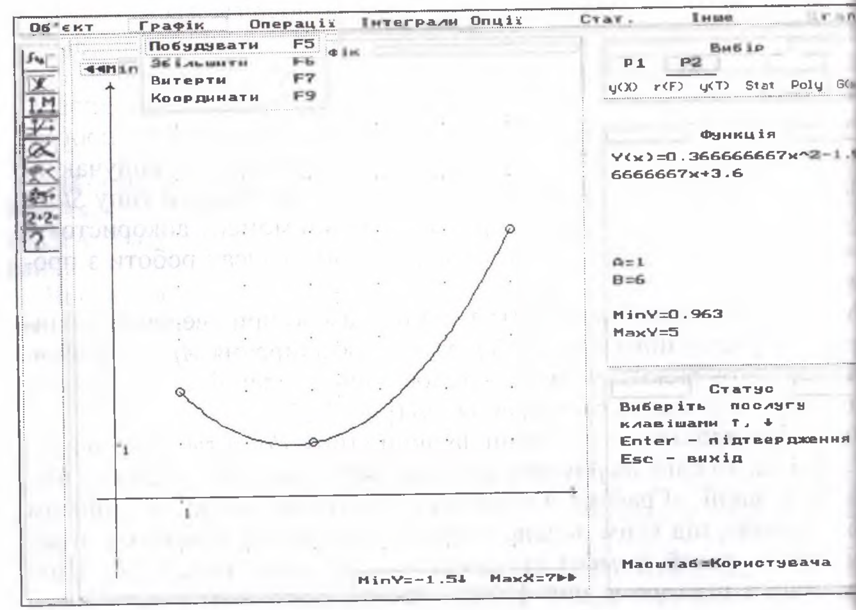


Рис. 1.59

Щоб внести зміни до таблиці значень таблично заданої функції чи просто переглянути таблицю, слід звернутися до підпункту «Змінити функцію» пункту «Об'єкт». У результаті такого звернення у вікні «Графік» з'являється додаткове вікно, де подається таблиця значень функції (типу *Poly*), на позначення якої встановлено вказівник у вікні «Вибір».

Якщо є потреба змінити степінь полінома, слід звернутися до підпункту «Змінити степінь» пункту «Об'єкт». Якщо графік полінома уже побудовано, то після зміни степеня полінома у вікні «Функція» з'являється аналітичне подання полінома, а у вікні «Графік» відповідний графік.

Приклади

1. Знайти рівняння прямої, що проходить через точки $A(1,2)$ і $B(4,7)$. Після встановлення типу задання функціональної залежності *Poly* та звернення до підпункту «Нова функція» пункту «Об'єкт», введемо (з клавіатури) таблицю

x_i	1	4
y_i	2	7

Вказавши степінь полінома рівним 1, одержимо

$$P(x) = 1.666666667x + 0.333333333 \approx \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}.$$

Звернувшись до послуги «Побудувати» пункту «Графік», отримаємо графічне зображення відрізка прямої, що проходить через задані точки (рис. 1.58).

2. Знайти рівняння параболи, що проходить через точки $A(1,2)$, $B(3,1)$, $C(6,5)$. Після встановлення типу *Poly* та звернення до підпункту «Нова функція» пункту «Об'єкт» введемо (з клавіатури) таблицю

x_i	1	3	6
y_i	2	1	5

Вказавши степінь полінома рівним 2, одержимо
$P(x) = 0.366666667x^2 - 1.966666667x + 3.6$.

Звернувшись до послуги «Побудувати» пункту «Графік», у вікні «Графік» отримаємо графік шуканої параболи (рис. 1.59).

3. Гармата розташована в точці з координатами (0, 0), мішень в точці з координатами (7, 0). Визначити кут нахилу кидання снаряду і його початкову швидкість так, щоб траєкторія снаряда пройшла через точку (над вершиною укриття) (5, 3.01) і при цьому снаряд влучив у мішень.

Встановивши тип *Poly* та ввівши з клавіатури таблицю

x_i	0	5	7
y_i	0	3.01	0

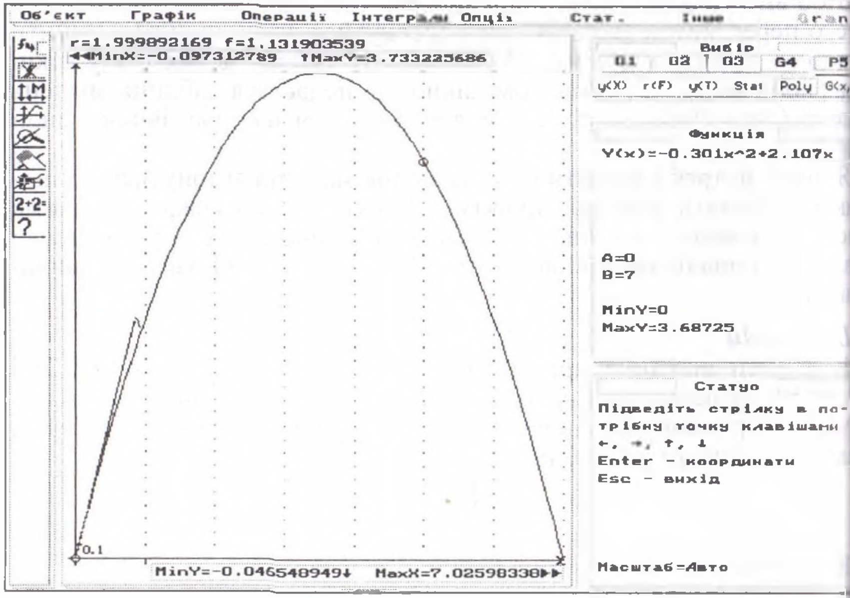


Рис. 1.60

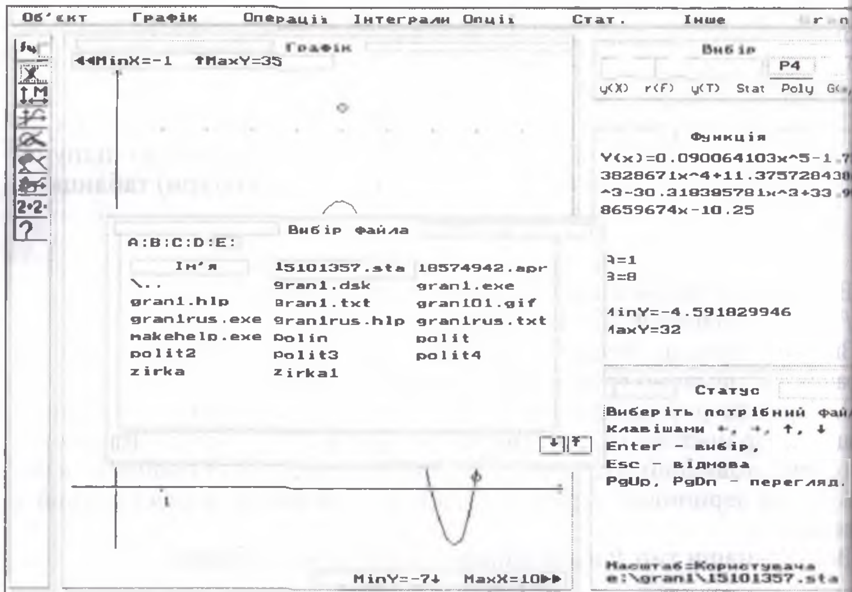


Рис. 1.61

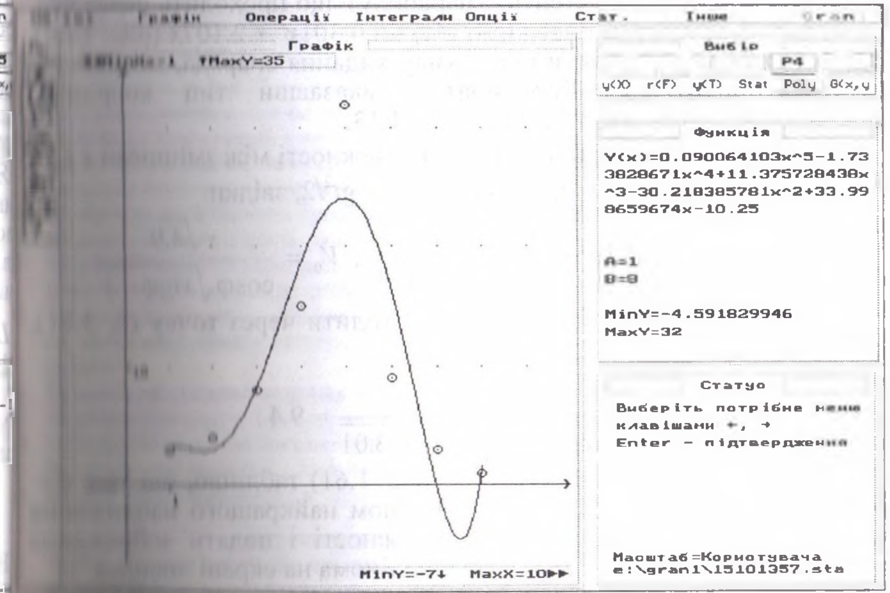


Рис. 1.62

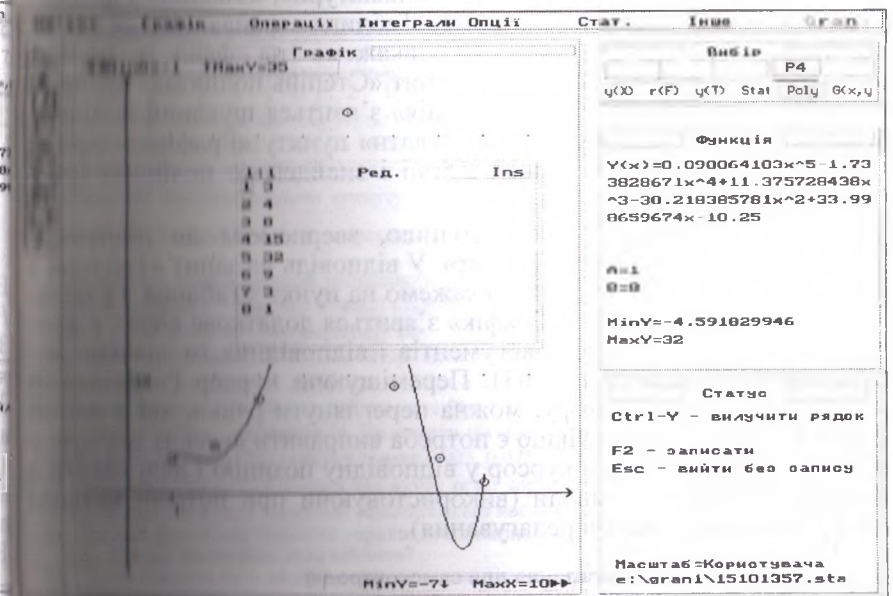


Рис. 1.63

побудуємо поліном 2-го степеня (параболу), що проходить через вк зані точки. У результаті одержимо $y(x) = -0.301x^2 + 2.107x$ (рис. 1.60 Щоб наближено встановити кут нахилу кидання снаряда, можна ск ристатися послугою «Координати», вказавши тип координ «Полярні». У результаті отримаємо $\varphi \approx 1.13$.

Враховуючи параметричне задання залежності між змінними x і y

$$x = (V_0\cos\varphi)t,\ \ y = (V_0\sin\varphi)t - gt^2/2,\text{ звідки}$$

$$t = \frac{x}{V_0\cos\varphi},\ \ y = xtg\varphi - \frac{9.8}{2}\left(\frac{x}{V_0\cos\varphi}\right)^2,\ \ V_0 = \frac{x\sqrt{4.9}}{\cos\varphi\sqrt{xtg\varphi - y}},$$

а також те, що траєкторія повинна проходити через точку (5, 3.01 одержуємо

$$V_0 = \frac{5\sqrt{4.9}}{\cos 1.13\sqrt{5tg1.13 - 3.01}} \approx 9.4\,.$$

4. Ввести з файла 15101357.STA (рис. 1.61) таблицю, що там зб рігається, побудувати відповідний поліном найкращого наближен таблично заданої функціональної залежності і подати зображен точок таблиці та графіка отриманого полінома на екрані дисплея.

Встановивши тип *Poly*, звернемось до послуги «Нова функція Далі у відповідь на запит «Таблиця з клавіатури», «Таблиця з файл (див. рис. 1.53) вкажемо на підпункт «Таблиця з файла». Після поя переліку файлів (див. рис. 1.61) вкажемо на файл з імен 15101357.STA. Далі у відповідь на запит «Степінь полінома» введем число 5. У результаті у вікні «Функція» з'явиться шуканий поліно Після звернення до послуги «Побудувати» пункту «Графік» одерж мо графічне подання введеної таблиці і знайденого полінома (ри 1.62).

Щоб переглянути введену таблицю, звернемося до підпунк «Змінити функцію» пункту «Об'єкт». У відповідь на запит «Таблиц клавіатури», «Таблиця з файла» вкажемо на пункт «Таблиця з клаві тури». В результаті у вікні «Графік» з'явиться додаткове вікно, в як му подано таблицю значень аргументів і відповідних їм значень д сліджуваної функції (рис. 1.63). Переміщуючи курсор (затемнени прямокутник) вниз чи вгору, можна переглянути рядки, які в дани момент не видно у вікні. Якщо є потреба виправити якесь із значень таблиці, слід перемістити курсор у відповідну позицію і далі ввести клавіатури потрібні символи (використовуючи при потребі клаві *Del*, *Bs*, *Ins* та інші засоби редагування).

Запитання для самоконтролю

1. Який тип задання функціональної залежності слід встановити при введенні таблиці знач аргументів і відповідних їм значень функції?

Чи передбачено програмою *GRAN1* можливість спочатку ввести всі значення аргументів, а потім відповідні їм значення функції?

Чи можна вводити таблицю з використанням панелі калькулятора і маніпулятора «мишка»?

Що означають цифри 3:5 у верхньому рядку зліва над полем введення таблиці?

Як відокремлюються одне від одного числа при введенні таблиці ?

Чи можна в одному рядку в полі введення таблиці вводити більше однієї пари чисел ?

Які дії треба виконати, щоб вказати на те, що введення чисел до таблиці закінчено і таблицю можна помістити в робочий файл?

Як зберегти для подальших сеансів роботи з програмою *GRAN1* щойно введену таблицю?

Як ввести таблицю із файла, до якого її було записано раніше?

Чи можна з використанням послуг програми *GRAN1* подати на екрані дисплея зображення точок, заданих у таблиці, не подаючи графіка відповідного полінома?

Чи можна за допомогою послуг програми *GRAN1* подати на екрані дисплея графік полінома, який є наближенням таблично заданої функції, не подаючи зображень точок, заданих в таблиці?

Чи можна внести зміни до раніше введеної таблиці?

Чи можна переглянути таблицю, введену раніше з файла чи з клавіатури ?

Чи може наближуючий поліном мати степінь 1, якщо таблиця містить 5 пар чисел?

Чи обов'язково різниця $x_{i+1} - x_i$ повинна залишатися однаковою при всіх $i = 1, 2, \ldots, n - 1$?

Чи обов'язково аргументи x_i в таблиці повинні бути впорядковані за зростанням ?

Вправи для самостійного виконання

Знайти рівняння кривої, що проходить через точки: (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 4) і побудувати її графік.

Знайти рівняння кривої, що проходить через точки (–2, 4), (–1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4) і побудувати її графік.

Знайти поліном (не вище 5-го степеня), що найкраще наближає функцію, задану таблицею

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$f(x)$	0	1	1	2	4	5	9	10	16	20	18

Переглянути таблицю, що зберігається у файлі з вказаним іменем, якщо до файлу з таким іменем попередньо було записано 15 пар чисел, і з'ясувати, скільки серед цих пар таких, де значення таблично заданої функції $f(x)$ від'ємні.

Побудувати (використовуючи послугу «Калькулятор» пункту «Інше») таблицю значень функції $f(x) = \cos(x)$ для значень аргумента $-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$. Далі ввести цю таблицю (з клавіатури) і знайти поліном найкращого наближення $P(x)$ другого степеня. Побудувати графіки функцій $y = P(x)$ та $y = \cos(x)$ і порівняти їх. Обчислити значення $P(x)$ і $\cos(x)$ в точках $x = 0.1$, $x = 1$, $x = 1.2$ і порівняти їх.

Використовуючи послугу «Калькулятор» пункту «Інше», побудувати таблицю значень функції $y = \sin(x)$ для значень аргумента –0.10. –0.05. 0, 0.05. 0.10. Для отриманої таблиці побудувати поліном найкращого наближення $P(x)$ 5-го степеня. Побудувати графіки функцій $y = \sin(x)$, $y = P(x)$ і порівняти їх. Визначити (за допомогою послуги «Калькулятор» та за графіками) значення $P(x)$ і $\sin(x)$ у точках 0.025, 0.075 і порівняти їх.

З точки (0, 0) кидається снаряд під кутом α до горизонту із початковою швидкістю V_0. Мішень знаходиться за укриттям, вершина якого має координати (x_1, y_1).

а) На якій відстані від підніжжя укриття повинна знаходитись мішень, щоб при заданих V_0, x_1, y_1 в неї неможливо було влучити?

б) Якою повинна бути висота y_1 укриття, щоб при заданих V_0, x_1 снаряд неможливо було перекинути через укриття?

в) Якими повинні бути V_0 і α, щоб при заданих x_1, y_1 снаряд перелітав укриття і падав не далі відстані d від підніжжя укриття?

г) На якій віддалі від підніжжя укриття повинен стартувати снаряд, щоб при заданому він перелітав укриття (якщо це можливо) і падав не далі відстані d від підніжжя укр тя?

д) Чи можливе при заданих x_1, y_1, V_0 влучення в мішень, якщо вона знаходиться за укр тям на віддалі d від його підніжжя?

Для конкретних розрахунків покласти:

а) $V_0 = 10,\ x_1 = 3,\ y_1 = 2;\ V_0 = 10,\ x_1 = 5,\ y_1 = 4;$
$V_0 = 10, x_1 = 1, y_1 = 10;\ V_0 = 10,\ x_1 = 10,\ y_1 = 1;$

б) $V_0 = 10,\ x_1 = 1;\ V_0 = 10,\ x_1 = 2;\ V_0 = 10,\ x_1 = 3;$
$V_0 = 10,\ x_1 = 5;\ V_0 = 10,\ x_1 = 6;\ V_0 = 10,\ x_1 = 7;$
$V_0 = 10,\ x_1 = 4;\ V_0 = 10,\ x_1 = 8;$

в) $x_1 = 2,\ y_1 = 2,\ d = 1;\ x_1 = 2,\ y_1 = 4,\ d = 0.5;$
$x_1 = 2,\ y_1 = 5,\ d = 0.2;\ x_1 = 5,\ y_1 = 7,\ d = 1;$
$x_1 = 7,\ y_1 = 8,\ d = 0.1;\ x_1 = 10,\ y_1 = 15,\ d = 1.5;$

г) $V_0 = 10,\ d = 1;\ V_0 = 1,\ d = 2;\ V_0 = 5,\ d = 0.5;$
$V_0 = 20,\ d = 0.1;\ V_0 = 8,\ d = 2;\ V_0 = 2,\ d = 0.1;$

д) $x_1 = 5,\ y_1 = 5,\ V_0 = 3,\ d = 1;\ x_1 = 5,\ y_1 = 10,\ V_0 = 5,\ d = 0.5;$
$x_1 = 1,\ y_1 = 8,\ V_0 = 6,\ d = 2;\ x_1 = 3,\ y_1 = 9,\ V_0 = 2,\ d = 1.$

§ 10. *Графічне розв'язування рівнянь та систем рівнянь*

Нехай потрібно розв'язати рівняння $f(x) = 0$, тобто в області виз чення функції $f(x)$ знайти всі такі значення аргумента x, що відпові їм значення функції $f(x)$ дорівнюють нулю.

При графічному поданні функціональної залежності $y = f(x)$ зна розв'язки рівняння $f(x) = 0$ означає: знайти всі точки на граф функції $y = f(x)$, ординати яких дорівнюють нулеві. Іншими слова потрібно знайти точки, які належать одночасно графікові фун $y = f(x)$ та осі абсцис Ox, рівняння якої $y = 0$, тобто точки, які леж одночасно як на лінії (прямій чи кривій), рівняння якої $y = f(x)$, т на лінії, рівняння якої $y = 0$.

Побудувавши графік функції $y = f(x)$ (використовуючи посл «Побудувати» пункту «Графік») та скориставшись послуг «Координати», легко визначити ординати всіх точок на граф функції $y = f(x)$, які в той же час лежать на осі Ox.

Приклади

1. Знайти розв'язки рівняння $x^2 - 3 = 0$.

Побудувавши графік функції $y = x^2 - 3$ та скориставшись пос гою «Координати» пункту «Графік», одержимо $x_1 \approx -1.73$, $x_2 \approx$ 1 (рис. 1.64).

Якщо є потреба уточнити значення коренів, слід скористатися слугою «Збільшити» пункту «Графік» (або послугою «Змін відрізок» пункту «Об'єкт») і побудувати графіки досліджува функції в досить малих околах раніше визначених точок в зна збільшеному масштабі.

2. Знайти розв'язки рівняння $| x - 1 | + | x + 1 | - 2 = 0$.

Побудувавши графік функції $y = \mathrm{abs}(x - 1) + \mathrm{abs}(x + 1) - 2$, можна переконатися, що будь-яка точка осі Ox із проміжку $[-1, 1]$ належить графіку даної функції (рис. 1.65). Отже рівняння має безліч розв'язків – будь-яке значення $x \in [-1, 1]$ є розв'язком даного рівняння.

Знайти розв'язки рівняння $\sin(x) + 2 - \ln(x) = 0$.

Побудувавши графік функції $y = \sin(x) + 2 - \ln(x)$ на проміжку $[-1, 40]$ (рис. 1.66), можна переконатися (враховуючи властивості функцій $\sin(x)$ та $\ln(x)$), що за межами проміжку $[-1, 40]$ немає коренів досліджуваного рівняння.

При розгляді графіка функції $y = \sin(x) + 2 - \ln(x)$, поданого на рис. 1.66, може скластися враження, що рівняння $\sin(x) + 2 - \ln(x) = 0$ має 6 розв'язків: $x_1 \approx 3.9$; $x_2 \approx 6.1$; $x_3 \approx 9.2$; $x_4 \approx 11.3$; $x_5 \approx 14.9$; $x_6 \approx 20.25$.

Якщо висока точність обчислень не вимагається, то з такими висновками можна погодитись.

Однак, якщо вимагається дещо вища точність результатів, то, збільшуючи масштаб графічних побудов у досить малих околах точок x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 (див. рис. 1.67, 1.68), можна переконатися, що рівняння має 5 розв'язків: $x_1 = 3.851$; $x_2 = 6.088$; $x_3 = 9.203$; $x_4 = 11.104$; $x_5 = 14.928$.

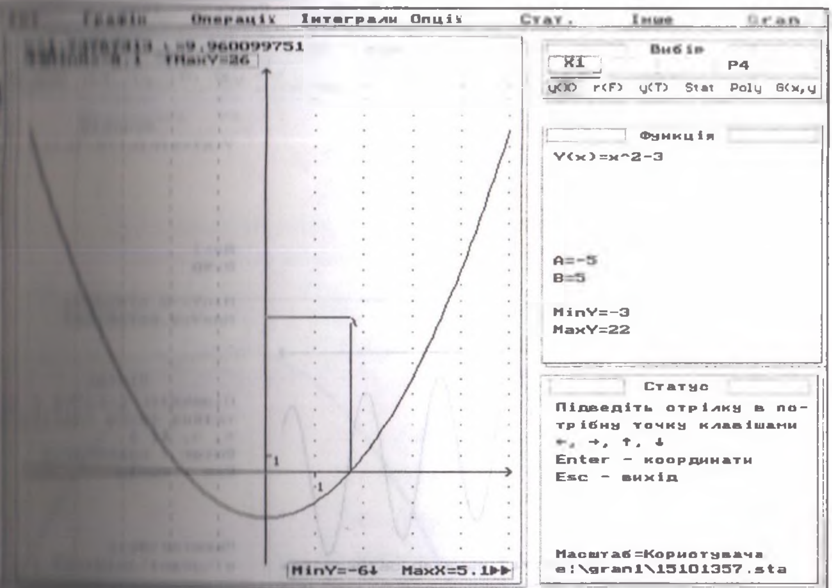


Рис. 1.64

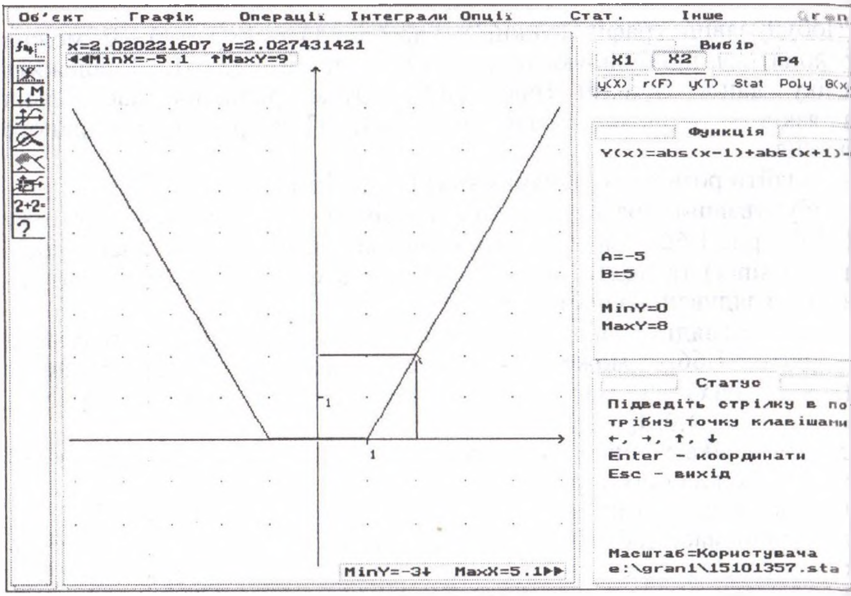


Рис. 1.65

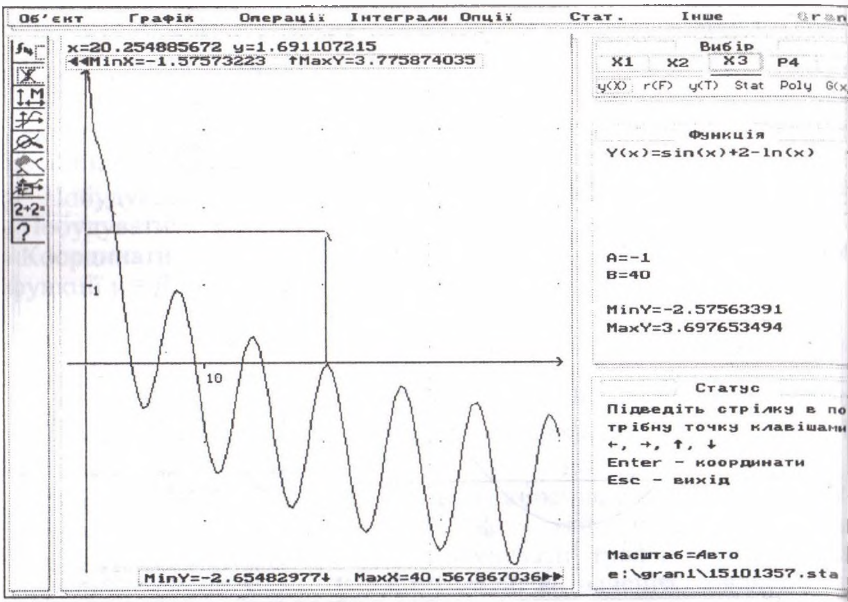


Рис. 1.66

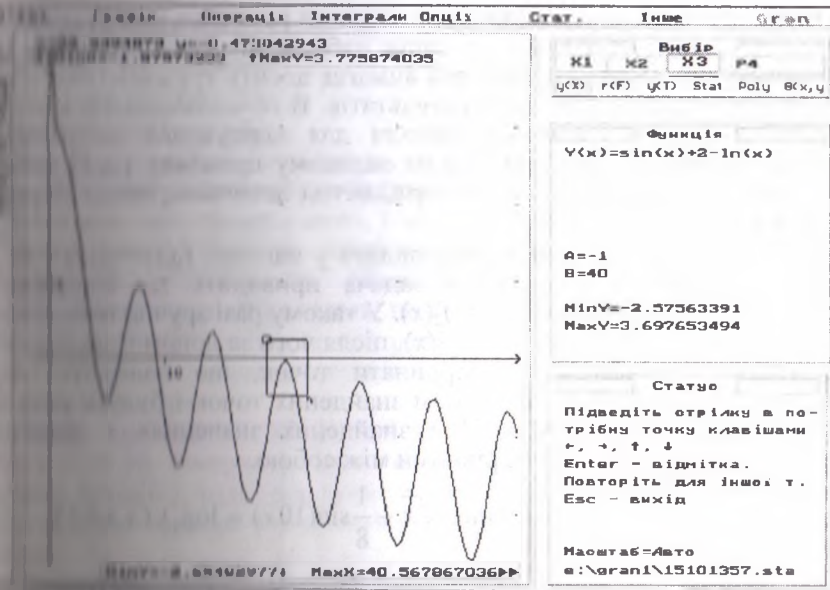


Рис. 1.67

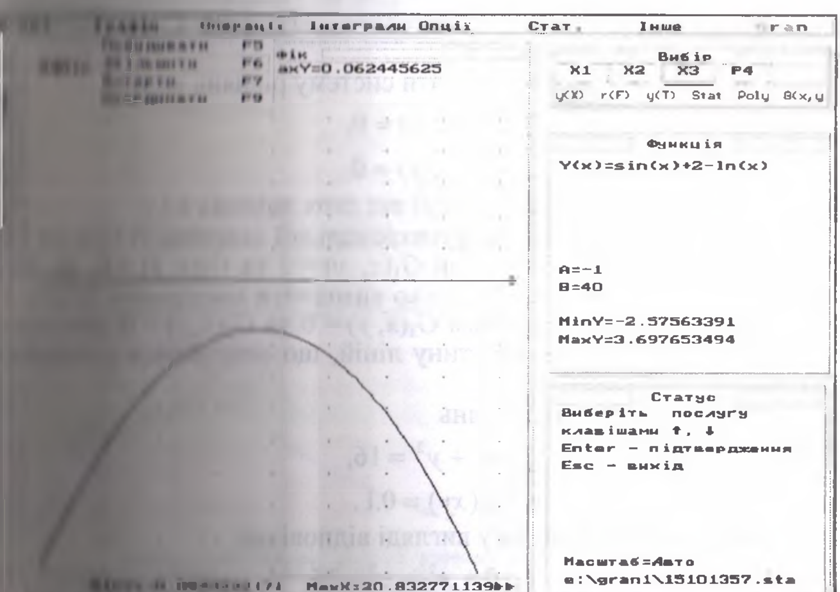


Рис. 1.68

Слід зауважити, що точний аналітичний розв'язок розглядуван рівняння знайти неможливо, а пошук наближених його розв'язків б використання графічних побудов вимагає досить трудомістких обч слень і ретельного аналізу їх результатів. В обчислювальній мате тиці вивчаються спеціальні методи для відшукання наближен розв'язків рівнянь виду $f(x) = 0$ на заданому проміжку $[a, b]$ (мет ділення відрізка навпіл, метод хорд, метод дотичних, метод ітера тощо).

Іноді рівняння $f(x) = 0$ зручно подати у вигляді: $f_1(x) - f_2(x) = 0$, $f_1(x) - f_2(x) = f(x)$, або ж деяка задача приводить до відшукан розв'язків рівняння виду $f_1(x) = f_2(x)$. У такому разі зручно побудув графіки функцій $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$, після чого за допомогою послу «Координати» визначити координати точок, що належать о графікам. Абсциси x таким чином знайдених точок і будуть розв' ками рівняння $f_1(x) = f_2(x)$. При знайдених значеннях x значен функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$ будуть рівними між собою.

4. Знайти розв'язки рівняння $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{8}\sin(10x) = \log_{1/2}(x + 3.5)$.

Побудувавши графіки функцій $y = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{8}\sin(10x)$ $y = \log_{1/2}(x + 3.5)$, легко переконатися, що дане рівняння має єди розв'язок. Скориставшись послугою «Координати», одержи $x \approx -1.297$ (рис. 1.69).

Нехай тепер потрібно розв'язати систему рівнянь виду

$$\begin{cases} G_1(x, y) = 0, \\ G_2(x, y) = 0, \end{cases}$$

де $G_1(x, y)$ і $G_2(x, y)$ – деякі функції від двох змінних x і y.

Встановивши тип задання функціональної залежності $G(x, y)$ і будувавши графіки залежностей $G_1(x, y) = 0$ та $G_2(x, y) = 0$, за до могою послуги «Координати» легко визначити координати точок, задовольняють обом рівнянням $G_1(x, y) = 0$ та $G_2(x, y) = 0$ одночас тобто координати точок перетину ліній, що описуються рівнянн $G_1(x, y) = 0$, $G_2(x, y) = 0$.

5. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ \lg(xy) = 0.1\,. \end{cases}$$

Подамо вказані рівняння у вигляді відповідно

$$\begin{cases} 0 = x^2 + y^2 - 16, \\ 0 = \lg(xy) - 0.1 \end{cases}$$

Будуємо графіки відповідних залежностей (рис. 1.70).

Скориставшись послугою «Координати», знаходимо координати точок перетину графіків

1) $x \approx -4.03$, $y \approx -0.25$; 3) $x \approx 0.24$, $y \approx 4.04$;

2) $x \approx 0.28$, $y \approx 3.97$; 4) $x \approx 3.97$, $y \approx 0.28$.

Для більш точного визначення координат точок перетину графіків слід змінити масштаб побудови, тобто скористатися послугою «Масштаб» або змінити межі, в яких змінюються змінні x та y. Наприклад, якщо змінити масштаб, вказавши межі MinX = –4.5, MaxX = –3.5, MinY = –0.5, MaxY = 0.1, і побудувати відповідні графіки, одержимо зображення, подане на рис. 1.71. Скориставшись послугою «Координати», цього разу отримаємо $x \approx -3.99$, $y \approx -0.31$, причому при переміщенні курсора уточнюється (змінюється) третя після коми цифра.

Якщо покласти MinX = –4.0, MaxX = –3.98, MinY = –0.32, MaxY = –0.30 (скориставшись послугою «Масштаб користувача» меню «Опції»), тоді одержуємо $x = -3.987$, $y = -0.315$, причому при переміщенні курсора уточнюється (змінюється) четверта після коми цифра.

Задачу відшукання розв'язків рівняння $f(x) = 0$ можна розглядати як задачу про відшукання розв'язків системи рівнянь

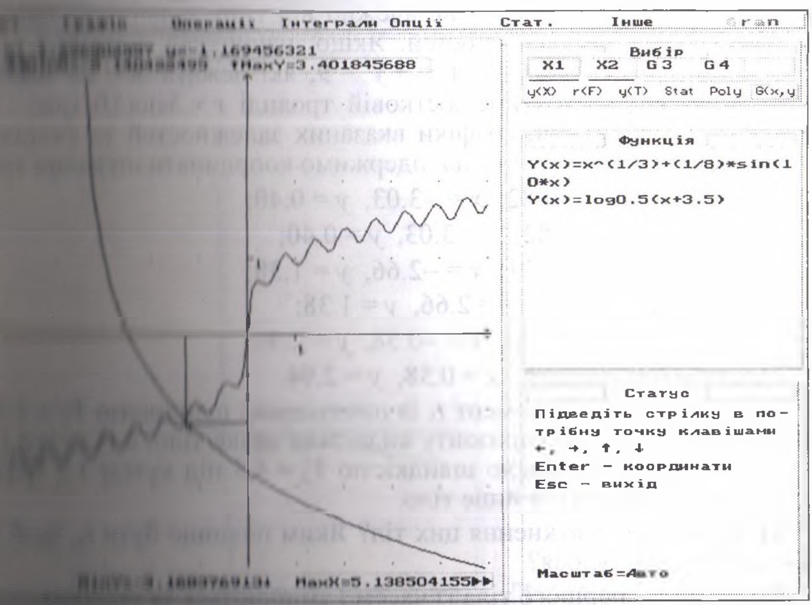


Рис. 1.69

$$\begin{cases} 0 = y - f(x), \\ 0 = y, \end{cases}$$

а задачу відшукання розв'язків рівняння $f_1(x) = f_2(x)$ як задач відшукання розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 0 = y - f_1(x), \\ 0 = y - f_2(x). \end{cases}$$

Досить часто відшукання розв'язків системи рівнянь ви $\{G_1(x, y) = 0, G_2(x, y) = 0\}$ за допомогою графічних побудов є мало єдиним придатним для практичних застосувань методом, оскіль метод виключення змінних чи інші методи не завжди приводять д бажаних результатів або ж є надто складними.

6. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 0 = \sin(xy) + \cos(x - y), \\ 0 = x/y - \lg(x + y), \end{cases}$$

(рис. 1.72). Виключити одну із змінних x чи y із даної системи рівнян не вдається і важко запропонувати будь-який практично придатн підхід до її розв'язування, крім графічного.

Очевидно, графічні побудови можуть бути використані для визн чення точок перетину ліній незалежно від типу задання відповідн їм функціональних залежностей. Якщо, наприклад, потрібно визн чити координати точок кола $x^2 + y^2 = 9$, які лежать або на параб $y = x^2/7 - 2$ або на п'ятипелюстковій троянді $r = 5\sin(5f)$ (рис. 1.7 1.74), то, побудувавши графіки вказаних залежностей та скориста шись послугою «Координати», одержимо координати шуканих точо

1) $x = -2.92,\ y = -0.82;\ x = -3.03,\ y = 0.40;$

2) $x = 2.92,\ y = -0.82;\ x = 3.03,\ y = 0.40;$

3) $x = -2.18,\ y = -2.11;\ x = -2.66,\ y = 1.38;$

4) $x = 2.18,\ y = 2.11;\ x = 2.66,\ y = 1.38;$

5) $x = -1.30,\ y = -2.76;\ x = -0.58,\ y = 2.94;$

6) $x = 1.30,\ y = -2.76;\ x = 0.58,\ y = 2.94.$

7. Із точки (1, 0) в момент t_1 із початковою швидкістю $V_1 = 5.5$ п кутом 0.6 (радіан) до горизонту кидається деяке тіло, а із точки (2, в момент t_2 із початковою швидкістю $V_2 = 4.5$ під кутом 1.2 (раді до горизонту кидається інше тіло.

а) Чи можливе зіткнення цих тіл? Яким повинно бути t_2, щоб зі нення тіл не відбулося?

Координати першого тіла із часом t змінюються за законом

$x_1(t) = x_1 + V_1\cos(\alpha_1)\,(t - t_1),$

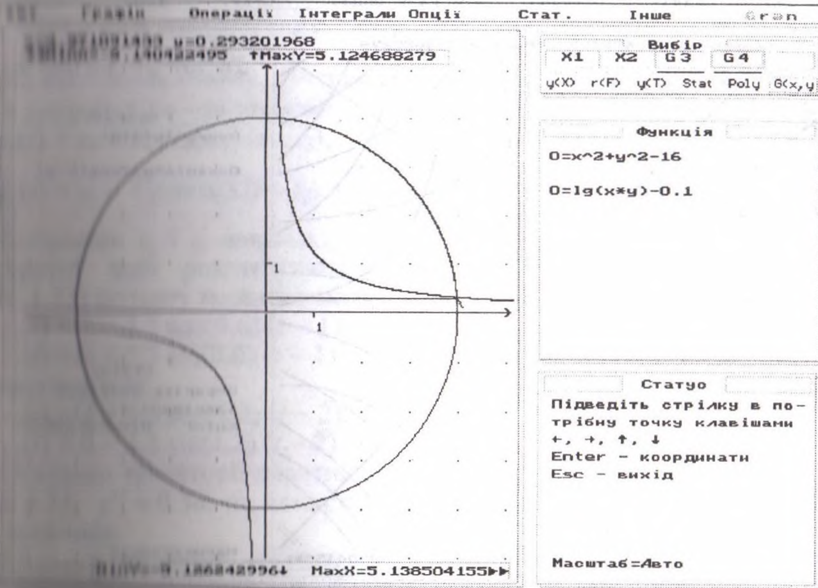


Рис. 1.70

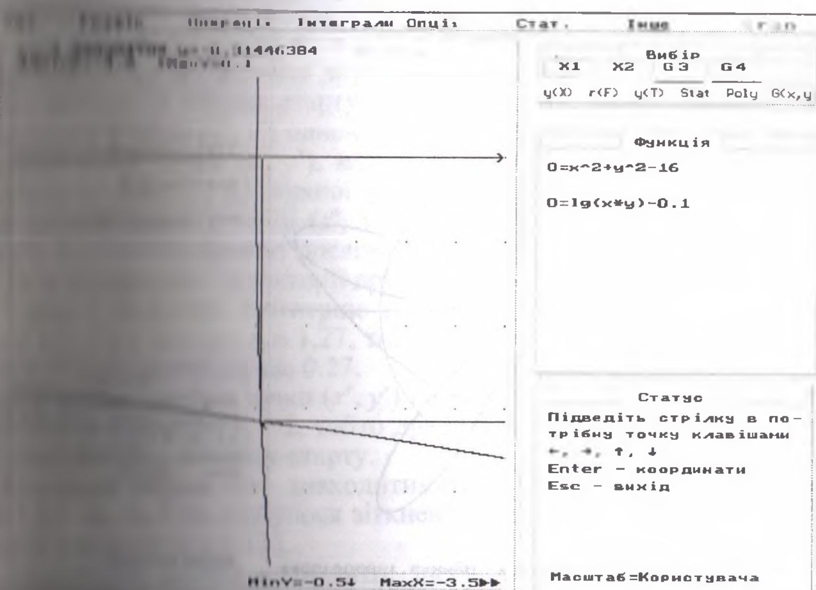


Рис. 1.71

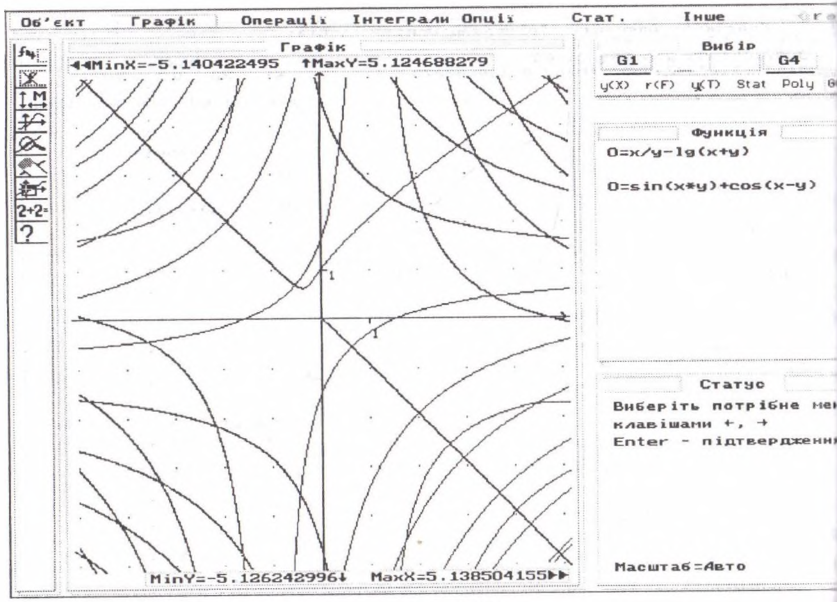


Рис. 1.72

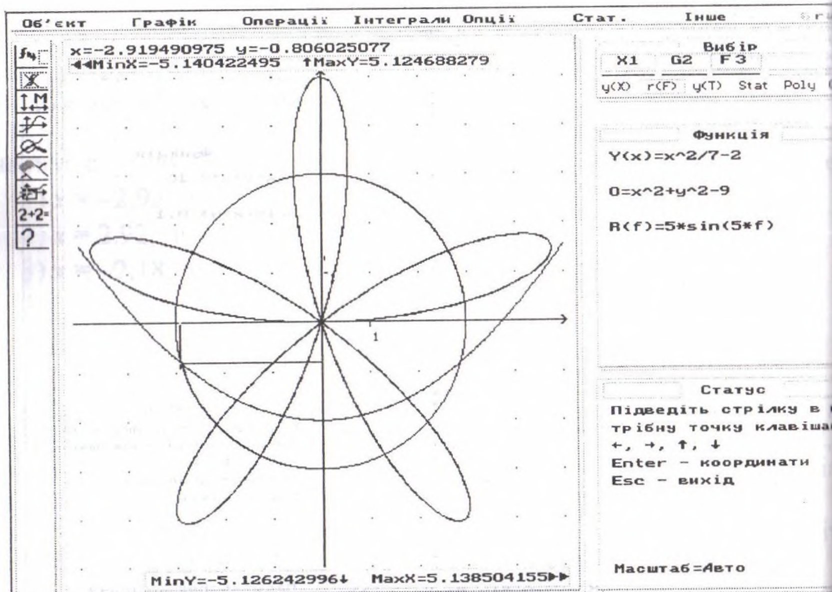


Рис. 1.73

$y_1(t) = y_1 + V_1\sin(\alpha_1)\,(t - t_1) - \dfrac{g}{2}(t - t_1)^2,$

[illegible] – точка старту, g – прискорення вільного падіння, а координати [illegible] тіла – за законом

$x_2(t) = x_2 + V_2\cos(\alpha_2)\,(t - t_2),$

$y_2(t) = y_2 + V_2\sin(\alpha_2)\,(t - t_2) - \dfrac{g}{2}(t - t_2)^2.$

[illegible] t_1 і t_2 довільно, наприклад $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, і враховуючи [illegible] дані розглядуваного прикладу, побудуємо траєкторії [illegible] польоту першого тіла

$x_1(t) = 1 + 5.5\cos(0.6)\,(t - 1),$

$y_1(t) = 0 + 5.5\sin(0.6)\,(t - 1) - 4.9(t - 1)^2$

[illegible] другого тіла

$x_2(t) = [illegible] + 4.5\cos(1.2)\,(t - 2),$

$y_2(t) = 0 + 4.5\sin(1.2)\,(t - 2) - 4.9(t - 2)^2.$

[illegible] траєкторії перетинаються в точках $x^* \approx 2.22$, $y^* \approx 0.48$ та [illegible] $y^{**} \approx 0.34$, то, якщо момент t_2 вибирати довільно, зіткнення [illegible].

[illegible] вилітання другого тіла такий, щоб зіткнення тіл не [illegible], можна визначити різними способами. Наприклад, визначи[illegible] польоту першого тіла від точки старту до точки (x^*, y^*) перети[illegible] траєкторій і в такий спосіб встановити момент часу, в який перше [illegible] знаходитись в точці (x^*, y^*). Далі встановити час, [illegible] для досягнення другим тілом точки (x^*, y^*). Після цього [illegible] визначити момент старту другого тіла так, щоб обидва тіла не [illegible] в точці (x^*, y^*) одночасно. Час, необхідний для досягнення [illegible] тілом точки (x^*, y^*), можна визначити графічно, добираючи [illegible] $[1, t_1]$ першої функції так, щоб траєкторія польоту [illegible] в точці (x^*, y^*). Змінюючи t_1 відповідним чином, [illegible] момент досягнення першим тілом точки (x^*, y^*).

[illegible] і траєкторії другого тіла.

[illegible] рис. 1.76 видно, що перше тіло досягає точки перетину траєк[illegible] в момент $t_1 \approx 1.27$, тобто перше тіло від точки старту до [illegible] долітає за час 0.27.

[illegible] досягає точки (x^*, y^*) в момент $t_2 = 2.137$ (рис. 1.77), як[illegible] в момент $t_2 = 2$, тобто друге тіло досягає точки (x^*, y^*) че[illegible] від моменту старту.

[illegible] перше тіло знаходитиметься в точці (x^*, y^*) в момент [illegible], щоб не відбулося зіткнення, друге тіло не повинне стар[illegible] в момент $t_2 \approx 1.133$.

[illegible] можна визначити: щоб тіла не зіткнулися в точці [illegible] $= (1.25, 0.34)$, необхідно, щоб момент старту другого тіла був [illegible] від 0.729.

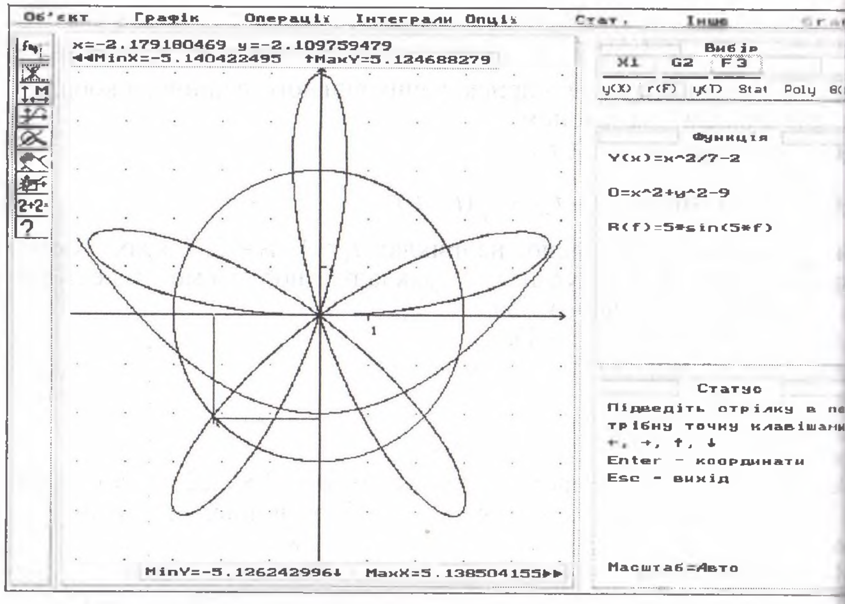


Рис. 1.74

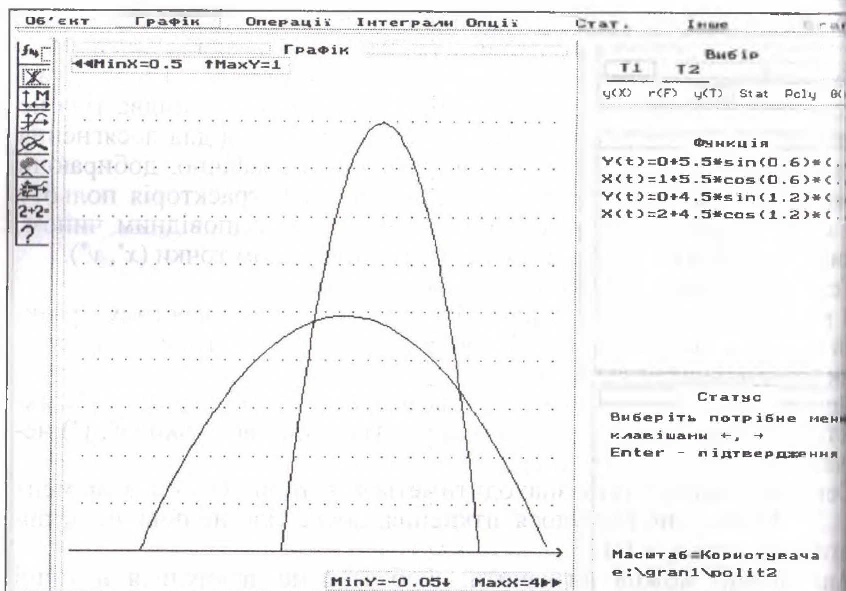


Рис. 1.75

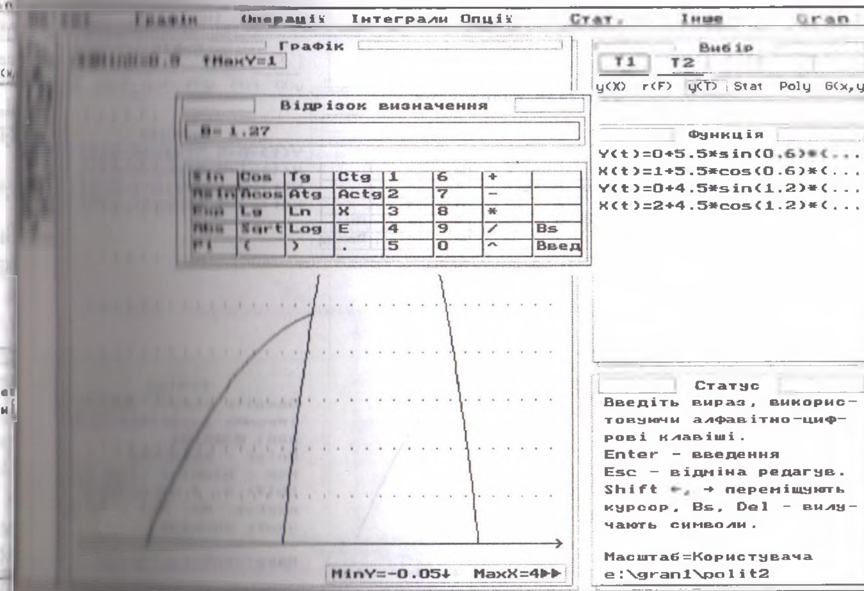


Рис. 1.76

Інший спосіб – прирівняти координати $x_1(t)$ і $x_2(t)$ та $y_1(t)$ і $y_2(t)$ і визначити величини $(t-t_1)$ і $(t-t_2)$ із рівностей

$$0 = (x_2 - x_1) + V_2\cos(\alpha_2)\,(t-t_2) - V_1\cos(\alpha_1)\,(t-t_1),$$

$$0 = (y_2 - y_1) + V_2\sin(\alpha_2)\,(t-t_2) - \frac{g}{2}(t-t_2)^2 - V_1\sin(\alpha_1)\,(t-t_1) + \frac{g}{2}(t-t_1)^2.$$

Позначивши $(t-t_1)$ через x і $(t-t_2)$ через y, побудуємо графіки так неявно виражених залежностей між змінними x і y (тобто між величинами $(t-t_1)$ і $(t-t_2)$) і знайдемо точки їх перетину (рис. 1.78), розв'язавши таким чином вказану систему двох рівнянь з двома невідомими $(t-t_1)$ і $(t-t_2)$. Як видно з рис. 1.78, перше тіло досягає точки (x^*, y^*) за час 0.27, а друге за час 0.137. В такий спосіб можна було встановити час, необхідний для досягнення кожним із тіл точки (x^*, y^*), а отже і момент старту t_2 другого тіла такий, щоб зіткнення не відбулося.

Що стосується точки (x^{**}, y^{**}), то аналогічно до попереднього можна встановити, що перше тіло досягає цієї точки за час 0.496, а друге – за час 0.767. Отже, щоб не сталося зіткнення в точці (x^{**}, y^{**}), друге тіло не повинно стартувати в момент $t = 0.729$.

в) Якщо $x_1 = 1$, $y_1 = 0$, $t_1 = 1$, $V_1 = 5.5$, $\alpha_1 = 0.6$, $x_2 = 2$, $y_2 = 0$, $t_2 = 1.5$, $V_2 = 4.5$, $\alpha_2 = 0.9$, то якою буде найменша віддаль між тілами протягом часу польоту і в який момент часу?

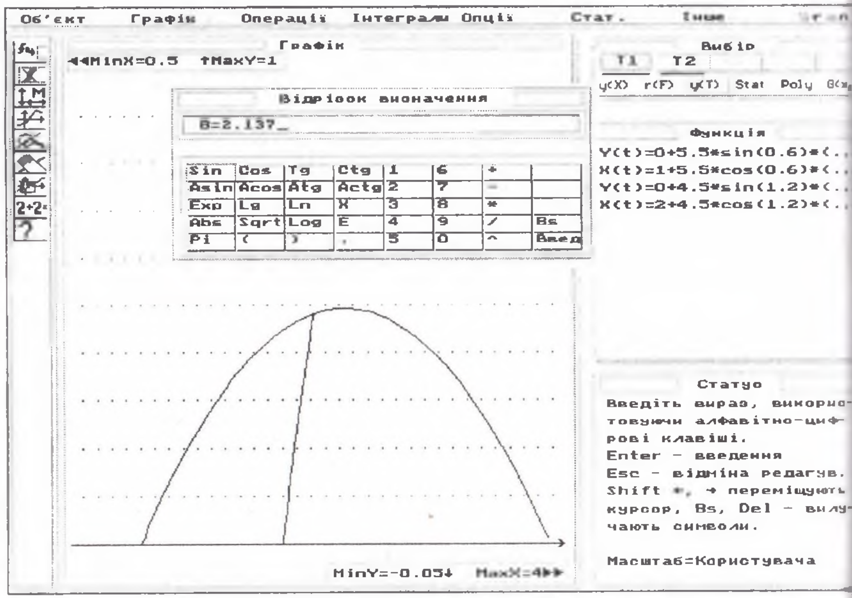


Рис. 1.77

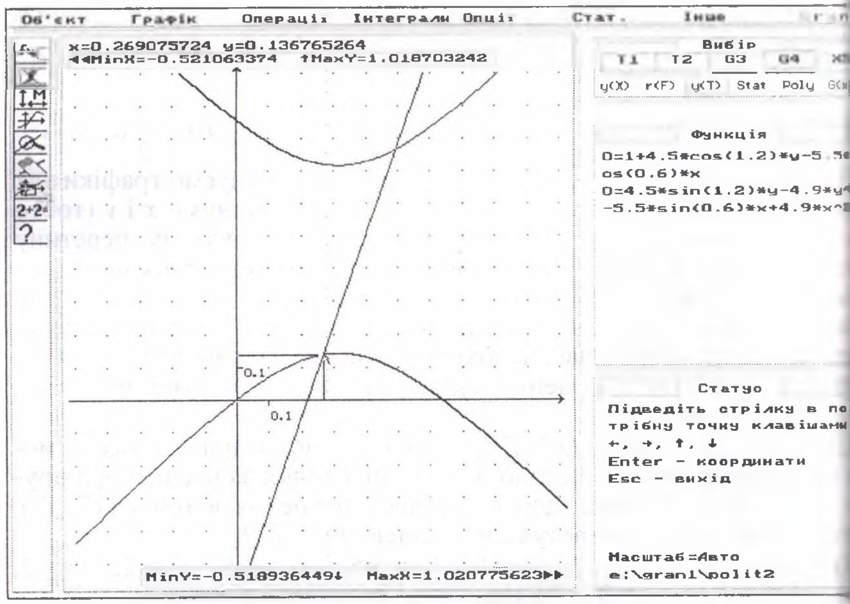


Рис. 1.78

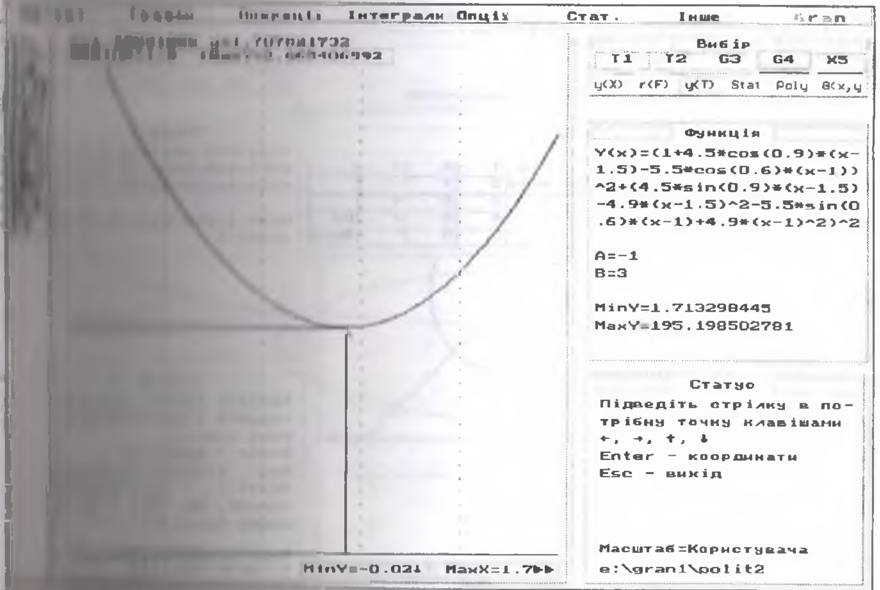


Рис. 1.79

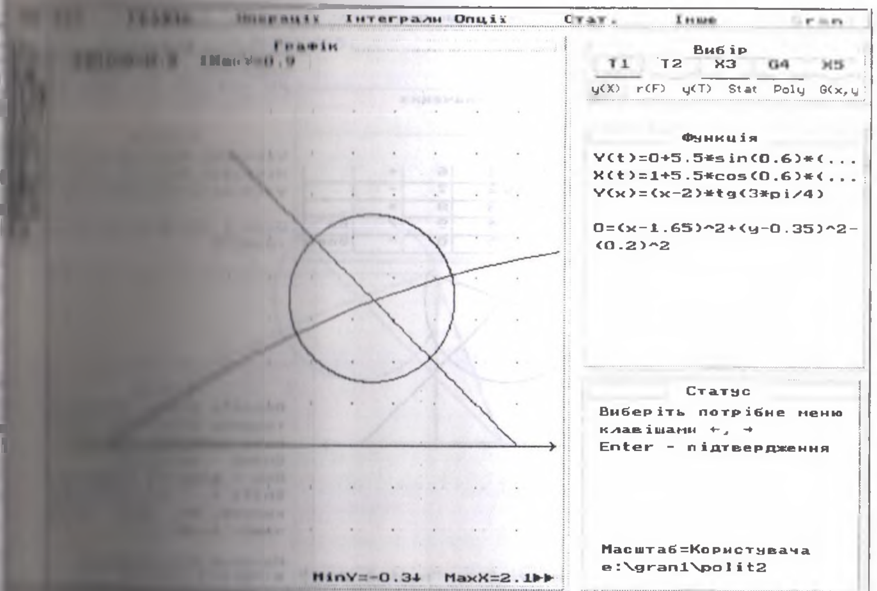


Рис. 1.80

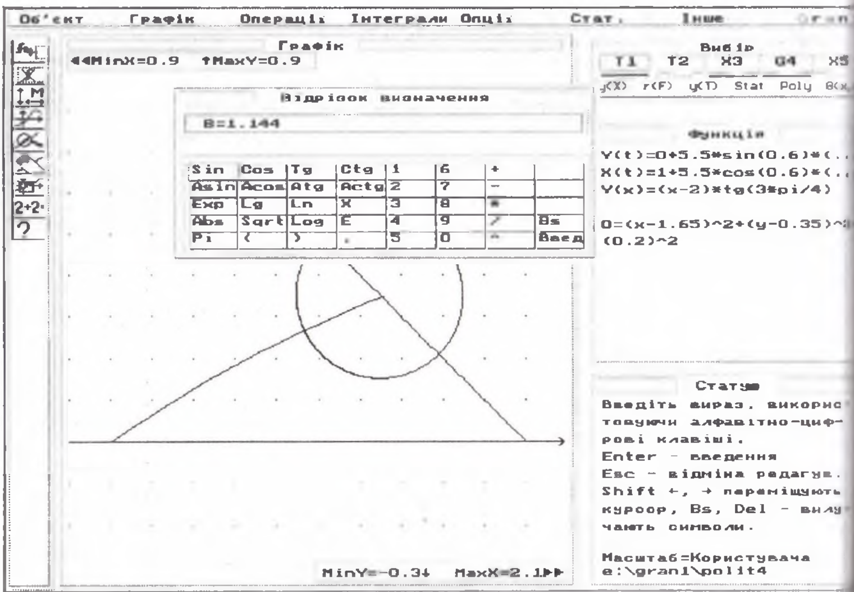


Рис. 1.81

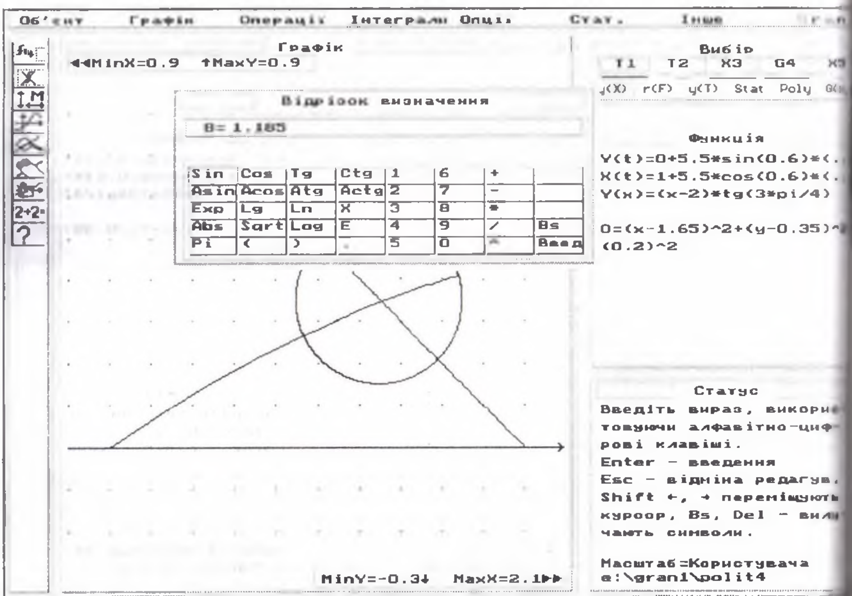


Рис. 1.82

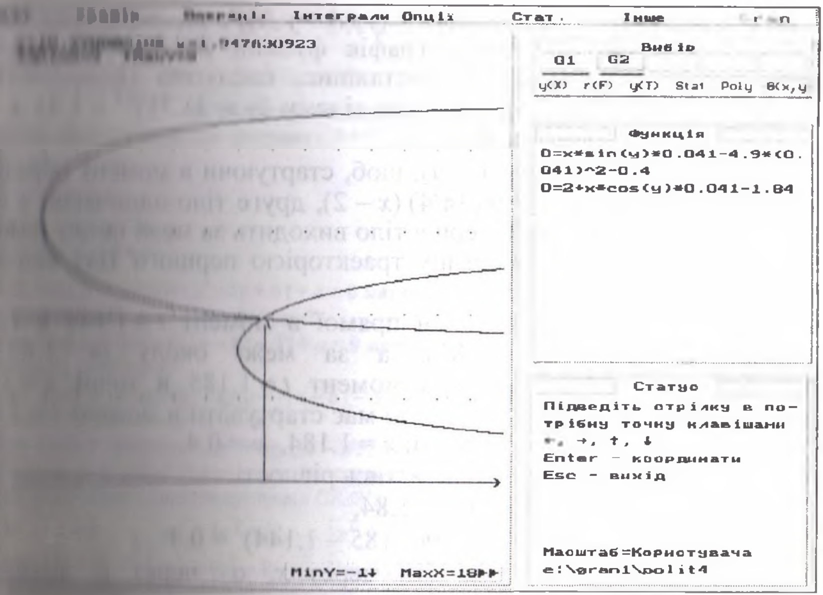


Рис. 1.83

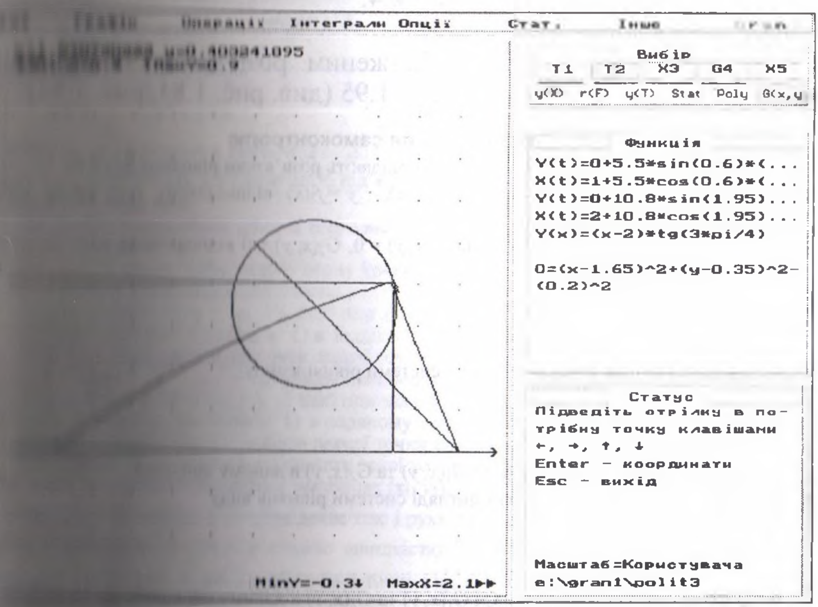


Рис. 1.84

Оскільки $D_2(t) = (x_2(t) - x_1(t))^2 + (y_2(t) - y_1(t))^2$, то, перепозначивш[illegible] змінну t через x, побудуємо графік функції $D_2(x)$, і далі (піс[illegible] відповідного збільшення), скориставшись послугою «Координати[illegible] знайдемо: найменшою відстань між тілами буде $(1.71)^{0.5} \approx 1.31$ в м[illegible]мент $t \approx 1.485$ (див. рис. 1.79).

в) Якими повинні бути V_2, α_2, щоб, стартуючи в момент перети[illegible] першим тілом прямої $y = \mathrm{tg}(3\pi/4)\,(x - 2)$, друге тіло одночасно з пе[illegible]шим досягло точки, в якій перше тіло виходить за межі околу радіу[illegible] 0.2 з центром в точці перетину траєкторією першого тіла вказан[illegible] прямої? (рис. 1.80).

Перше тіло досягає вказаної прямої в момент $t \approx 1.144$ в то[illegible] $x \approx 1.65$, $y \approx 0.35$ (рис. 1.81), а за межі околу $(x - 1.65)^2$ $+ (y - 0.35)^2 = (0.2)^2$ виходить в момент $t \approx 1.185$ в точці $x \approx 1.8$[illegible] $y \approx 0.4$ (рис. 1.82). Отже друге тіло має стартувати в момент $t = 1.1$[illegible] і в момент $t = 1.185$ досягти точки $x = 1.184$, $y = 0.4$.

Таким чином повинні виконуватись рівності:

$$2 + V_2\cos(\alpha_2)\,(1.185 - 1.144) = 1.84,$$

$$V_2\sin(\alpha_2)\,(1.185 - 1.144) - 4.9(1.185 - 1.144)^2 = 0.4\,.$$

Перепозначивши невідомі V_2 через x, α_2 через y, знайде[illegible] розв'язок системи рівнянь:

$$0 = x\sin(y)\,0.041 - 4.9\,(0.41)^2 - 0.4,$$

$$0 = 2 + x\cos(y)\,0.41 - 1.84\,.$$

Як видно з рис. 1.83, наближеним розв'язком такої систе[illegible] рівнянь буде $x = V_2 \approx 10.8$, $y = \alpha_2 \approx 1.95$ (див. рис. 1.83, рис. 1.84).

Запитання для самоконтролю

1. Які точки на графіку функції $y = f(x)$ відповідають розв`язкам рівняння $f(x) = 0$?
2. Які точки на графіках функцій $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ відповідають розв'язкам рівн[illegible] $f_1(x) = f_2(x)$?
3. Які точки на графіках залежностей $G_1(x, y) = 0$, $G_2(x, y) = 0$ відповідають розв'язкам си[illegible]ми рівнянь
$$\begin{cases} G_1(x,y) = 0, \\ G_2(x,y) = 0\ ? \end{cases}$$
4. Як подати рівняння $f(x) = 0$ у вигляді системи рівнянь виду
$$\begin{cases} G_1(x,y) = 0, \\ G_2(x,y) = 0\ ? \end{cases}$$
Який вигляд повинні мати вирази $G_1(x, y)$ та $G_2(x, y)$ в даному випадку?
5. Як подати рівняння $f_1(x) = f_2(x)$ у вигляді системи рівнянь виду
$$\begin{cases} G_1(x,y) = 0, \\ G_2(x,y) = 0\ ? \end{cases}$$
Який вигляд повинні мати вирази $G_1(x, y)$ та $G_2(x, y)$ в даному випадку?
6. Як за допомогою графічних побудов можна уточнити розв'язок: рівняння виду $f(x)$[illegible] рівняння виду $f_1(x) = f_2(x)$?; системи рівнянь виду

$$\begin{cases} G_1(x,y) = 0, \\ G_2(x,y) = 0\ ? \end{cases}$$

Вправи для самостійного виконання

[illegible]користовуючи послуги програми *GRAN1*, знайти наближені розв'язки рівнянь:

[illegible] $- 17x + 3 = 0;$ $\qquad \dfrac{1}{\log_{1/2}(x+1)} = 2;$

[illegible] $\cos(x) = 0;$ $\qquad \log_2(-x) = x.$

[illegible] $- \sin(x) = 0;$

[illegible] $1\,| - x^2 + 5 = 0;$

[illegible] a рівняння $|\,x^2 - 5x + 6\,| + a = 0$ матиме найбільшу кількість розв'язків? Найменшу [illegible] розв'язків? Три розв'язки?

[illegible] a рівняння $|\,|\,x - 4\,| - 3\,| + a = 0$ матиме найбільшу кількість розв'язків? Найменшу [illegible] розв'язків?

[illegible] a рівняння $\log_2(a + |\,|\,x - 6\,| - 3\,|\,) = 0$ матиме найбільшу кількість розв'язків? [illegible]меншу кількість розв'язків?

[illegible] a рівняння $x\cos x + \log_{1/2}(2 - x/5) + a = 0$ матиме на проміжку $[-9, 11]$ найбільшу [illegible] розв'язків? Найменшу кількість розв'язків? 1 розв'язок?

[illegible]товуючи послуги програми *GRAN1*, знайти наближені розв'язки систем рівнянь:

[illegible] $= 9,$ [illegible] $= 7;$ $\quad$ 2 $\begin{cases} 3x^2 - 4y^3 = 12, \\ 2x^3 - 5y^2 = 8; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x^2 + 3y^2 = 15, \\ \log_2(x - 3) - y^2 = 0; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 1; \end{cases}$

[illegible] $= 0,$ [illegible] $= 0,$ [illegible] $y \in [-8, 8]);$ $\quad \begin{cases} \lg(xy) = 3, \\ \sin|x| = 1/3; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x + y = 1, \\ \sqrt{|xy|} = 1/2; \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x + y^2 = 7, \\ x^2 - y = 2; \end{cases}$

[illegible] $= 3,$ [illegible] $= 1/3;$ $\quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ x^2 + 2^y = 2. \end{cases}$

[illegible] в момент t_1 під кутом α_1 до горизонту із початковою швидкістю V_1 кидається [illegible] точки (x_2, y_2) в момент t_2 під кутом α_2 до горизонту із початковою швидкістю [illegible] інше тіло.

[illegible] знаходитись обидва тіла одночасно в заданому околі заданої точки на траєк[illegible] тіла?

[illegible] радіус найменшого околу точок на траєкторії першого тіла, в якому обидва [illegible] знаходитись одночасно.

[illegible] бути t_2, α_2, V_2, щоб при заданих (x_1, y_1), t_1, α_1, V_1, (x_2, y_2) друге тіло опи[illegible] з першим: 1) в заданому околі заданої точки на траєкторії першого [illegible] околі заданого радіуса деякої точки на траєкторії першого тіла в наперед зада[illegible] t^*, $(t^* > t_1, t^* > t_2)$? Визначити координати такої точки.

[illegible] бути (x_2, y_2), t_2, щоб при заданих (x_1, y_1), t_1, α_1, V_1, α_2, V_2 друге тіло одно[illegible] першим опинилося: 1) в заданому околі заданої точки на траєкторії першого [illegible] околі заданого радіуса деякої точки на траєкторії першого тіла в наперед зада[illegible]? Визначити кооординати такої точки.

[illegible] при конкретних значеннях (x_1, y_1), t_1, α_1, V_1 і т. д.

[illegible] в момент t_1 стартує деяке тіло і рухається по колу з центром в точці (x_1^*, y_1^*) [illegible] стрілки із сталою швидкістю V_1. Із точки (x_2, y_2) в момент t_2 стартує [illegible] по колу з центром в точці (x_2^*, y_2^*) проти годинникової стрілки із ста[illegible] V_2.

[illegible] зіткнення цих тіл, якщо швидкості V_1 і V_2 і моменти стартування t_1 і t_2 ви[illegible]?

б) Якщо зіткнення неможливе при будь-яких t_1, t_2, V_1, V_2, то в який момент часу від
між тілами буде найменшою при заданих (x_1, y_1), (x_1^*, y_1^*), t_1, V_1, (x_2, y_2), (x_2^*, y_2^*), t_2
в) Чи можна дібрати моменти стартування t_1 і t_2 і швидкості V_1 і V_2 так, щоб зітк ніколи не відбулося, якщо при довільному виборі t_1, V_1, t_2, V_2 воно можливе?

Розглянути випадки

а) при даних:

1) $x_1^* = 0,\ y_1^* = 0,\ x_1 = -4,\ y_1 = 0;$
$x_2^* = 1,\ y_2^* = 0,\ x_2 = 3,\ y_2 = 0;$

2) $x_1^* = 0,\ y_1^* = 0,\ x_1 = -4,\ y_1 = 0;$
$x_2^* = 1,\ y_2^* = 0,\ x_2 = 5,\ y_2 = 0;$

3) $x_1^* = 0,\ y_1^* = 0,\ x_1 = -4,\ y_1 = 0;$
$x_2^* = 2,\ y_2^* = 0,\ x_2 = 8,\ y_2 = 0;$

б) при даних:

1) $x_1^* = 0,\ y_1^* = 0,\ x_1 = -4,\ y_1 = 0,\ V_1 = 4;$
$x_2^* = 1,\ y_2^* = 0,\ x_2 = 5,\ y_2 = 0,\ V_2 = 8;$

2) $x_1^* = 0,\ y_1^* = 0,\ x_1 = -4,\ y_1 = 0,\ V_1$
$x_2^* = 5,\ y_2^* = 0,\ x_2 = 0,\ y_2 = 0,\ V_2 =$

в) при даних:

1) $x_1^* = 0,\ y_1^* = 0,\ x_1 = -4,\ y_1 = 0,\ V_1 = 4,\ t_1 = 0;$
$x_2^* = 1,\ y_2^* = 0,\ x_2 = 3,\ y_2 = 0,\ V_2 = 3,\ t_2 = 0;$

2) $x_1^* = 0,\ y_1^* = 0,\ x_1 = -4,\ y_1 = 0,\ V_1 = 4,\ t_1 = 0;$
$x_2^* = 8,\ y_2^* = 0,\ x_2 = 11,\ y_2 = 0,\ V_2 = 3,\ t_2 = 0;$

г) при даних:

1) $x_1^* = 0,\ y_1^* = 0,\ x_1 = -4,\ y_1 = 0;$
$x_2^* = 1,\ y_2^* = 0,\ x_2 = 5,\ y_2 = 0;$

2) $x_1^* = 0,\ y_1^* = 0,\ x_1 = -4,\ y_1 = 0;$
$x_2^* = 8,\ y_2^* = 0,\ x_2 = 2,\ y_2 = 0.$

§ 11. Графічне розв'язування нерівностей та систем нерівностей

Щоб за допомогою графічних побудов одержати мно розв'язків нерівності виду $f(x) \le c$, де $f(x)$ – деяка функція, визн на проміжку $[a, b]$, слід побудувати графіки залежностей $y = f($ $y = c$ (для значень x із $[a, b]$) і з'ясувати (з використанням по «Координати»), при яких значеннях x графік залежності $y = f(x$ жить не вище, ніж графік залежності $y = c$. Множина таких значе буде множиною розв'язків нерівності $f(x) \le c$. Множина розв' нерівності виду $f_1(x) \le f_2(x)$ визначається цілком аналогічно. Крім цей випадок можна звести до попереднього, оскільки нерів $f_1(x) \le f_2(x)$ еквівалентна нерівності $f_1(x) - f_2(x) \le 0$. Мно розв'язків нерівності виду $f(x) \ge a$ чи виду $f_1(x) \ge f_2(x)$ визнача цілком аналогічно до попереднього.

Якщо функція $f(x)$ опукла донизу, то яким би не було число c, жина розв'язків нерівності $f(x) \le c$ або порожня, або така, що точки x_1 і x_2 належать цій множині, то і всі точки проміжка $[x_1,$ кож належать цій множині. При цьому функцію $f(x)$ називають лою донизу, якщо які б не взяти дві точки на графікові $y =$

лінії із прямою лінією, графік функції $y = f(x)$ між вказаними точками буде не вище графіка цієї прямої. Прикладами опуклих донизу функцій можуть бути функції x^2, 2^x, $\log_{1/2}x$, $|x|$, $\cos(x)$ на проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ та ін.

Для графічного розв'язування нерівностей виду $f(x) < a$ або $f(x) > a$ призначено послугу «Нерівність» пункту «Операції». Програма також визначає корені рівняння $f(x) = a$. При цьому операції виконуються для функції, позначення якої у вікні «Вибір» підкреслено. Якщо підкреслено кілька позначень, операції послідовно виконуються для кожної з функцій в порядку зростання їхніх номерів (зліва направо).

При зверненні до послуги «Нерівність» у вікні «Операції» під пунктом «Нерівність» з'являється додаткове вікно із двома пунктами «Знак <» та «Знак >» (рис. 1.85).

Після того, як вказано потрібний знак нерівності, у вікні «Графік» з'являється панель калькулятора, над якою розташовано вікно із написом «$a = 0$», і курсор встановлено в першу позицію, з якої розпочинається введення значення a. Одразу після введення значення a починає будуватися (зліва направо) пряма $y = a$ до першого перетину із графіком функції, вказаної першою. Абсциса точки перетину подається у вікні «Корінь», що з'являється праворуч на полі вікна «Функція» (рис. 1.86). Після натиснення будь-якої клавіші побудова прямої $y = a$ продовжується до наступного перетину із графіком вказаної функції. Цей процес повторюється до тих пір, поки не буде досягнуто правої межі проміжку, на якому задано функцію. При цьому точки осі абсцис, в яких виконується вказана нерівність, відмічаються червоним кольором.

Якщо у вікні «Вибір» підкреслено позначення тільки однієї функції, то після досягнення правої межі проміжку, на якому задано функцію, робота послуги «Нерівність» припиняється і автоматично здійснюється перехід до пункту «Операції» головного меню. Якщо ж у вікні «Вибір» підкреслено позначення кількох функцій, то після досягнення правої межі проміжку, на якому задано попередню функцію, програма автоматично продовжує роботу, починаючи від початку проміжку, на якому задано наступну функцію (при цьому проміжки задання функцій можуть перетинатися). Після закінчення роботи з однією функцією аналогічно продовжується робота з наступною. Отже, є можливість використовувати послугу «Нерівність» для розв'язування нерівностей виду $f(x) < a$ чи $f(x) > a$ і в тому випадку, коли функцію $f(x)$ задано різними виразами на різних проміжках.

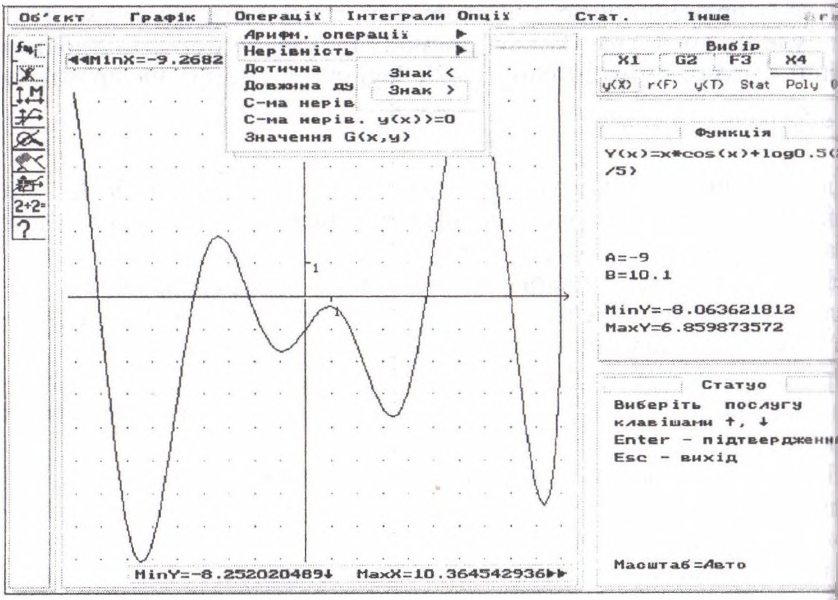


Рис. 1.85

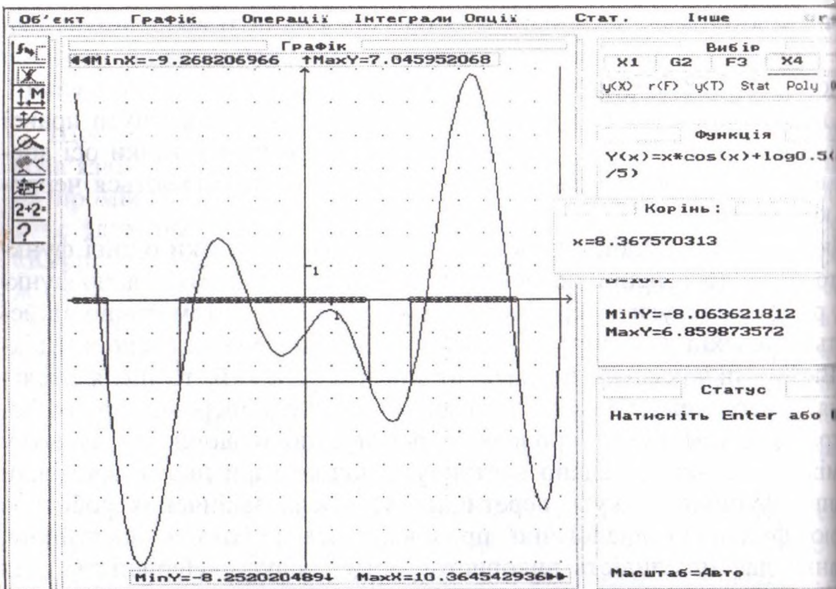


Рис. 1.86

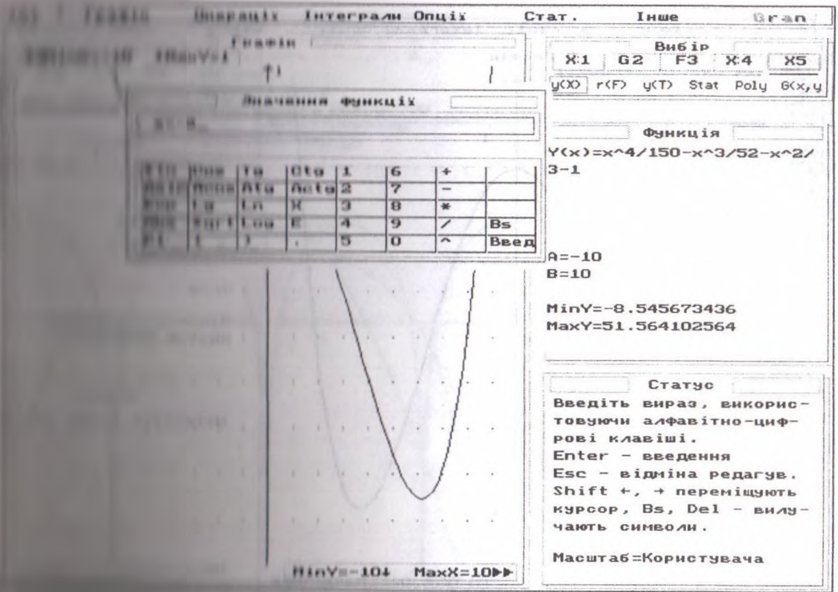


Рис. 1.87

Приклад

Розв'язати нерівність $\frac{x^4}{150}-\frac{x^3}{52}-\frac{x^2}{3}-1>-2$.

Побудувавши графік функції $y=\frac{x^4}{150}-\frac{x^3}{52}-\frac{x^2}{3}-1$ на проміжку [-10, 10], звернемось до підпункту «Нерівність» пункту «Операції». У переліку підпунктів «Знак <», «Знак >» вкажемо на підпункт «Знак >». Далі (після появи панелі калькулятора із написом «$a = 0$» на початку рядка введення та написом «Значення функції» над ним) введемо значення –2 (рис. 1.87). У результаті отримаємо зображення, подане на рис. 1.88. Звідки видно, що однією із частин (підмножин) множини розв'язків вказаної нерівності є множина]–∞, –5.41[. Після натиснення довільної клавіші процес побудови множини розв'язків розглядуваної нерівності продовжується. Повторивши останню операцію (натискання довільної клавіші) достатню кількість разів, у результаті отримаємо (рис. 1.89): розв'язком розглядуваної нерівності є множина]–∞, –5.41[∪]–1.92, 1.70[∪]8.51, +∞[.

Розв'язком системи нерівностей виду $f_1(x) \le 0$, $f_2(x) \le 0$, …, $f_m(x) \le 0$ є множина точок M, в яких задовольняються всі нерівності системи, тобто $M = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_m$, де M_i – множина розв'язків нерівності $f_i(x) \le 0$.

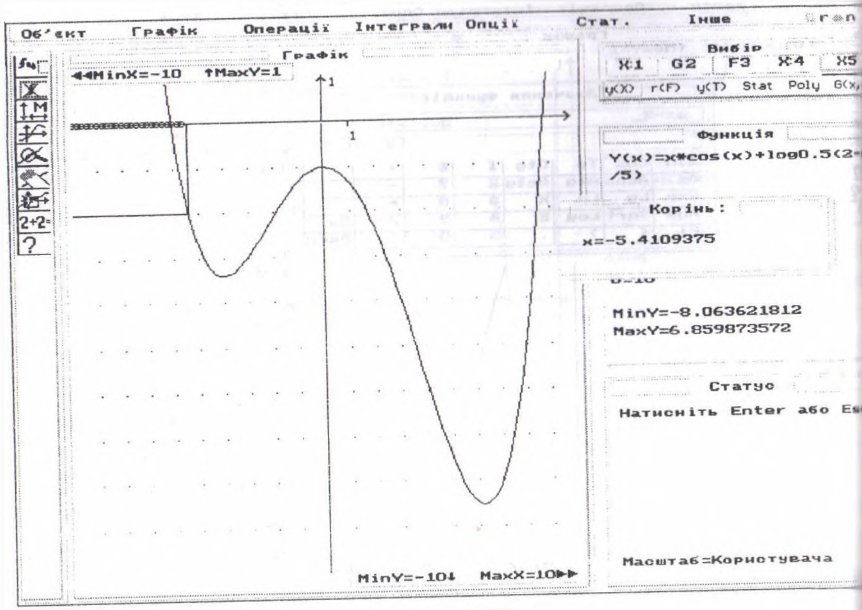


Рис. 1.88

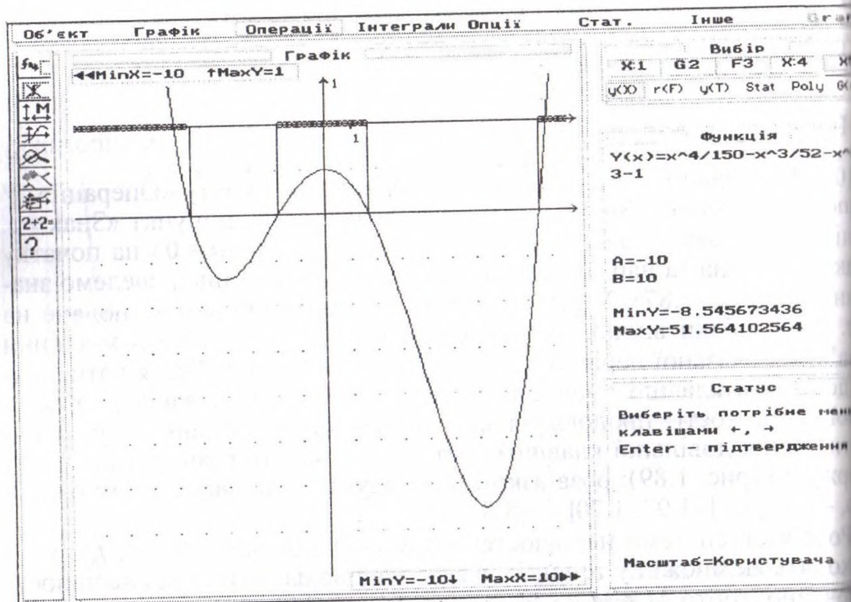


Рис. 1.89

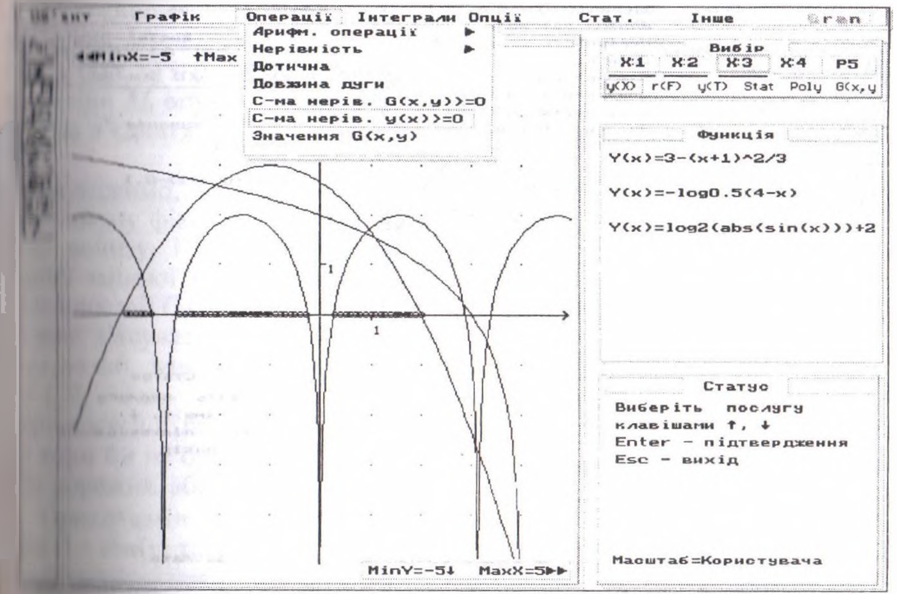


Рис. 1.90

Для розв'язання системи нерівностей вказаного виду в програмі GRAN1 передбачено послугу «С-ма нерів. $y(x) \geq 0$» в пункті «Операції». При зверненні до цієї послуги на осі Ox відмічаються (червоним кольором) точки, в яких задовольняються всі вказані нерівності одночасно. Графіки функцій (типу $y = y(x)$), для яких розглядається система нерівностей $y_i(x) \geq 0$, перед зверненням до послуги мають бути побудовані. Позначення функцій (типу $y = y(x)$), які визначають систему нерівностей, повинні бути відмічені (підкреслені) (рис. 1.90).

Нехай тепер потрібно знайти множину розв'язків системи нерівностей виду

$$\begin{cases} G_1(x, y) \leq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_m(x, y) \leq 0. \end{cases}$$

Ця задача значно складніша від попередньої. Проте в окремих досить багатьох випадках, зокрема в такому важливому, коли функції $G_i(x, y)$ є опуклими донизу, задача також може бути розв'язана графічно. При цьому можуть знадобитися додаткові обчислення і побудови, аналіз особливостей виразів $G_i(x, y)$ для з'ясування питань, що стосуються поставленої задачі, зокрема, питання про те, порожня чи ні множина розв'язків розглядуваної системи, тощо.

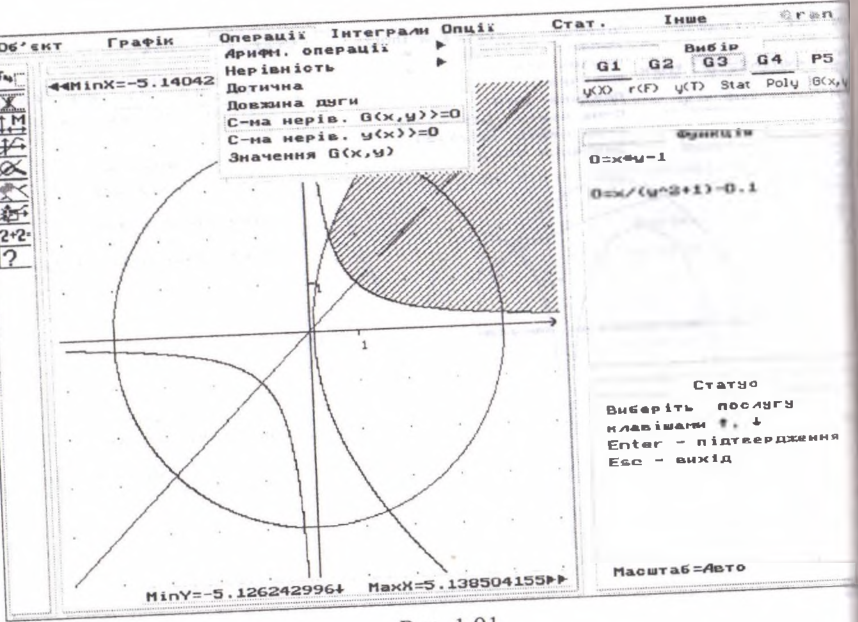


Рис. 1.91

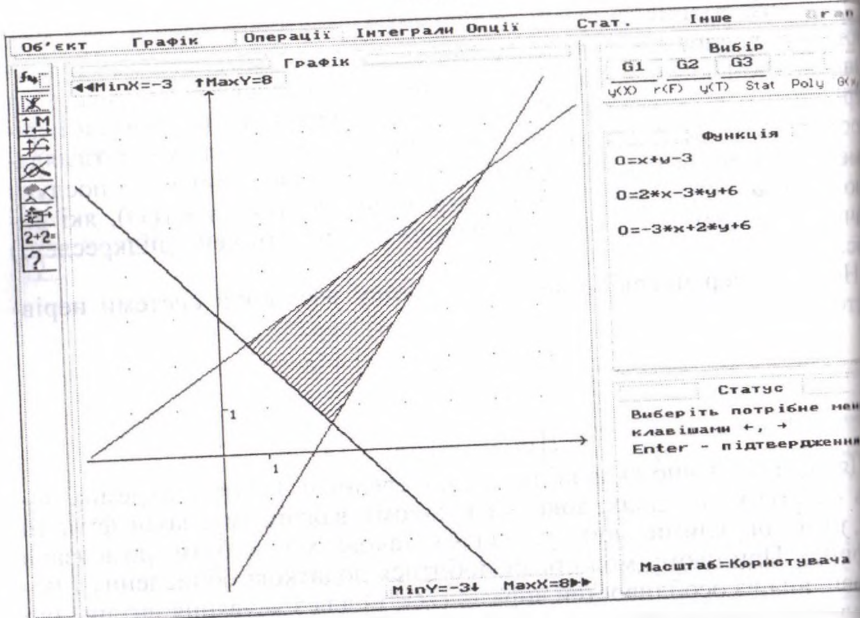


Рис. 1.92

Множиною розв'язків розглядуваної системи нерівностей буде множина $M = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_m$, де M_i – множина розв'язків нерівності $G_i(x, y) \le 0$. Зокрема, якщо функції $G_i(x, y)$ опуклі донизу, то і множини M_i опуклі, тобто такі, що будь-які дві точки із множини M_i можна з'єднати відрізком прямої, всі точки якого належать множині M_i.

Зауважимо, що функція $G(x, y)$ буде опуклою донизу, якщо при будь-якому фіксованому y_0 функція однієї змінної $G(x, y_0)$ буде опуклою донизу, і аналогічно, при будь-якому фіксованому x_0 функція однієї змінної $G(x_0, y)$ буде опуклою донизу. Побудувавши графіки залежностей $G_i(x, y) = 0$ та $G_i(x, y) = c$, де c досить мале додатне число, можна з'ясувати, в яких точках $G_i(x, y) > 0$, а також в яких точках $G_i(x, y) \le 0$. Множина точок, в яких одночасно $G_i(x, y) \le 0$ при всіх $i = 1, 2, \ldots, m$, є множиною розв'язків розглядуваної системи нерівностей. Слід зауважити, що якщо функція $G(x, y)$ опукла донизу, то яким би не було число c, множина розв'язків нерівності $G(x, y) \le c$ або порожня, або опукла.

Прикладами опуклих донизу функцій можуть бути $x^2 + y^2$, abs(x) + abs(y) та ін.

Додаткові побудови графіків залежностей $G_i(x, y) = c$ можуть бути виконані після з'ясування питань стосовно множини точок, в яких задовольняється нерівність $G_i(x, y) \le 0$, і не є обов'язковими, якщо питання легко з'ясувати без таких побудов.

Для розв'язання системи нерівностей виду $G_i(x, y) \ge 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, в програмі *GRAN1* передбачено послугу «С-ма нерів. $G(x, y) \ge 0$» у пункті «Операції». При зверненні до цієї послуги на площині xOy відмічається (заштриховується) множина точок, в яких всі задані нерівності задовольняються одночасно. Перед зверненням до послуги графіки залежностей $G_i(x, y) = 0$ мають бути побудовані. Позначення залежностей (типу $G(x, y) = 0$), які визначають функції $G_i(x, y)$ та систему нерівностей, повинні бути відмічені (підкреслені) (рис. 1.91).

Приклади

1. Знайти множину розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x + y - 3 \ge 0, \\ 2x - 3y + 6 \ge 0, \\ -3x + 2y + 6 \ge 0. \end{cases}$$

Побудувавши графіки залежностей $x + y - 3 = 0$, $2x - 3y + 6 = 0$, $-3x + 2y + 6 = 0$ та звернувшись до послуги «С-ма нерів. $G(x, y) \ge 0$», отримаємо – будь-яка точка заштрихованого на рис. 1.92 трикутника є розв'язком розглядуваної системи нерівностей.

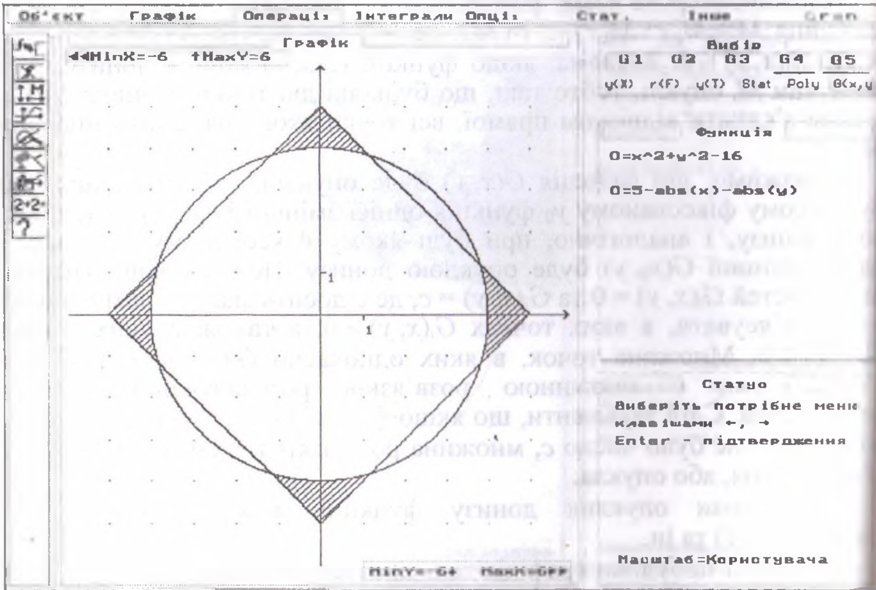


Рис. 1.93

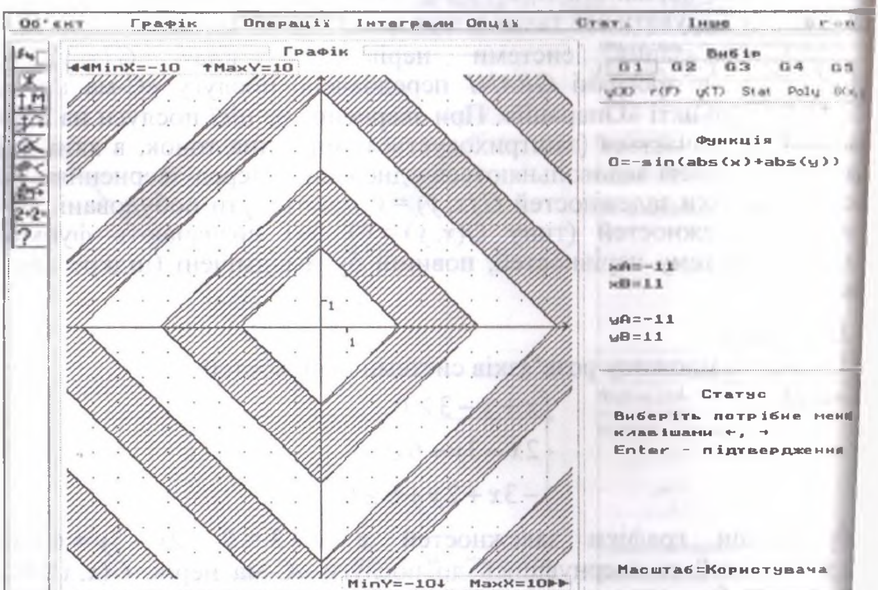


Рис. 1.94

2. Знайти множину розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x^2+y^2 \ge 16, \\ |x|+|y| \le 5. \end{cases}$

Побудувавши графіки залежностей $x^2 + y^2 - 16 = 0$, $5 - \mathrm{abs}(x) - \mathrm{abs}(y) = 0$ та звернувшись до послуги «С-ма нерів. $G(x, y) \ge 0$», одержимо – вказаній системі нерівностей задовольняють точки заштрихованої на рис. 1.93 множини.

3. Знайти множину розв'язків нерівності $\sin(\mathrm{abs}(x) + \mathrm{abs}(y)) \le 0$. Побудувавши графік залежності $0 = -\sin(\mathrm{abs}(x) + \mathrm{abs}(y))$ і звернувшись до послуги «С-ма нерів. $G(x, y) \ge 0$», одержимо: вказану нерівність задовольняють точки заштрихованої на рис. 1.94 множини.

Запитання для самоконтролю

1. Що називають розв'язком нерівності виду: $f(x) - a \le 0$? $f_1(x) \le f_2(x)$? $G(x, y) \le 0$?
2. Що називають розв'язком системи нерівностей виду: $f_1(x) \le 0$, $f_2(x) \le 0$, …, $f_m(x) \le 0$? $G_1(x, y) \le 0$, $G_2(x, y) \le 0$, …, $G_m(x, y) \le 0$?
3. Яку функцію виду $f(x)$ називають опуклою донизу?
4. Які властивості має множина ров'язків нерівності $f(x) \le c$, якщо функція $f(x)$ опукла донизу?
5. Як за допомогою програми *GRAN1* можна знайти розв'язок нерівності виду $f(x) \le 0$, де $f(x)$ – функція, визначена на проміжку $[a, b]$?
6. Яку функцію виду $G(x, y)$ називають опуклою донизу?
7. Чи може бути опуклою донизу функція $G(x, y)$, якщо множина розв'язків нерівності $G(x, y) \le 0$ порожня?
8. Чи буде опуклою донизу функція $G(x, y)$, якщо для деякої сталої c множина розв'язків нерівності $G(x, y) \le c$ опукла?
9. Як за допомогою програми *GRAN1* можна знайти розв'язок нерівності виду $G(x, y) \le 0$, де $G(x, y)$ – опукла донизу функція ?
10. Чи буде опуклою множина розв'язків системи нерівностей $G_1(x, y) \le c_1$, …, $G_m(x, y) \le c_m$, якщо ця множина непорожня, а функції $G_1(x, y)$, … , $G_m(x, y)$ опуклі донизу?

Вправи для самостійного виконання

1. Знайти множини розв'язків нерівностей:

а) $x^2 - 7x - 1 \le 3$; б) $\sin(x) \le 1/3$ при $x \in [-5, 5]$; в) $\sin(\cos(x)) \le \cos(\sin(x))$;

г) $\dfrac{1}{\log_{1/2}(x)} \ge -2$; д) $x^2 - 5x - 1 \le \cos(x)$; е) $|x| + |y| \le 5$; ж) $(x-1)^2 + (y-1)^2 \le 9$;

з) $\sin(\sin(xy) + \cos(xy)) \le 0$ при $x \in [-5, 5]$, $y \in [-5, 5]$.

2. Знайти множини розв'язків систем нерівностей:

а) $\begin{cases} x(1-x) \ge -3, \\ \log_{1/2}(x)\log_2(x) \ge -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2 \le 16, \\ \mathrm{abs}(x)+\mathrm{abs}(y) \le 5. \end{cases}$

3. Знайти множини розв'язків систем лінійних нерівностей:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 1 \le 0, \\ x_1 - x_2 - 4 \le 0, \\ -2x_1 + x_2 - 4 \le 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4 \le 0, \\ -x_1 - x_2 + 5 \le 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 8 \le 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 6 \le 0. \end{cases}$

§ 12. Відшукання найбільших і найменших значень функції на заданій множині точок

Для наближеного відшукання найбільшого і найменшого значе функції $f(x)$ на заданому проміжку $[a, b]$ за допомогою послуг прогр ми *GRAN1* досить побудувати графік залежності $y = f(x)$ при $x \in [a,$ і далі, скориставшись послугою «Координати» пункту «Графік», в значити координати найвищої і найнижчої точок на графіку $y = f($ $x \in [a, b]$.

При цьому немає потреби знаходити корені рівняння $f'(x) =$ аналізувати поведінку похідної $f'(x)$ чи другої похідної $f''(x)$ околі розв'язків рівняння $f'(x) = 0$ тощо. Зрештою слід зауважи що відомий алгоритм дослідження функції призначений в основно для того, щоб побудувати графік функції і з'ясувати її поведінку заданому проміжку $[a, b]$. І оскільки побудова графіка залежно $y = f(x)$ на проміжку $[a, b]$ не викликає труднощів, а за допомогою слуги «Координати» легко визначити всі характерні точки і особли сті графіка (точки перетину графіка з осями, найвищу і найнижчу т ки на графіку, проміжки спадання і зростання функції $f(x)$, промі опуклості донизу і догори тощо), то виконання всіх пунктів дос громіздкого алгоритму дослідження функції не завжди виявляєт необхідним.

Приклади

1. Знайти найбільше значення функції $f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{x^2}{7} + \cos(5$ на проміжку $[-5, 5]$, а також значення аргумента x, при якому дося ться найбільше значення даної функції $f(x)$.

Побудувавши графік залежності $y = f(x)$ та встановивши курс найвищу точку на графіку, одержимо $x \approx 1.27$, $y \approx 1.85$ (рис. 1. Крім того, у вікні «Функція» завжди подається найбільше і найм значення функції $y = f(x)$ на заданому проміжку (див. рис. 1.95).

Зауважимо, що відшукання розв'язку цієї задачі класичними ан тичними методами є досить трудомістким.

2. Із прямокутного листа жерсті розмірами 4×5 дециметрів п бно виготовити коробку (без кришки) найбільшого об'єму. Яким цей об'єм?

Позначимо через x висоту коробки, $x \in [0, 2]$. Тоді її об'єм дорі ватиме $(4 - 2x)(5 - 2x)x$.

Побудувавши графік залежності $y = (4 - 2x)(5 - 2x)x$ на пром $[0, 2]$ і визначивши координати найвищої точки на графіку, одер

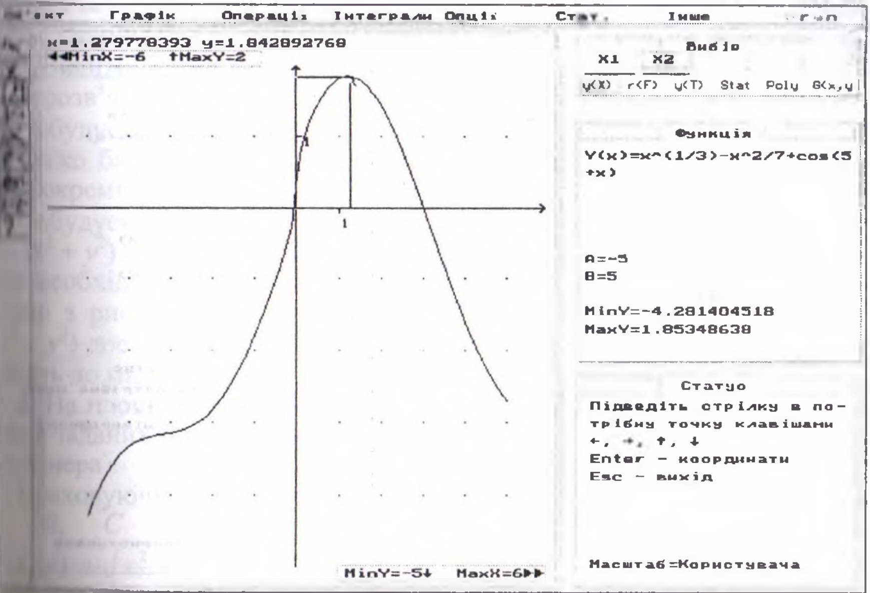


Рис. 1.95

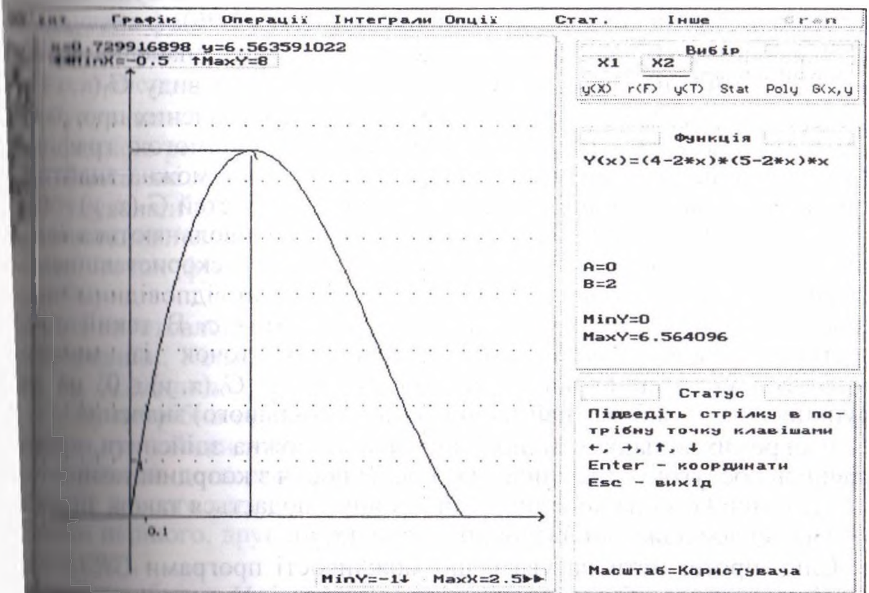


Рис. 1.96

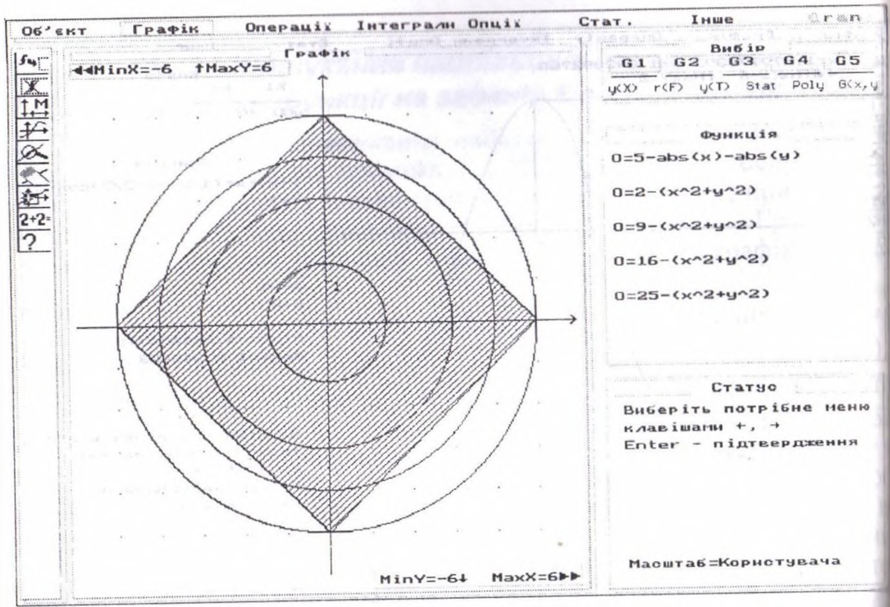


Рис. 1.97

$x \approx 0.73$, $y \approx 6.56$. Таким чином об'єм коробки $V \approx 6.56$ буде найбіл-шим, якщо висота коробки буде рівною 0.73 (рис. 1.96).

Якщо потрібно знайти найбільше або найменше значення функц $G(x, y)$ на множині розв'язків системи нерівностей виду $G_1(x, y) \le$ …, $G_m(x, y) \le 0$, тоді (в межах можливостей, передбачених програмо *GRAN1*) наближений розв'язок такої задачі за допомогою графічн побудов з використанням послуг програми *GRAN1* можна знайти т ким чином. Спочатку побудувати графіки залежностей $G_1(x, y) = 0$, $G_m(x, y) = 0$ і з'ясувати, в якій множині точок задовольняються всі н рівності одночасно, або ж визначити цю множину, скориставшись п слугою «С-ма нерів. $G(x, y) \ge 0$». Далі, добираючи відповідним чин константу c, будуємо графік залежності $G(x, y) = c$. В такий спос поступово можна встановити підмножину точок із множи розв'язків системи нерівностей $G_1(x, y) \le 0$, …, $G_m(x, y) \le 0$, на як функція $G(x, y)$ набуває найменшого (чи найбільшого) значення.

В окремих випадках відповідний аналіз можна здійснити, скор тавшись послугою «Значення $G(x, y)$», де поруч з координатами $x =$, $y =$ … точки (x, y) на координатній площині подається також значен $z = G(x, y)$ досліджуваної функції у точці (x, y).

Слід, проте, мати на увазі, що можливості програми *GRAN1* д розв'язування подібних задач досить обмежені. Ними можна скор татися для розв'язування досить простих задач розглядуваного ти

або для виконання допоміжних обчислень і побудов при розв'язуванні таких задач.

3. Знайти найменше значення функції $G(x, y) = 2 - (x^2 + y^2)$ на множині розв'язків нерівності $|x| + |y| \le 5$.

Побудуємо графік залежності abs(x) + abs(y) – 5 = 0.

Легко бачити, що будь-яка точка всередині одержаного квадрата буде окремим розв'язком даної нерівності.

Побудуємо далі графіки залежностей $2 - (x^2 + y^2) = 0$; $9 - (x^2 + y^2) = 0$; $16 - (x^2 + y^2) = 0$; $25 - (x^2 + y^2) = 0$ і т.п., вилучаючи при необхідності раніше побудовані графіки таких залежностей. Як видно з рис. 1.97, найменшого значення (рівного –23) функція $2 - (x^2 + y^2)$ досягає в чотирьох точках (5, 0), (0, 5), (–5, 0), (0, –5), які належать до множини розв'язків нерівності $|x| + |y| \le 5$.

4. На площині xOy знайти точку $M(x, y)$, сума віддалей від якої до трьох заданих точок $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(0, 5)$ була б найменшою (задача Штейнера).

Враховуючи, що залежність суми відстаней від точки M до точок A, B, C від координат x, y точки M має вигляд $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-5)^2} - c = 0$, для значень c, рівних 12, 10, 8.8, побудуємо графіки відповідних залежностей. Як видно з рис. 1.98 найменшого значення $z \approx 8.7$ розглядувана функція $d(x, y)$ досягає в точці $x \approx 0.96$, $y \approx 0.91$.

5. Знайти найменше значення функції $G(x, y) = 2x + 3y$ на множині розв'язків системи нерівностей $x + y \ge 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Побудувавши графік залежності $x + y - 1 = 0$, легко переконатися, що множиною розв'язків нерівності $x + y \ge 1$ є множина точок першого квадранта, які лежать над прямою, рівняння якої $x + y = 1$.

Побудувавши далі графіки залежностей $2x + 3y = 1$, $2x + 3y = 2$ і т.д., можна встановити, що найменшого значення, рівного 2, на вказаній множині точок функція $G(x, y) = 2x + 3y$ набуває в точці $x = 1$, $y = 0$ (рис. 1.99).

6. Для виготовлення продукції двох видів використовується чотири види сировини. Кількість сировини обмежена і становить відповідно b_1, b_2, b_3, b_4 одиниць. Для виготовлення однієї одиниці продукції першого виду потрібно a_{11} одиниць сировини першого виду, a_{21} одиниць сировини другого виду, a_{31} одиниць сировини третього виду і a_{41} одиниць сировини четвертого виду, а для виготовлення однієї одиниці продукції другого виду потрібно відповідно a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42} одиниць сировини першого, другого, третього і четвертого виду (при цьому всі $a_{ij} \ge 0$).

Нехай прибуток від реалізації однієї одиниці продукції першого виду становить p_1 одиниць, а другої – p_2 одиниць вартості. Потрібно

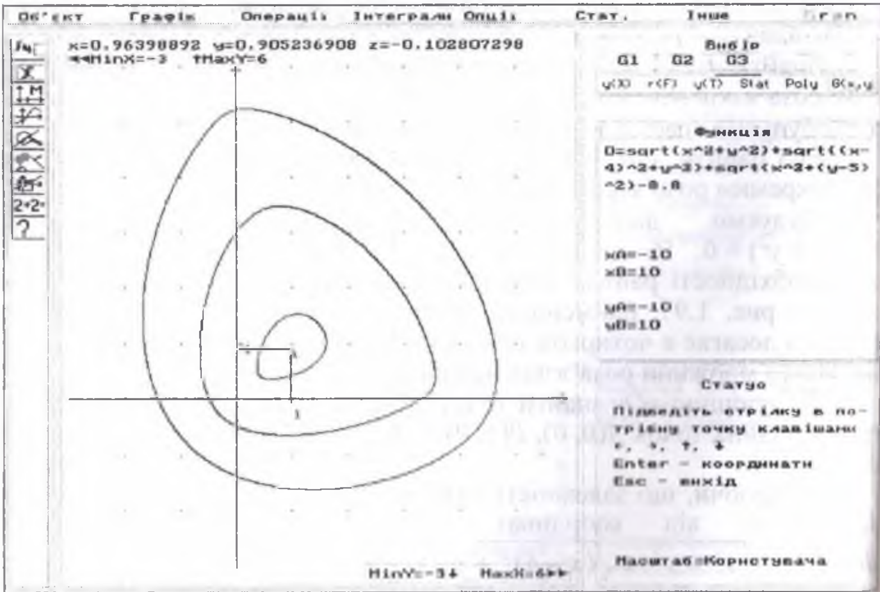


Рис. 1.98

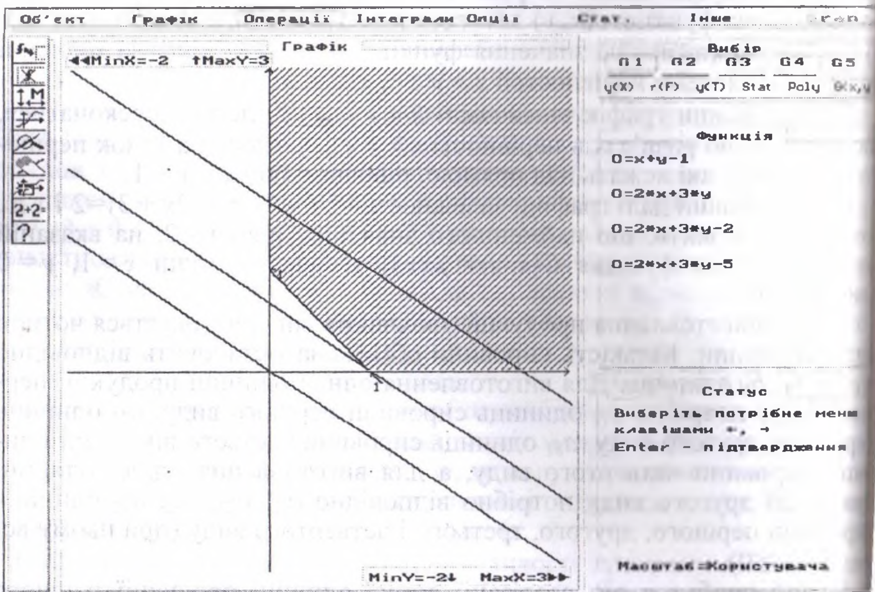


Рис. 1.99

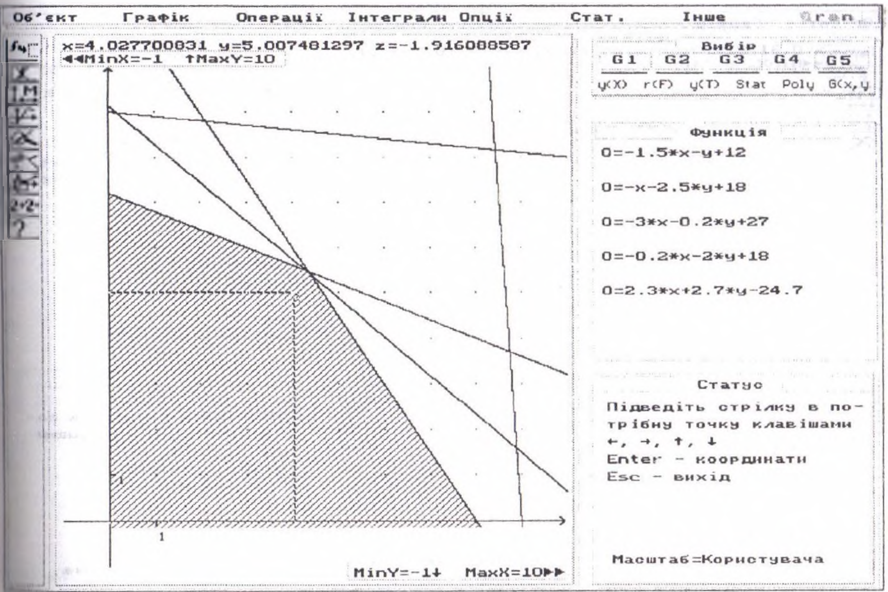


Рис. 1.100

виготовити по стільки одиниць продукції першого і другого видів, щоб за даних умов прибуток від їх реалізації був найбільшим. Іншими словами, програма випуску продукції при наявних обмеженнях повинна бути оптимальною.

Припустимо, що заплановано випустити x_1 одиниць продукції першого виду і x_2 одиниць продукції другого виду. Тоді витрати сировини будуть $a_{11}x_1 + a_{12}x_2$ – першого виду, $a_{21}x_1 + a_{22}x_2$ – другого виду, $a_{31}x_1 + a_{32}x_2$ – третього виду, $a_{41}x_1 + a_{42}x_2$ – четвертого виду. При цьому, очевидно, повинні виконуватись обмеження $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$, $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2$, $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3$, $a_{41}x_1 + a_{42}x_2 \le b_4$.

При такому плані випуску продукції буде одержано прибуток $z(x_1, x_2) = p_1x_1 + p_2x_2$, $(x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0)$. Потрібно в множині розв'язків вказаної системи нерівностей знайти таку точку (x_1, x_2), в якій функція $z(x_1, x_2)$ набуває найбільшого значення.

На рис. 1.100 подано розв'язок такої задачі при конкретних значеннях:

$a_{11} = 1.5$,	$a_{21} = 1$,	$a_{31} = 3$,	$a_{41} = 0.2$,
$a_{12} = 1$,	$a_{22} = 2.5$,	$a_{32} = 3$,	$a_{42} = 0.2$,
$b_1 = 12$,	$b_2 = 18$,	$b_3 = 27$,	$b_4 = 18$,
$p_1 = 2.3$,	p_2=2.7.		

Як видно з рис. 1.100, оптимальне значення 24.7 функції $z(x_1, x_2)$ досягається в точці $x_1 = 4.37$, $x_2 = 5.45$, яку називають оптимальним

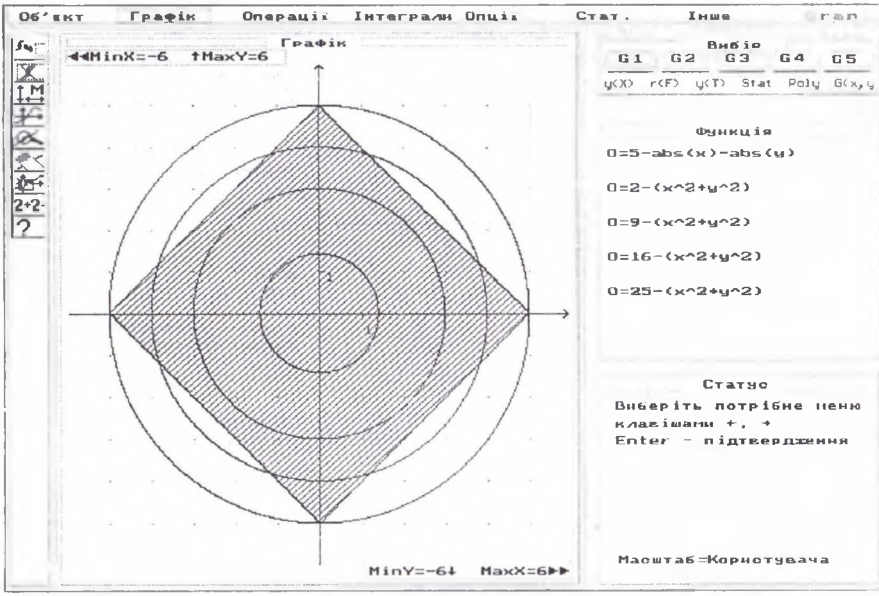


Рис. 1.97

$x \approx 0.73$, $y \approx 6.56$. Таким чином об'єм коробки $V \approx 6.56$ буде найбільшим, якщо висота коробки буде рівною 0.73 (рис. 1.96).

Якщо потрібно знайти найбільше або найменше значення функції $G(x, y)$ на множині розв'язків системи нерівностей виду $G_1(x, y) \leq 0$, ..., $G_m(x, y) \leq 0$, тоді (в межах можливостей, передбачених програмою *GRAN1*) наближений розв'язок такої задачі за допомогою графічних побудов з використанням послуг програми *GRAN1* можна знайти таким чином. Спочатку побудувати графіки залежностей $G_1(x, y) = 0$, ..., $G_m(x, y) = 0$ і з'ясувати, в якій множині точок задовольняються всі нерівності одночасно, або ж визначити цю множину, скориставшись послугою «С-ма нерів. $G(x, y) \geq 0$». Далі, добираючи відповідним чином константу c, будуємо графік залежності $G(x, y) = c$. В такий спосіб поступово можна встановити підмножину точок із множини розв'язків системи нерівностей $G_1(x, y) \leq 0$, ..., $G_m(x, y) \leq 0$, на якій функція $G(x, y)$ набуває найменшого (чи найбільшого) значення.

В окремих випадках відповідний аналіз можна здійснити, скориставшись послугою «Значення $G(x, y)$», де поруч з координатами $x = \ldots$, $y = \ldots$ точки (x, y) на координатній площині подається також значення $z = G(x, y)$ досліджуваної функції у точці (x, y).

Слід, проте, мати на увазі, що можливості програми *GRAN1* для розв'язування подібних задач досить обмежені. Ними можна скористатися для розв'язування досить простих задач розглядуваного типу

2. Знайти множину розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 16, \\ |x| + |y| \leq 5. \end{cases}$

Побудувавши графіки залежностей $x^2 + y^2 - 16 = 0$, $5 - \mathrm{abs}(x) - \mathrm{abs}(y) = 0$ та звернувшись до послуги «С-ма нерів. $G(x, y) \geq 0$», одержимо – вказаній системі нерівностей задовольняють точки заштрихованої на рис. 1.93 множини.

3. Знайти множину розв'язків нерівності $\sin(\mathrm{abs}(x) + \mathrm{abs}(y)) \leq 0$. Побудувавши графік залежності $0 = -\sin(\mathrm{abs}(x) + \mathrm{abs}(y))$ і звернувшись до послуги «С-ма нерів. $G(x, y) \geq 0$», одержимо: вказану нерівність задовольняють точки заштрихованої на рис. 1.94 множини.

Запитання для самоконтролю

1. Що називають розв`язком нерівності виду: $f(x) - a \leq 0$? $f_1(x) \leq f_2(x)$? $G(x, y) \leq 0$?
2. Що називають розв'язком системи нерівностей виду: $f_1(x) \leq 0$, $f_2(x) \leq 0$, …, $f_m(x) \leq 0$? $G_1(x, y) \leq 0$, $G_2(x, y) \leq 0$, …, $G_m(x, y) \leq 0$?
3. Яку функцію виду $f(x)$ називають опуклою донизу?
4. Які властивості має множина ров'язків нерівності $f(x) \leq c$, якщо функція $f(x)$ опукла донизу?
5. Як за допомогою програми *GRAN1* можна знайти розв'язок нерівності виду $f(x) \leq 0$, де $f(x)$ – функція, визначена на проміжку $[a, b]$?
6. Яку функцію виду $G(x, y)$ називають опуклою донизу?
7. Чи може бути опуклою донизу функція $G(x, y)$, якщо множина розв'язків нерівності $G(x, y) \leq 0$ порожня?
8. Чи буде опуклою донизу функція $G(x, y)$, якщо для деякої сталої c множина розв'язків нерівності $G(x, y) \leq c$ опукла?
9. Як за допомогою програми *GRAN1* можна знайти розв`язок нерівності виду $G(x, y) \leq 0$, де $G(x, y)$ – опукла донизу функція ?
10. Чи буде опуклою множина розв'язків системи нерівностей $G_1(x, y) \leq c_1$, …, $G_m(x, y) \leq c_m$, якщо ця множина непорожня, а функції $G_1(x, y)$, … , $G_m(x, y)$ опуклі донизу?

Вправи для самостійного виконання

1. Знайти множини розв`язків нерівностей:

а) $x^2 - 7x - 1 \leq 3$; **б)** $\sin(x) \leq 1/3$ при $x \in [-5, 5]$; **в)** $\sin(\cos(x)) \leq \cos(\sin(x))$; **г)** $\dfrac{1}{\log_{1/2}(x)} \geq -2$; **д)** $x^2 - 5x - 1 \leq \cos(x)$; **е)** $|x| + |y| \leq 5$; **ж)** $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 9$; **з)** $\sin(\sin(xy) + \cos(xy)) \leq 0$ при $x \in [-5, 5]$, $y \in [-5, 5]$.

2. Знайти множини розв'язків систем нерівностей:

а) $\begin{cases} x(1-x) \geq -3, \\ \log_{1/2}(x) \log_2(x) \geq -1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16, \\ \mathrm{abs}(x) + \mathrm{abs}(y) \leq 5. \end{cases}$

3. Знайти множини розв'язків систем лінійних нерівностей:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 1 \leq 0, \\ x_1 - x_2 - 4 \leq 0, \\ -2x_1 + x_2 - 4 \leq 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4 \leq 0, \\ -x_1 - x_2 + 5 \leq 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 8 \leq 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 6 \leq 0. \end{cases}$

§ 12. *Відшукання найбільших і найменших значень функції на заданій множині точок*

Для наближеного відшукання найбільшого і найменшого значень функції $f(x)$ на заданому проміжку $[a, b]$ за допомогою послуг програми *GRAN1* досить побудувати графік залежності $y = f(x)$ при $x \in [a, b]$ і далі, скориставшись послугою «Координати» пункту «Графік», визначити координати найвищої і найнижчої точок на графіку $y = f(x)$, $x \in [a, b]$.

При цьому немає потреби знаходити корені рівняння $f'(x) = 0$, аналізувати поведінку похідної $f'(x)$ чи другої похідної $f''(x)$ в околі розв'язків рівняння $f'(x) = 0$ тощо. Зрештою слід зауважити, що відомий алгоритм дослідження функції призначений в основному для того, щоб побудувати графік функції і з'ясувати її поведінку на заданому проміжку $[a, b]$. І оскільки побудова графіка залежності $y = f(x)$ на проміжку $[a, b]$ не викликає труднощів, а за допомогою послуги «Координати» легко визначити всі характерні точки і особливості графіка (точки перетину графіка з осями, найвищу і найнижчу точки на графіку, проміжки спадання і зростання функції $f(x)$, проміжки опуклості донизу і догори тощо), то виконання всіх пунктів досить громіздкого алгоритму дослідження функції не завжди виявляється необхідним.

Приклади

1. Знайти найбільше значення функції $f(x) = \sqrt[3]{x} - \dfrac{x^2}{7} + \cos(5 + x)$ на проміжку $[-5, 5]$, а також значення аргумента x, при якому досягається найбільше значення даної функції $f(x)$.

Побудувавши графік залежності $y = f(x)$ та встановивши курсор у найвищу точку на графіку, одержимо $x \approx 1.27$, $y \approx 1.85$ (рис. 1.95). Крім того, у вікні «Функція» завжди подається найбільше і найменше значення функції $y = f(x)$ на заданому проміжку (див. рис. 1.95).

Зауважимо, що відшукання розв'язку цієї задачі класичними аналітичними методами є досить трудомістким.

2. Із прямокутного листа жерсті розмірами 4×5 дециметрів потрібно виготовити коробку (без кришки) найбільшого об'єму. Яким буде цей об'єм?

Позначимо через x висоту коробки, $x \in [0, 2]$. Тоді її об'єм дорівнюватиме $(4 - 2x)(5 - 2x)x$.

Побудувавши графік залежності $y = (4 - 2x)(5 - 2x)x$ на проміжку $[0, 2]$ і визначивши координати найвищої точки на графіку, одержимо

значення аргумента функції $\sin(x)$ знаходитимуться в межах $[-0.2; 0.2]$.

Запитання для самоконтролю

1. Як за допомогою послуг програми *GRAN1* побудувати дотичну до графіка функції $y = f(x)$ в заданій точці $(x_0, f(x_0))$?
2. Як за допомогою послуг програми *GRAN1* визначити кутовий коефіцієнт прямої, що проходить через точки $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$?
3. Як за допомогою графічних побудов на графіку $y = f(x)$ можна визначити точку, в якій дотична до графіка паралельна до хорди, що проходить через точки $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ (в припущенні, що в будь-якій точці проміжку $[x_1, x_2]$ функція $f(x)$ диференційовна)?
4. Чи може дотична (якщо вона існує) до графіка опуклої донизу функції перетинати графік такої функції в деякій точці, відмінній від точки дотику?
5. Нехай $f(x)$ опукла донизу функція, визначена на проміжку $[a, b]$, $y = f_1(x) = kx + b$ – рівняння деякої прямої, яка має з графіком залежності $y = f(x)$ не більше однієї спільної точки. Чи може бути $f(x_0) < f_1(x_0)$ принаймні при одному $x_0 \in [a, b]$?

Вправи для самостійного виконання

1. При яких значеннях аргумента x значення функції $\cos(x)$ можна замінити значенням функції $1 - x^2$ з похибкою не вищою, ніж 0.01?
2. Знайти рівняння дотичної до графіка функції $y = \log_2(x) - \cos(x/20)$ в точці, абсциса якої $x_0 = 5$.
3. Знайти рівняння прямої, що проходить через точки $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, де $f(x) = 2^x + \dfrac{1}{7}\sin(x/23)$, $x_1 = 1.5$, $x_2 = 7.5$.
4. Знайти рівняння прямої, що проходить через точки $(2, f(2))$, $(4, f(4))$, де $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$.
5. Визначити, при яких x значення $\sin(x)$ можна замінити значенням x з похибкою, не більшою ніж 0.1; 0.01; 0.00001.
6. Визначити, при яких x значення $\cos(x)$ можна замінити значенням $1 - \dfrac{x^2}{2}$ з похибкою, не більшою ніж 0.00001; 0.0001; 0.001; 0.01; 0.1.

§ 14. *Обчислення визначених інтегралів*

Для обчислення визначених інтегралів виду $\int_a^b f(x)dx$ можна скористатись послугою «Інтеграл» пункту «Інтеграли».

Підпункт «Інтеграл» призначено для обчислення визначених інтегралів для функцій, поданих явно у вигляді $y = f(x)$, а також таблично (тип *Poly*) та статистично (гістограм) (тип *Stat*). Інтеграл обчислюється для функції, позначення якої у вікні «Вибір» підкреслено. Якщо таких позначень немає, тоді інтеграл обчислюється для функції, на позначення якої встановлено вказівник у вікні «Вибір». Якщо підкреслено позначення кількох функцій, то значення інтегралів, знайдені для кожної функції, додаються. Останнє дає можливість обчислювати інтеграли для функцій, заданих різними виразами на різних відрізках.

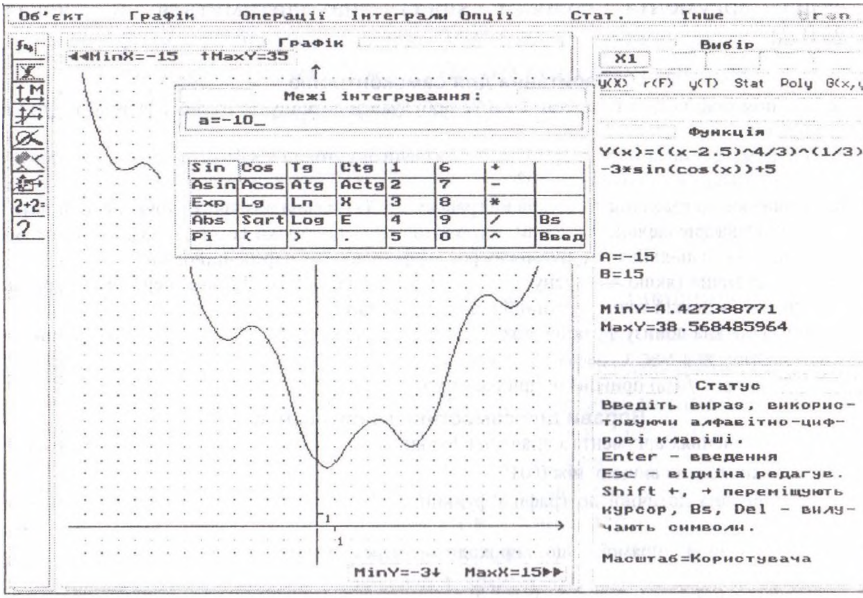


Рис. 1.110

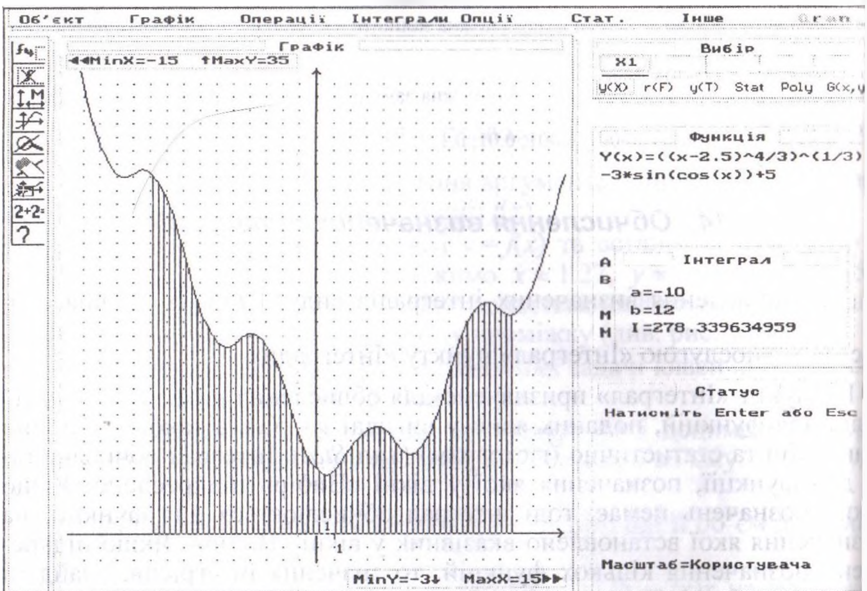


Рис. 1.111

Після звернення до послуги «Інтеграл» у вікні «Графік» з'являється запит «Межі інтегрування», у відповідь на який слід ввести значення a лівої межі інтегрування та значення b правої межі інтегрування (рис. 1.110).

Після виконання послуги у вікні «Функція» з'являється додаткове вікно «Інтеграл», в якому подаються вказані раніше межі інтегрування a та b, а також знайдене значення визначеного інтеграла I.

Якщо при цьому у вікні «Графік» було зображено графік функції, інтеграл від якої обчислюється, то область, що обмежена графіком функції, віссю Ox та прямими $x = a$, $x = b$, заштриховується (рис. 1.111).

Приклади

1. Нехай потрібно обчислити площу, обмежену лініями $x = -3$, $x = 3$, $y = 0$, $y = \log_2(x+3.7) + \frac{1}{3}\sin(2x^2) + 2$, тобто визначений інтеграл $I = \int_{-3}^{3}(\log_2(x+3.7) + \frac{1}{3}\sin(2x^2) + 2)dx.$

Побудувавши графік функції $y = \log_2(x+3.7) + \frac{1}{3}\sin(2x^2) + 2$ на проміжку [-5, 5], звернемось до послуги «Інтеграл» пункту «Інтеграли» і у відповідь на відповідні запити введемо ліву межу інтегрування $a = -3$ та праву межу інтегрування $b = 3$. В результаті отримаємо $I \approx 22.4$ (рис. 1.112).

Зауважимо, що точно розглянутий інтеграл обчислити неможливо, оскільки не існує в скінченних виразах первісної до даної підінтегральної функції, а тому в будь-якому разі для обчислення подібних інтегралів доводиться застосовувати ті чи інші наближені методи.

Підпункт «Площа» пункту «Інтеграли» призначено для обчислення площі між графіками двох функцій, заданих у вигляді $y = f(x)$, в межах від $x = a$ до $x = b$, які вводяться аналогічно до попереднього. Позначення обох функцій у вікні «Вибір» при цьому мають бути підкресленими. Якщо зображення графіків функцій подано у вікні «Графік», то площа між ними заштриховується.

2. Нехай потрібно обчислити площу між графіками функцій $y = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}\cos(5x) + 1$ та $y = \log_2(x+3.7) + \frac{1}{3}\sin(2x^2) + 2$.

Побудувавши графіки функцій, знайдемо абсциси точок їх перетину $x_1 = -2.25$; $x_2 = 3.78$. Звернувшись далі до послуги «Площа» пункту «Інтеграли», введемо аналогічно до попереднього межі інтегрування $a = -2.25$, $b = 3.78$. В результаті одержимо значення інтеграла (рис. 1.113):

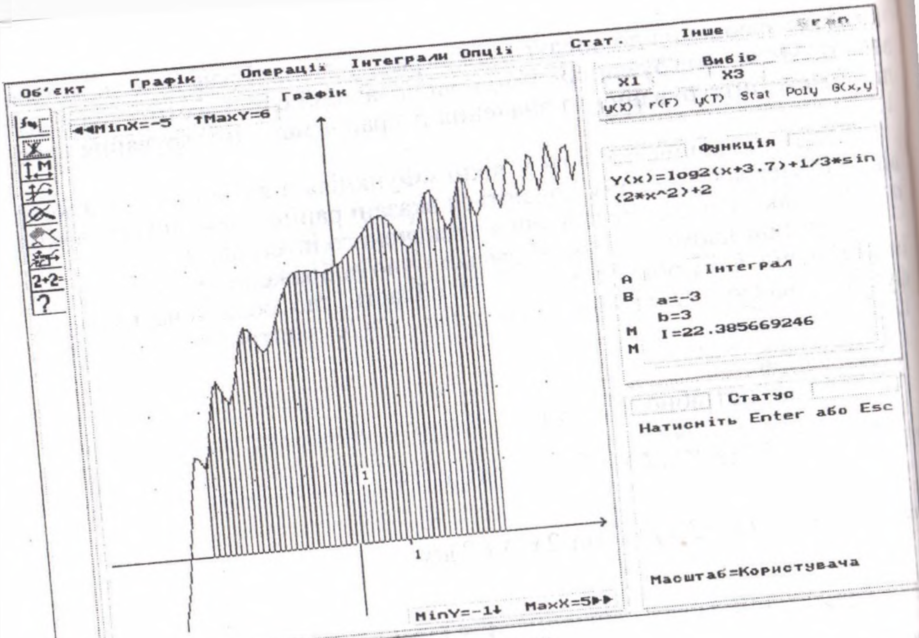


Рис. 1.112

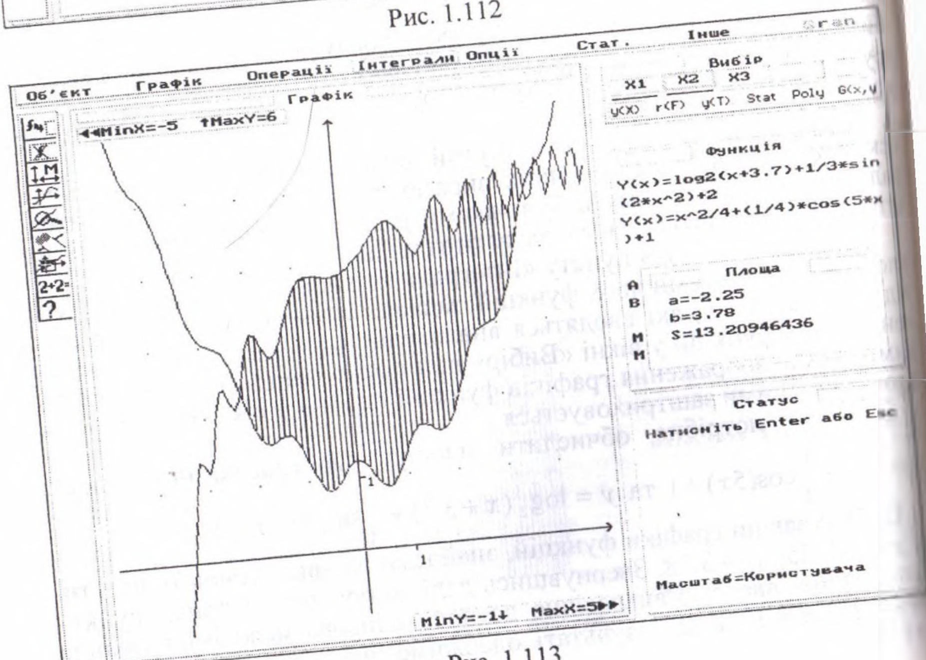


Рис. 1.113

$$I = \int_{-2.25}^{3.78} \left(\left((\log_2 (x + 3.7) + \frac{1}{3} \sin(2x^2) + 2 \right) - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} \cos(5x) + 1 \right) \right) dx \approx 13.2.$$

3. Обчислити $\int_{-3}^{4} f(x)dx$, де $f(x) = \begin{cases} 2/|x| \text{ при } x \le -2, \\ 3 - |x| \text{ при } -2 \le x \le 1, \\ 2 + \log_2(x) \text{ при } 1 \le x. \end{cases}$

Побудуємо графік заданої функції на проміжку [–4, 5] (на проміжку [–4, –2] – графік функції 2/abs(x), на проміжку [–2, 1] – 3–abs(x), на проміжку [1, 5] – 2 + $\log_2(x)$) і звернемось до послуги «Інтеграл» пункту «Інтеграли». Ввівши межі інтегрування $a = -3$, $b = 4$, в результаті одержимо значення інтеграла (рис. 1.114):

$$I = \int_{-3}^{4} f(x)dx = \int_{-3}^{-2} (2/|x|)dx + \int_{-2}^{1} (3-|x|)dx + \int_{1}^{4} (2 + \log_2(x))dx \approx 17.01.$$

Слід мати на увазі, що підінтегральні функції при використанні послуг «Інтеграл» і «Площа» повинні бути обмежені. Для наближеного обчислення невласних інтегралів виду $\int_{a}^{b} f(x)dx$, де функція $f(x)$ на проміжку $[a, b]$ має точку розриву (другого роду) таку, що при $x \to x_0$

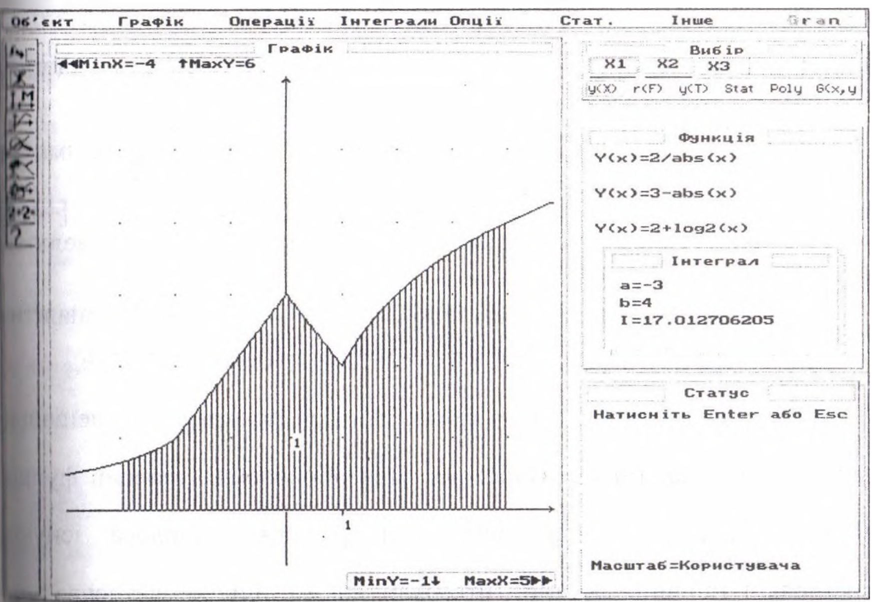


Рис. 1.114

$f(x) \to \infty$ (чи $f(x) \to -\infty$), можна скористатися послугами програми, обчислюючи інтеграли $\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)dx$ та $\int_{x_0-\varepsilon}^b f(x)dx$, де $\varepsilon > 0$ досить мале. Якщо інтеграл збіжний, то при поступовому зменшенні ε одержувані значення все менше і менше відрізнятимуться між собою і після отримання певної кількості стабільних цифр можна буде припинити обчислення. Тут, проте, може знадобитись додатковий аналіз стосовно збіжності інтеграла тощо.

Аналогічно для наближеного обчислення невласних інтегралів виду $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ можна обчислювати $\int_{-A}^{A} f(x)dx$, поступово збільшуючи A до стабілізації певної кількості цифр (якщо така настане). Тут також можуть знадобитись додаткові аналітичні дослідження стосовно збіжності інтеграла тощо.

4. Обчислити наближено інтеграл $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$.

Побудувавши графік функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ на проміжку $[-6, 6]$ (рис. 1.115), обчислимо інтеграли $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, $\int_{-2}^{2} f(x)dx$, $\int_{-3}^{3} f(x)dx$, $\int_{-4}^{4} f(x)dx$, $\int_{-5}^{5} f(x)dx$, $\int_{-6}^{6} f(x)dx$ і т.д. В результаті отримаємо, що для даної функції інтеграли на проміжках $[-3, 3]$, $[-4, 4]$, $[-5, 5]$ і т.д. практично не відрізняються між собою і з досить великою точністю дорівнюють 1.

Цей результат спеціальними прийомами можна вивести і аналітично (хоч для функції $e^{-x^2/2}$ первісної в точних виразах не існує).

Можна показати, що $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$. Цей інтеграл має спеціальну назву – інтеграл Ейлера-Пуассона. Для обчислення значень функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2} dx$, яку називають функцією Лапласа, існують спеціальні таблиці. Останні інтеграли мають широкі застосування в теорії ймовірностей та математичній статистиці.

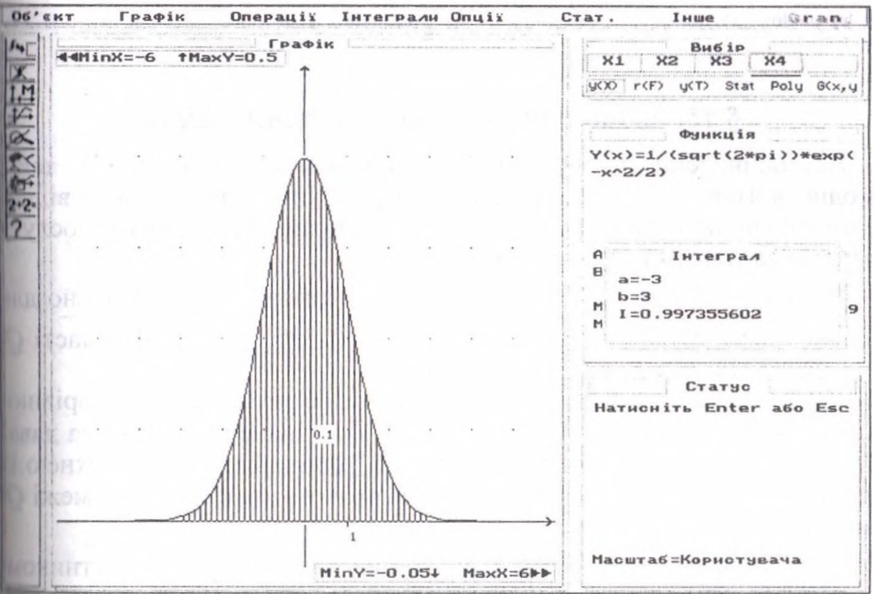


Рис. 1.115

Запитання для самоконтролю

1. Як з використанням послуг програми *GRAN1* можна знайти наближене значення визначеного інтеграла виду $\int_a^b f(x)dx$?
2. Яке значення за послугою «Інтеграл» програми *GRAN1* буде обчислено, якщо у вікні «Вибір» підкреслено позначення кількох функцій?
3. Чи обов'язково будувати графік функції $y = f(x)$ перед тим, як обчислювати $\int_a^b f(x)dx$ з використанням послуги «Інтеграл»?
4. Які графічні побудови додатково виконуються за програмою *GRAN1*, якщо перед зверненням до послуги «Інтеграл» побудовано графік функції $y = f(x)$?

Вправи для самостійного виконання

1. Скориставшись послугою «Інтеграл» програми *GRAN1*, обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^5 xdx$; б) $\int_0^4 x^2dx$; в) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)dx$; г) $\int_{-1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$; д) $\int_{0.1}^{7.2} \log_2 \sqrt{x^3/7+x+3}dx$;

е) $\int_{-3}^{3} (2+\cos(x^2)+\log_2(2|x|+|\sin(x)|+3))dx$.

2. Обчислити площу, обмежену лініями:

а) $y = x^2, y = x/2+5$; б) $y = 7-x^2, y = 0$; в) $y = \frac{1}{x},\ y = 5-x$;

г) $y=\log_2(x),\ y=x-7+\frac{1}{10}\sin\left(\frac{\sqrt{|x|}}{100}\right)$; д) $y=2+\sin(x^2),\ y=5-x^2$.

§ 15. Обчислення площ довільних фігур

Для обчислення площ довільних областей як однозв'язних, так і неоднозв'язних, обмежених лініями з будь-яким типом задання відповідних функціональних залежностей, зручно використовувати послугу «Площа за точками» пункту «Інтеграли».

Підпункт «Площа за точками» пункту «Інтеграли» призначено для обчислення подвійного інтеграла $\iint\limits_{Q} G(x,y)dxdy$ по деякій області Q. Якщо при цьому $G(x, y) = 1$, то значення інтеграла чисельно дорівнюватиме площі області Q. Якщо $G(x, y) \neq 1$, то значення інтеграла даватиме об'єм, обмежений поверхнею $z = 0$, циліндричною поверхнею із твірною, паралельною осі Oz та направляючою лінією вздовж межі Q, і поверхнею $z = G(x, y)$.

Щоб вказати деяку область Q, її слід обмежити прямокутником, який встановлюється цілком аналогічно до того, як це робиться при використанні послуги «Збільшити» пункту «Графік». При цьому множина точок всередині прямокутника може виявитись поділеною на кілька частин лініями, що є зображеннями осей координат, сторін вказаного прямокутника, графіків функцій тощо. Спосіб задання функцій при цьому несуттєвий.

Після встановлення вказаного прямокутника в його верхньому лівому куті з'являється курсор (у вигляді маленької стрілочки). Цей курсор (або курсор «мишки») необхідно перевести у внутрішню точку області, яка аналізується, і натиснути клавішу *Enter* (чи ліву клавішу «мишки»). При цьому вибрана область зафарбовується в білий колір. Якщо область складається з кількох частин, то вказаним чином слід відмітити кожну з них. Далі слід вивести курсор за межі прямокутника і натиснути клавішу *Enter* або клавішу *Esc*, після чого у вікні «Графік» з'являється панель калькулятора, напис «Введіть вираз» та $G(x, y) = 1$ на початку рядка введення, причому курсор встановлено в першій позиції, з якої розпочнеться введення символів виразу. Введення виразу здійснюється за тими ж правилами, що і раніше (з клавіатури чи з панелі калькулятора з використанням «мишки» чи клавіатури). Якщо ніякий вираз не вказується і одразу натискується клавіша *Enter* (чи ліва клавіша «мишки»), $G(x, y)$ покладається рівним 1 при будь яких x і y.

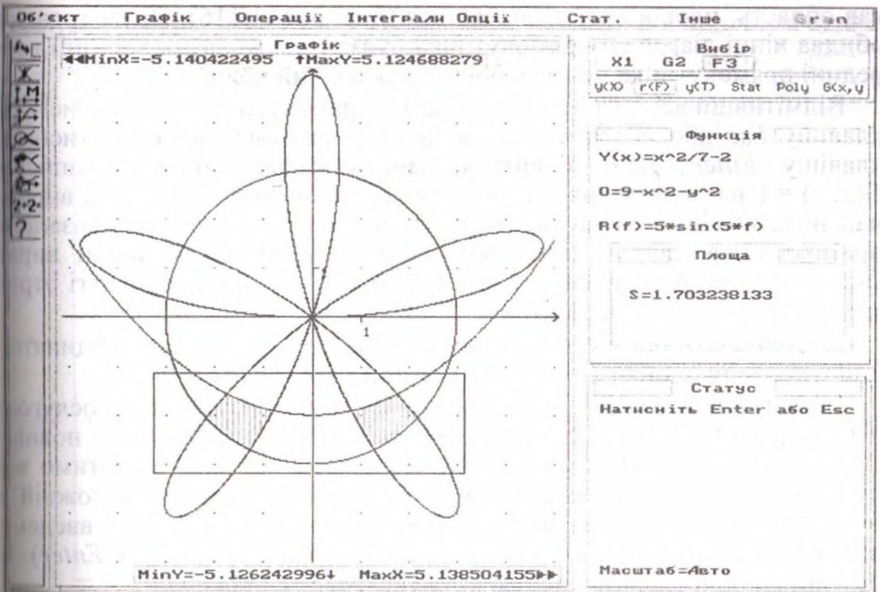


Рис. 1.116

Після того, як $G(x, y)$ введено ($G(x, y) = 1$ чи $G(x, y) \neq 1$), обчислюється $\iint\limits_{Q} G(x,y)dxdy$, значення якого подається у додатковому вікні з написом «Площа», що з'являється на полі вікна «Функція».

При необхідності обчислити суму площ кількох областей чи суму інтегралів від $G(x, y)$ по кількох областях, що входять в один і той самий прямокутник, їх необхідно відмітити, встановивши по черзі курсор в кожну з них і натиснувши клавішу *Enter* (чи ліву клавішу «мишки»). Якщо область всередині прямокутника не поділено деякими лініями на деякі підобласті, то обчислюватиметься площа прямокутника при $G(x, y) = 1$ або об'єм над прямокутником під поверхнею $z = G(x, y)$, тобто об'єм, обмежений поверхнею $z = G(x, y)$ та площинами $z = 0$, $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, де a, b та c, d відповідно нижні і верхні межі змінних x та y у вказаному прямокутнику.

Приклади

1. Обчислити площу, обмежену лініями, рівняння яких:

$y = \frac{x^2}{7} - 2$, $0 = 9 - x^2 - y^2$, $r = 5\sin(5f)$, відмічену на рис. 1.116.

Побудувавши графіки вказаних ліній, звернемось до послуги «Площа за точками» пункту «Інтеграли», встановимо курсор в кінцях діагоналі прямокутника так, щоб цей прямокутник повністю охоплював область, площа якої визначається (див. рис. 1.116). Після того, як обидва кінці діагоналі прямокутника будуть зафіксовані, всі лінії всередині прямокутника перефарбовуються в сірий колір.

Відмітивши всі потрібні підобласті в прямокутнику, слід натиснути клавішу *Esc* або вивести курсор за межі прямокутника і натиснути клавішу *Enter*. Далі з'явиться панель калькулятора з написом $G(x, y) = 1$ на початку рядка введення і запрошенням «Введіть вираз» над ним. Оскільки обчислюється площа деякої підобласті вказаного прямокутника, досить натиснути клавішу *Enter*, залишивши вираз $G(x, y) = 1$ без змін (рівним 1 при будь-яких x, y). В результаті отримаємо $S \approx 1.7$ (див. рис. 1.116).

2. Обчислити площу, обмежену лінією, що в полярних координатах описується рівнянням $r = 4\sin(7f)$ (семипелюсткова троянда).

Побудувавши графік лінії $r = 4\sin(7f)$ та скориставшись послугою «Площа за точками», доберемо прямокутник так, щоб в ньому повністю вміщався побудований графік, після чого по черзі відмітимо всі пелюстки троянди (встановивши і зафіксувавши курсор в кожній з них). Вивівши за межі прямокутника і зафіксувавши курсор, введемо вираз $G(x, y)$, рівний 1 (для чого досить натиснути клавішу *Enter*). В результаті обчислень знаходимо $S \approx 12.5$ (рис. 1.117).

3. Обчислити площу, обмежену лініями, що в полярних координатах описуються рівняннями: $r = 5 + \sin(9f)$, $r = 5$, $r = 3 + \cos(\sin(9f))$ (рис. 1.118).

Побудувавши графіки вказаних ліній та скориставшись послугою «Площа за точками», заключимо у відповідний прямокутник область, площа якої визначається, і відмітимо по черзі частини вказаної області, що розташовуються у різних координатних чвертях. Вивівши за межі прямокутника і зафіксувавши курсор, вказавши далі $G(x, y) = 1$, одержимо $S \approx 24.9$ (див. рис. 1.118).

4. Обчислити площу, обмежену лініями $y = |x^2 - 3|$, $y = 0$, $x = -3$, $x = 3$. Побудувавши графік лінії $y = |x^2 - 3|$ і скориставшись послугою «Площа за точками», встановимо прямокутник так, щоб абсциси x точок на лівій його стороні дорівнювали $a = -3$, а на правій $b = 3$, відмітимо всередині прямокутника підобласті, які входять до області, площа якої визначається (рис. 1.119). Вивівши за межі прямокутника і зафіксувавши курсор, та поклавши $G(x, y) = 1$, одержимо $S \approx 14$ (див. рис. 1.119).

Оскільки в геометричній інтерпретації інтеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ є площа фігури, обмеженої лініями, що описуються рівняннями $y = |f(x)|$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, щойно розглянуту задачу можна було б розв'язати і з використанням послуги «Інтеграл» пункту «Операції», обчислюючи

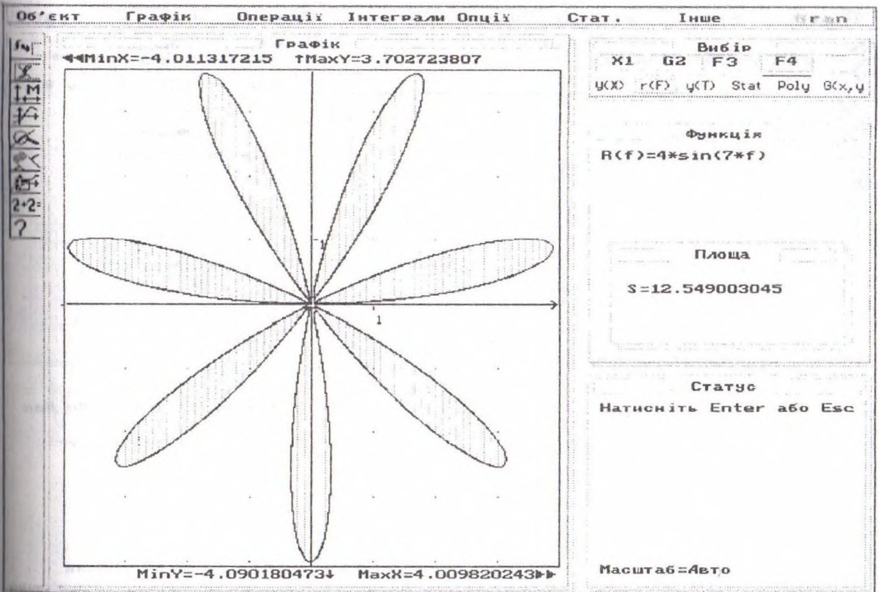


Рис. 1.117

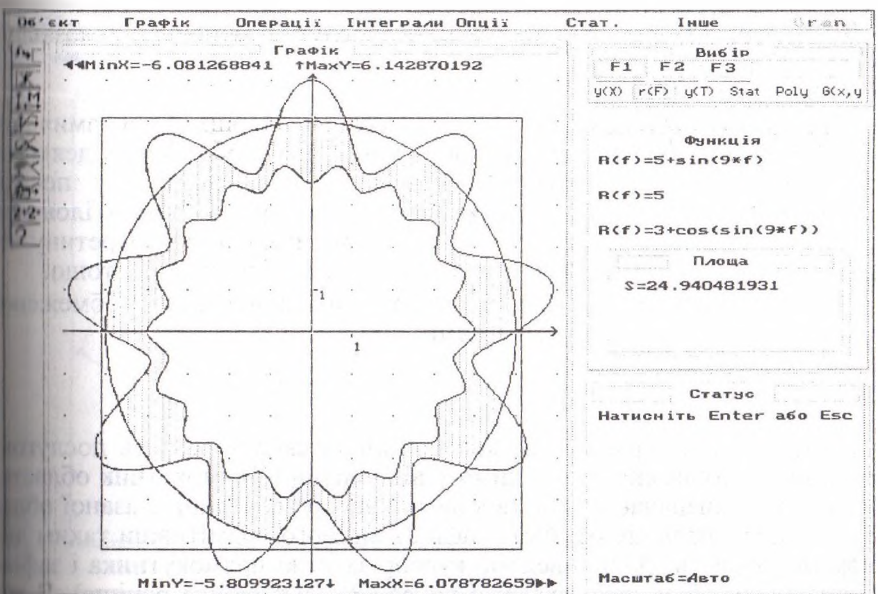


Рис. 1.118

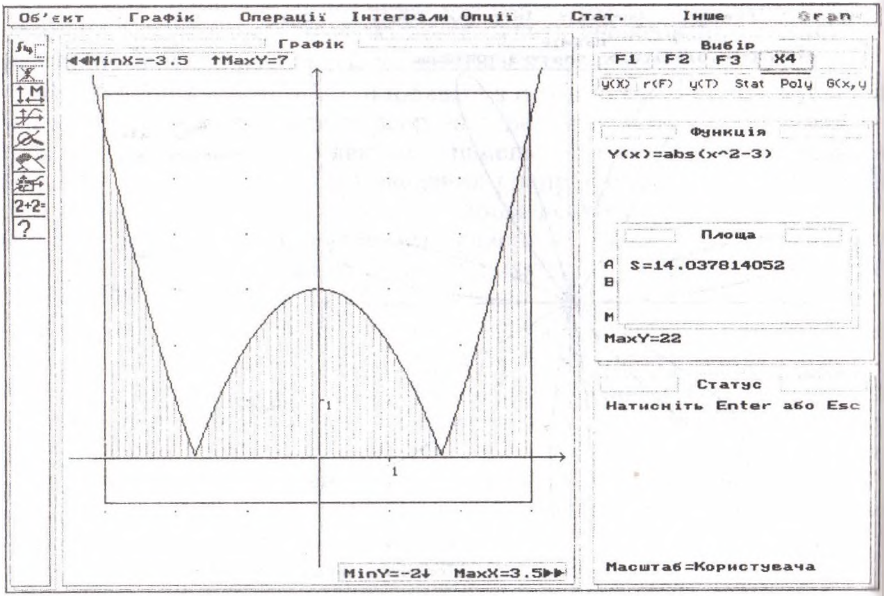


Рис. 1.119

$\int\limits_{-3}^{3}|x^2-3|\,dx$, чи з використанням послуги «Площа», вказавши $f_1(x)=|x^2-3|$, $f_2(x)=0$.

Слід зауважити, що використання послуги «Площа за точками» для обчислення визначених інтегралів чи площ фігур, обмежених деякими лініями, часто виявляється зручнішим, ніж використання послуг «Інтеграл» та «Площа», оскільки при використанні послуги «Площа за точками» відпадає потреба визначати координати точок перетину ліній (і запам'ятовувати їх), встановлювати межі інтегрування тощо.

5. Визначити площу найбільшої однозв'язної області, обмеженої лініями, що описуються рівняннями

$$y=\log_2(x+3.7)+\frac{1}{3}\sin(2x^2)+2,\quad y=\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}\cos(5x)+1.$$

Побудувавши графіки вказаних ліній та скориставшись послугою «Площа за точками», заключимо у відповідний прямокутник область, площа якої визначається, встановимо курсор всередині вказаної області (лівіше і правіше осі Oy) і зафіксуємо його, відмітивши таким чином цю область. Далі виведемо курсор за межі прямокутника і зафіксуємо його, після чого введемо вираз $G(x,y)=1$ (як і раніше). В результаті отримаємо $S\approx 13.3$ (див. рис. 1.113).

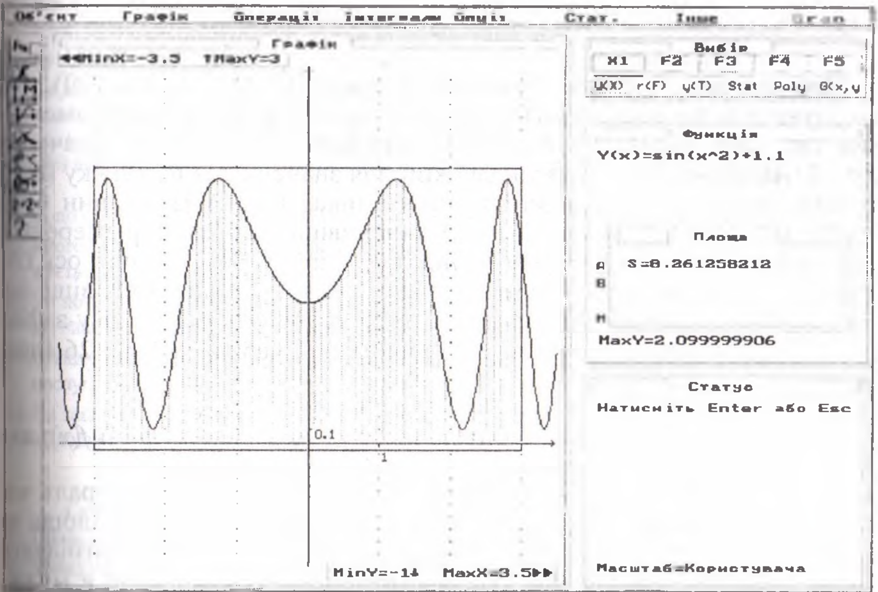


Рис. 1.120

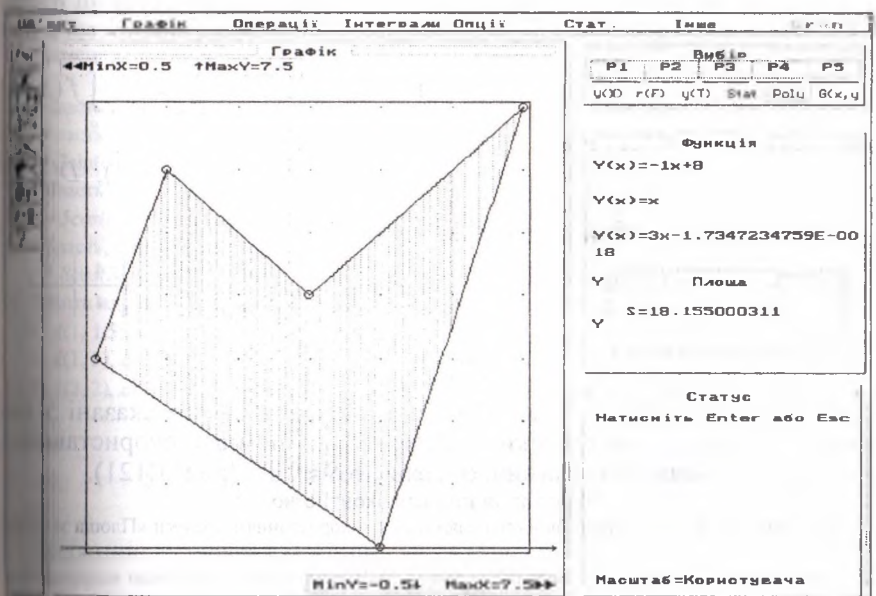


Рис. 1.121

6. Обчислити визначений інтеграл $\int_{-3}^{3}(\sin(x^2)+1.1)dx$.

Побудувавши графік функції $y=\sin(x^2)+1.1$ (рис.1.120), та звернувшись до послуги «Площа за точками», встановимо прямокутник так, щоб абсциси x точок на лівій його стороні мали значення $a=-3$, на правій $b=3$, графік функції для значень x із проміжку $[a, b]$ цілком знаходився всередині прямокутника, а одна із вершин була нижче осі Ox (див. рис. 1.120). Встановивши далі курсор всередині прямокутника нижче графіка функції $y=\sin(x^2)+1.1$ і вище осі Ox, відмітимо обидві частини розглядуваної області (лівіше і правіше осі Oy), після чого виведемо курсор за межі прямокутника і знову зафіксуємо його. Вказавши далі $G(x, y)$ рівним 1, одержимо $S\approx 8.26$ (див. рис. 1.120).

Слід зауважити, що для обчислення $\int_a^b f(x)dx$ для функції $f(x)$, яка змінює знак на проміжку $[a, b]$, використання послуги «Інтеграл» виявляється зручнішим, оскільки при використанні послуги «Площа за точками» в розглядуваному випадку довелося б окремо визначати площі областей, обмежених графіками ліній $y=f(x)$ та $y=0$ в межах від $x=a$ до $x=b$, що розташовані нижче осі Ox, та окремо тих, що розташовані вище осі Ox, після чого знаходити їх суму, беручи площі областей, розташованих нижче осі Ox із знаком мінус. Крім того при використанні послуги «Інтеграл» для обчислення інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ побудова графіка функції $y=f(x)$ не є обов'язковою.

7. Задано вершини п'ятикутника $A(1, 3)$, $B(2, 6)$, $C(4, 4)$, $D(7, 7)$, $E(5, 0)$. Знайти його площу.

Введемо п'ять таблично заданих функцій

1)

x_i	1	2
y_i	3	6

,

2)

x_i	2	4
y_i	6	4

,

3)

x_i	4	7
y_i	4	7

,

4)

x_i	7	5
y_i	7	0

,

5)

x_i	5	1
y_i	0	3

і знайдемо поліноми 1-го степеня, що проходять через вказані 5 пар точок. Побудувавши графіки знайдених поліномів і скориставшись послугою «Площа за точками», одержимо $S\approx 18.2$ (рис. 1.121).

Запитання для самоконтролю

1. Як відмітити область, площа якої обчислюється з використанням послуги «Площа за точками»?
2. Площу якої області буде обчислено за послугою «Площа за точками», якщо всередині прямокутника немає жодної лінії, що ділить його на частини?

3. Що буде обчислено, якщо у відповідності до запитів послуги «Площа за точками» ввести вираз $G(x, y)$, що не дорівнює 1 при всіх x і y?

4. Як вказати частини прямокутника, сумарну площу яких потрібно визначити?

5. Як вказати, що всі частини прямокутника, сумарну площу яких потрібно визначити, вже відмічено?

6. Як з використанням послуги «Площа за точками» обчислити визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, якщо функція $f(x)$ змінює знак на проміжку $[a, b]$?

7. Якого типу задання мають бути функціональні залежності, що описують лінії, якими обмежується область, площу якої потрібно визначити?

8. Чи потрібно для встановлення прямокутника, що обмежує область, площа якої обчислюється, визначати найбільші і найменші значення абсцис x і ординат y точок у вказаній області?

9. В яких випадках використання послуги «Площа за точками» зручніше, ніж використання послуги «Площа»?

10. Чи завжди, коли застосовна послуга «Площа за точками», можна скористатися і послугами «Площа» та «Інтеграл»?

Вправи для самостійного виконання

Скориставшись послугою «Площа за точками», обчислити площі вказаних областей:

1. Область над прямою $x + y = 3$ і всередині кола радіуса 4 з центром в початку координат.
2. Трикутник, обмежений прямими $x + 2y = 4$, $2x + y = 4$, $x + y = 7$.
3. Сектор, що лежить всередині кола, рівняння якого в полярних координатах $r = r_0$, обмежений променями, рівняння яких $f = f_1$, $f = f_2$, якщо:
   а) $r_0 = 5$, $f_1 = 0$, $f_2 = 1.57$;   б) $r_0 = 5$, $f_1 = 0$, $f_2 = 1$;   в) $r_0 = 5$, $f_1 = 1$, $f_2 = 2$.
4. Сегмент, що лежить всередині кола $r = 5$ правіше від прямої $r = \dfrac{3}{\cos(\varphi)}$, $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right)$.
5. Область всередині кола $r = 4$ поза областю, обмеженою лінією $r = 5\sin(5f)$.
6. Область між лініями
   $r = 3\sin(\cos(\sin(5f)))$, $r = 5\cos(\cos(\cos(3f)))$.
7. Область, обмежена лінією
   $r = 5cos(cos(cos(cos(cos(cos(cos(cos(cos(cos(kf))))))))))$ *(для значень $k = 0, 1, 2, \dots, 50$).*
8. Область, обмежена лінією
   $r = 8cos(2cos(2cos(2cos(cos(cos(cos(cos(cos(cos(kf))))))))))$ *(для значень $k = 0, 1, 2, \dots, 40$).*
9. Знайти площі многокутників, заданих координатами їх вершин:
   1) $A(1, 1.5)$, $B(7, 4.3)$, $C(5, -1)$;
   2) $A(1, 3)$, $B(5, 0)$, $C(4, 5)$, $D(2, 9)$;
   3) $A(2, 2)$, $B(3, 9)$, $C(4, 6)$, $D(5, 7)$, $E(6, 3)$, $F(4, 0)$, $G(3, -2)$, $H(-1, -1)$.

§ 16. Обчислення довжини дуги кривої

Довжина дуги деякої кривої в межах від точки $A(x_1, y_1)$ до точки $B(x_2, y_2)$ може бути обчислена за формулою $L = \int\limits_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Якщо при цьому крива описується рівнянням виду $y = f(x)$ (причому $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$), тоді формула набуває вигляду

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Якщо крива описується залежністю між змінними x і y, поданою в параметричній формі $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, тоді

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\phi'(t))^2}\, dt.$$

Приклади

1. Обчислити довжину дуги параболи $y = x^2$ від точки (0, 0) до точки (3, 9).

В даному прикладі задача зводиться до обчислення інтеграла

$$\int_0^3 \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx.$$

Скориставшись послугою «Інтеграл», одержимо

$$\int_0^3 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx \approx 9.77.$$

2. Обчислити довжину дуги циклоїди:

$$x(t) = 2(t - \sin(t)),\ \ y(t) = 2(1 - \cos(t))$$

в межах зміни параметра t від 0 до 2π.

В даному разі довжина дуги може бути обчислена за формулою

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(dx)^2 + (dx)^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Для конкретних даних розглядуваного прикладу одержується

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(2(1 - \cos(t)))^2 + (2\sin(t))^2}\, dt.$$

Скориставшись послугою «Інтеграл», одержимо $L \approx 16.0$.

Програмою *GRAN1* передбачено спеціальну послугу «Довжина дуги» (в пункті «Інтеграли»), звернення до якої дає можливість визначити довжину дуги між двома вказаними точками.

При цьому відповідна функціональна залежність може бути задана явно (тип $y(x)$), параметрично (тип $x(t)$, $y(t)$), в полярних координатах (тип $r(F)$), у вигляді полінома, що наближає таблично задану функцію (тип *Poly*).

З використанням послуги «Довжина дуги» для довжини дуги параболи в межах від $x = 0$ до $x = 3$ одержуємо $L \approx 9.75$ (рис. 1.122).

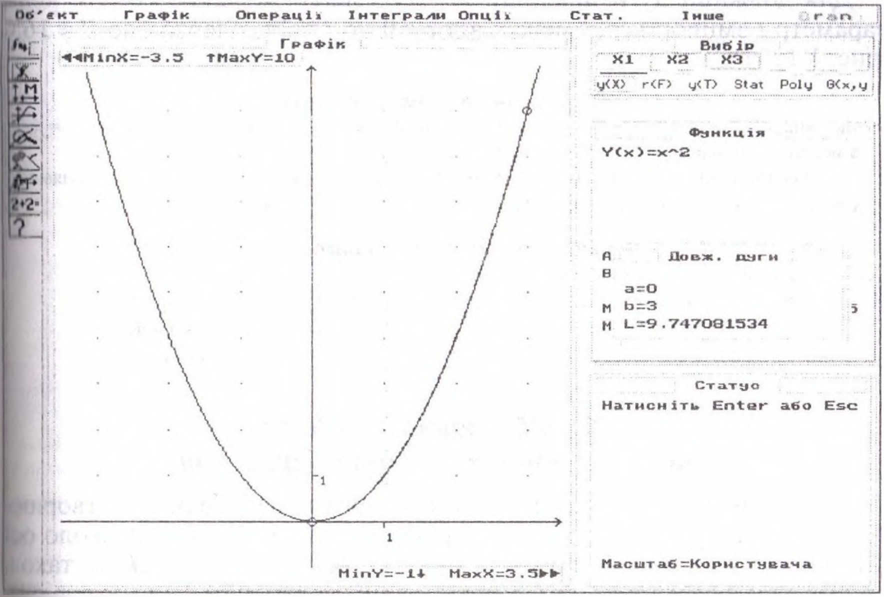


Рис. 1.122

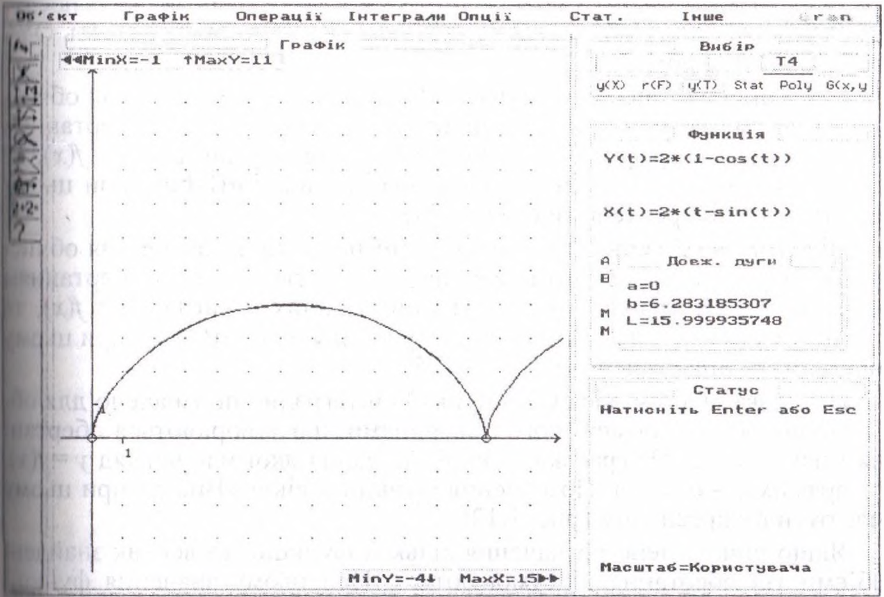


Рис. 1.123

Для довжини дуги циклоїди $x = 2(t - \sin(t))$, $y = 2(1 - \cos(t))$, коли параметр t змінюється в межах від $t = 0$ до $t = 2\pi$, одержуємо $Z \approx 16.0$ (рис. 1.123).

Запитання для самоконтролю

1. Як з використанням послуги «Інтеграл» обчислити довжину дуги лінії, рівняння якої $y = f(x)$, в межах від точки $(a, f(a))$ до точки $(b, f(b))$?
2. Як з використанням послуги «Інтеграл» обчислити довжину дуги лінії, заданої рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, в межах від точки $(\varphi(t_1), \phi(t_1))$ до точки $(\varphi(t_2), \phi(t_2))$?

Вправи для самостійного виконання

Обчислити довжину дуги лінії в заданих межах:

1. $y = \cos(x)$ при зміні x від $-\pi/2$ до $\pi/2$.
2. $y = \log_2(x)$ при зміні x від 1/4 до 8.
3. $y = 2^x$ при зміні x від −2 до 3.
4. $y = 1/x$ при зміні x від 1/4 до 4.
5. $y = x^2$ при зміні x від 0 до 1.
6. $y = \sin(x^2)$ при зміні x від 0 до 1.

§ 17. Обчислення об'ємів та площ поверхонь тіл обертання

Для обчислення об'єму тіла, обмеженого поверхнею, що утворюється обертанням лінії, описуваної рівнянням виду $y = f(x)$, навколо осі Ox (чи осі Oy), та площинами $x = a$, $x = b$ (чи $y = c$, $y = d$), а також об'єму тіла обертання, обмеженого двома поверхнями, що утворюються обертанням двох ліній, описуваних рівняннями виду $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, та площинами $x = a$, $x = b$ (чи $y = c$, $y = d$), призначено послуги «V2, вісь OX», «V2, вісь OY», «Об'єм, вісь OX», «Об'єм, вісь OY» пункту «Інтеграли».

Підпункт «V2, вісь OX» пункту «Інтеграли» призначено для обчислення об'єму, обмеженого поверхнями, що утворюються обертанням навколо осі Ox графіків двох функцій, заданих у вигляді $y = f(x)$, та прямими $x = a$, $x = b$. Позначення функцій у вікні «Вибір» при цьому мають бути підкресленими (рис 1.124).

Підпункт «V2, вісь OY» пункту «Інтеграли» призначено для обчислення об'єму, обмеженого поверхнями, що утворюються обертанням навколо осі Oy графіків двох функцій, заданих у вигляді $y = f(x)$, та прямими $x = a$ та $x = b$. Позначення функцій у вікні «Вибір» при цьому мають бути підкресленими (рис 1.125).

Підпункт «Об'єм, вісь OX» пункту «Інтеграли» призначено для обчислення об'єму, обмеженого поверхнями, що утворюються обертанням навколо осі Ox графіка функції, подання якої має вигляд $y = f(x)$, та прямих $x = a$, $x = b$. Позначення функції у вікні «Вибір» при цьому має бути підкресленим (рис. 1.126).

Якщо підкреслено позначення кількох функцій, то всі так знайдені об'єми тіл обертання підсумовуються. При цьому значення функції обчислюються лише в межах відрізка її визначення. Це дає мож-

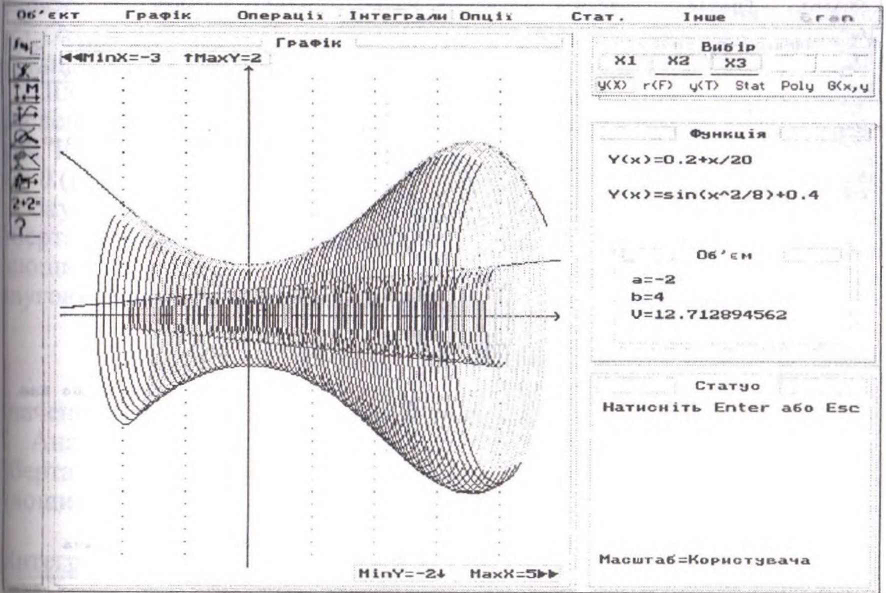


Рис. 1.124

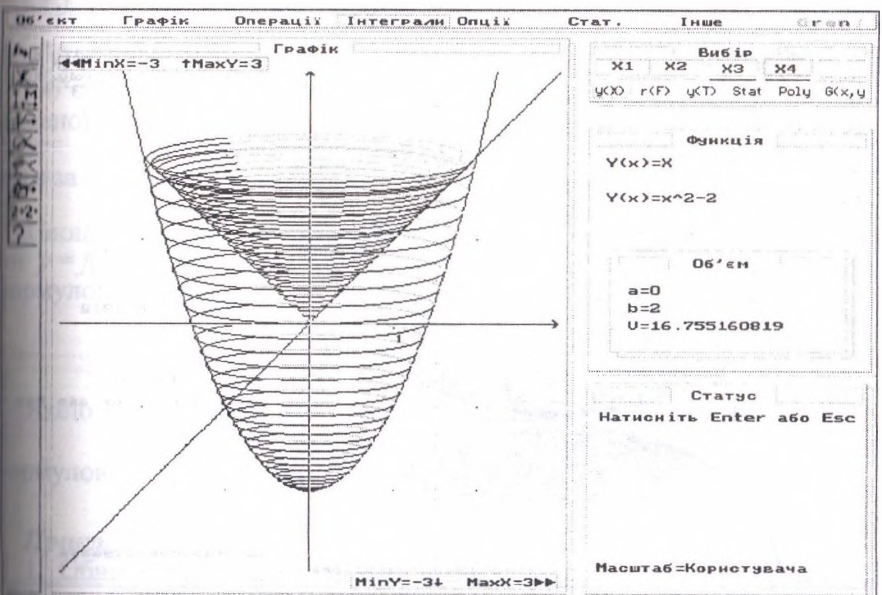


Рис. 1.125

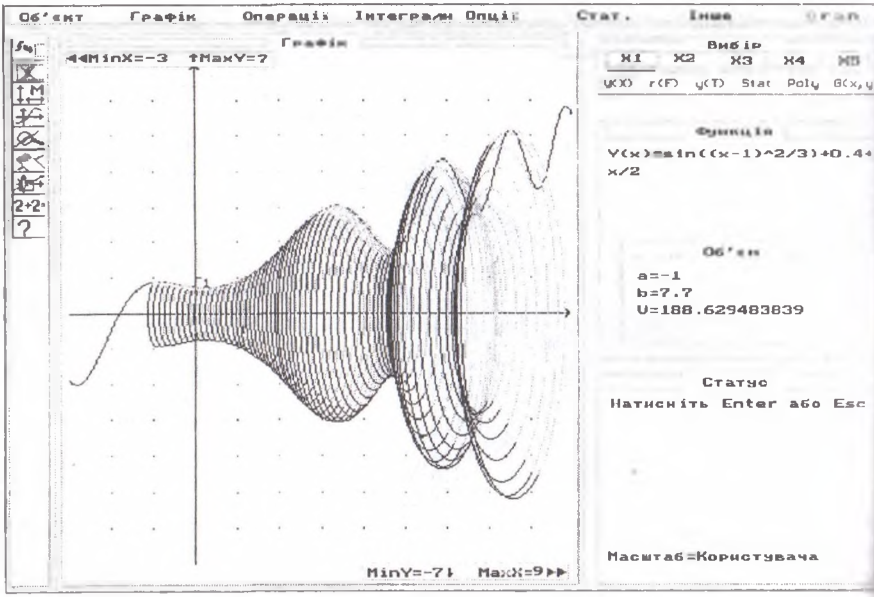


Рис. 1.126

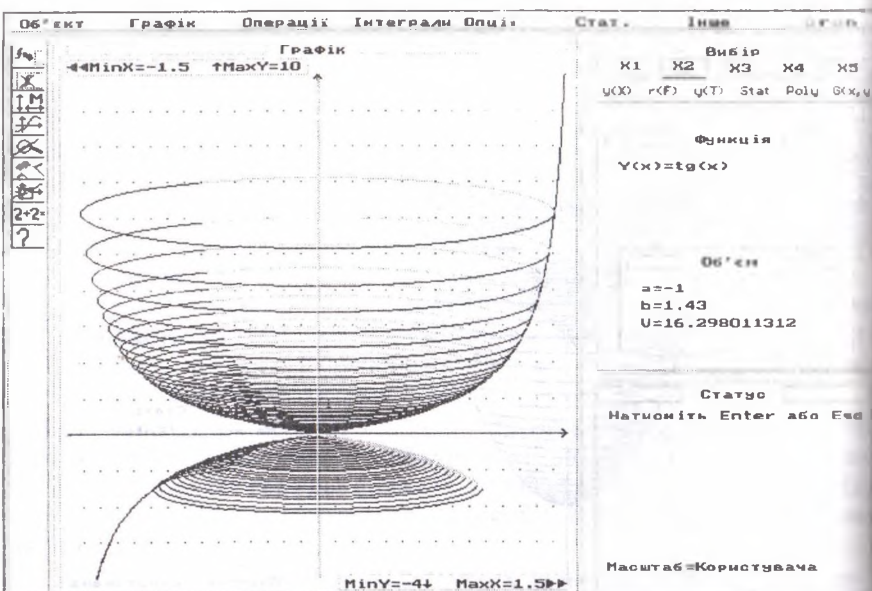


Рис. 1.127

…ивість обчислювати об'єми тіл, що утворюються обертанням навколо осі Ox графіка функції, заданої різними виразами виду $y = f(x)$ на суміжних відрізках.

Підпункт «Об'єм, вісь OY» пункту «Інтеграли» призначено для обчислення об'єму, обмеженого поверхнями, що утворюються обертанням навколо осі Oy графіка функції $y = f(x)$, та прямих $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (рис. 1.127).

Зауважимо, що об'єм тіла, обмеженого поверхнею, що утворюється обертанням лінії, описуваної рівнянням виду $y = f(x)$, навколо осі Ox, і площинами $x = a$, $x = b$, можна обчислити також, скориставшись послугою «Інтеграл» для обчислення визначеного інтеграла виду

$$\int_a^b \pi y^2 dx = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx,$$

значення якого і буде значенням шуканого об'єму.

Аналогічно, об'єм тіла, обмеженого поверхнею, що утворюється обертанням лінії, описуваної рівнянням виду $y = f(x)$, навколо осі Oy, і площинами $y = c$, $y = d$ можна обчислити, скориставшись послугою «Інтеграл» для обчислення визначеного інтеграла $\int_c^d \pi x^2 dy = \int_a^b \pi f'(x) x^2 dx$, де a і b такі, що $f(a) = c$, $f(b) = d$, або $\int_c^d \pi(g(y))^2 dy$, де $g(y)$ – функція, обернена до $f(x)$.

Об'єм тіла, що утворюється обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (при $f(x) \geq 0$) можна обчислити за формулою $\int_a^b 2\pi x f(x) dx$.

Площа поверхні, що утворюється обертанням навколо осі Ox кривої $y = f(x)$ в межах від точки $(a, f(a))$ до $(b, f(b))$, обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Якщо крива описується рівняннями виду $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, тоді за формулою $S = \int_{t_1}^{t_2} 2\pi\phi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\phi'(t))^2}\, dt$.

Приклади

1. Обчислити об'єм тіла, що обмежений поверхнею, утвореною обертанням кривої $y = x/3 + \cos(2x) + 3$ навколо осі Ox, в межах від $x_1 = -3.14$ до $x_2 = 3.14$.

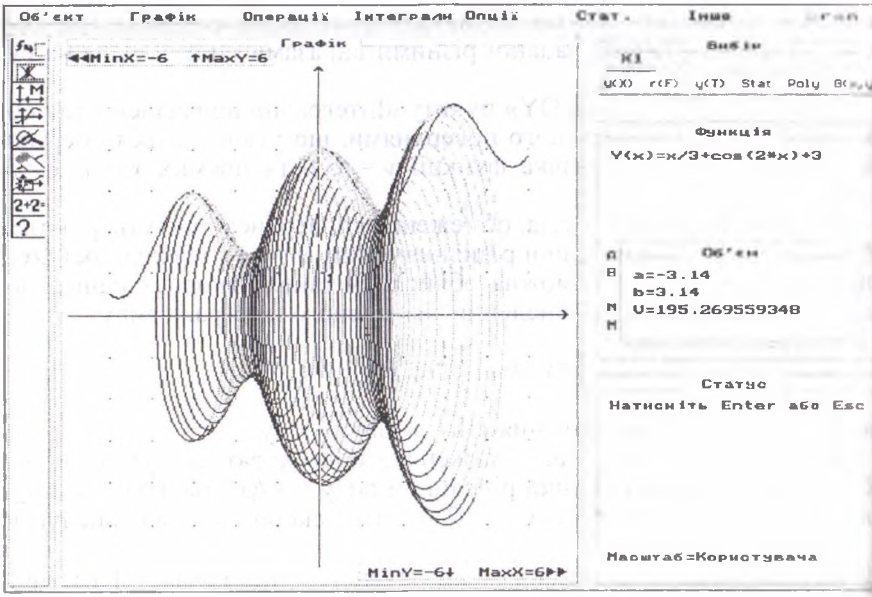


Рис. 1.128

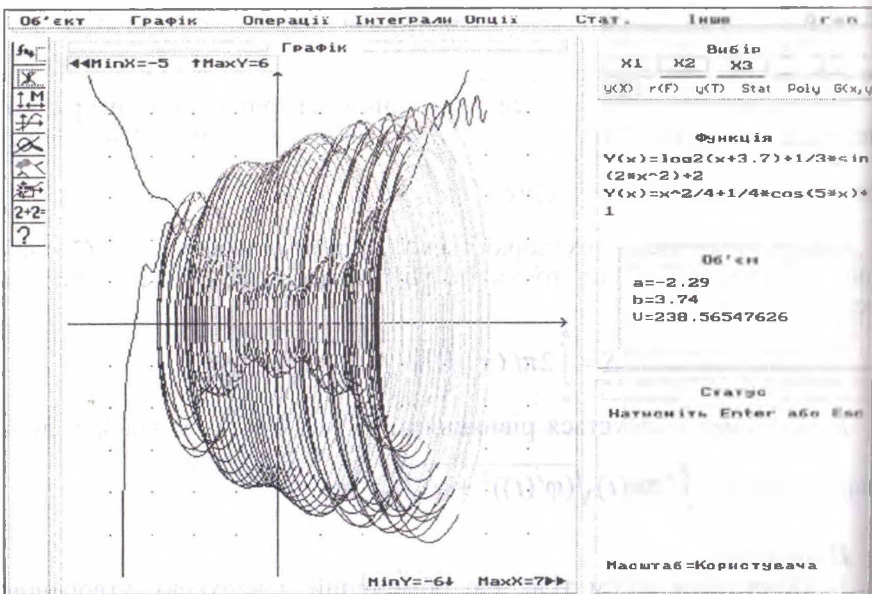


Рис. 1.129

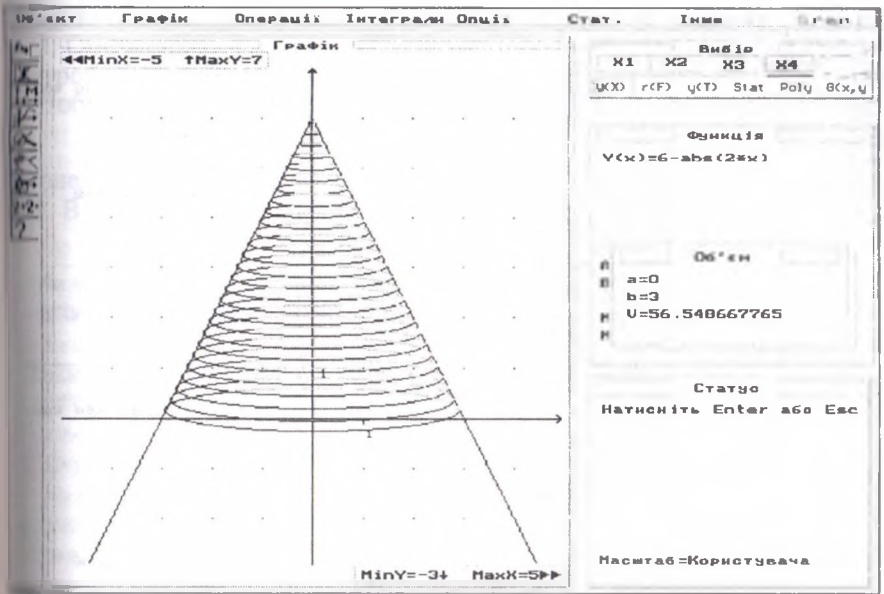


Рис. 1.130

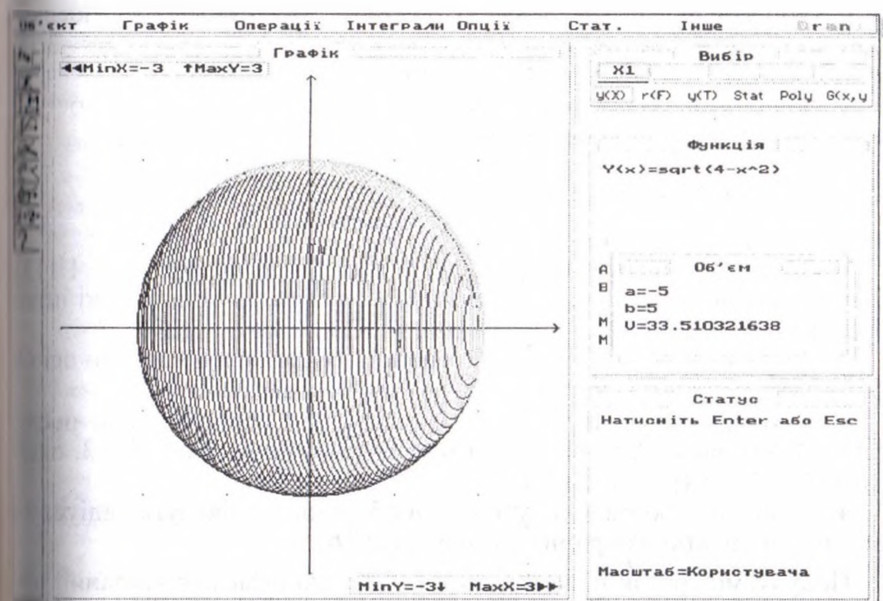


Рис. 1.131

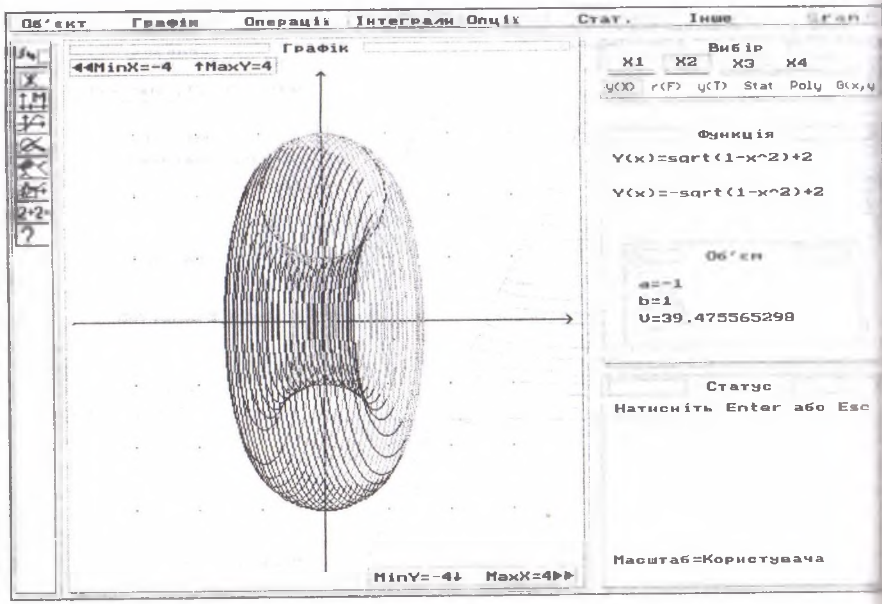


Рис. 1.132

Побудувавши графік заданої функції, звернемось до послуги «Об'єм, вісь OX», вказавши задані межі інтегрування $a = -3.14$, $b = 3.14$. В результаті одержимо $V \approx 195.3$ (рис. 1.128).

2. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox плоскої фігури, обмеженої кривими

$$y = \log_2(x+3.7) + \frac{1}{3}\sin(2x^2) + 2, \quad y = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}\cos(5x) + 1,$$

в межах від $x = -2.29$ до $x = 3.74$.

Побудуємо спочатку графіки вказаних функцій (див. рис. 1.113). Скориставшись послугою «V2, вісь OX» і вказавши задані межі інтегрування $a = -2.29$, $b = 3.74$, одержимо $V \approx 238.6$ (рис. 1.129).

3. Обчислити об'єм конуса, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $x = 0$, $y = 0$, $y = 6 - 2\text{abs}(x)$.

Побудуємо графік функції $y = 6 - 2\text{abs}(x)$. Скориставшись послугою «Об'єм, вісь OY» і вказавши межі інтегрування $a = 0$, $b = 3$, одержимо $V \approx 56.55$ (рис. 1.130).

4. Обчислити об'єм кулі, утвореної обертанням півкруга радіуса 2 з центром в початку координат навколо осі Ox.

Побудуємо графік півкола $y = \sqrt{4 - x^2}$, що обмежує вказаний півкруг. Скориставшись послугою «Об'єм, вісь OX» і вказавши межі інтегрування $a = -2$, $b = 2$, одержимо $V \approx 33.51$ (рис. 1.131).

Зокрема, якщо цей же об'єм обчислювати за формулою $V = 4/3\pi R^3$ при $R = 2$, одержимо $V = 4/3\pi 2^3 = 33.51$.

5. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням круга радіуса 1 з центром у точці (0, 2) навколо осі Ox.

Побудувавши графіки функцій

$$y = 2 + \sqrt{1 - x^2}\,, \quad y = 2 - \sqrt{1 - x^2}\,,$$

звернемось до послуги «V2, вісь OX» і вкажемо межі інтегрування -1 та 1. В результаті одержимо шуканий об'єм $V \approx 39.48$ (рис. 1.132).

Запитання для самоконтролю

1. Чи обов'язково будувати графіки заданих функцій при використанні послуг «Об'єм, вісь OX», «Об'єм, вісь OY», «V2, вісь OX», «V2, вісь OY»?
2. Як можна обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнею, що утворюється обертанням навколо осі Ox кривої $y = f(x)$ та прямих $x = a$, $x = b$, $y = 0$, скориставшись послугою «Інтеграл»? Об'єм, обмежений поверхнями обертання навколо осі Ox кривих $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ і прямих $x = a$, $x = b$?
3. Як обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox кривої $y = f(x)$ в межах від $x = a$ до $x = b$?
4. Якою повинна бути крива $y = f(x)$ для того, щоб можна було правильно обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнею, утвореною обертанням навколо осі Oy кривої $y = f(x)$ в межах від $y = c$ до $y = d$?
5. Як обчислити об'єм тіла, обмеженого обертанням навколо осі Ox (чи осі Oy) кривої, заданої параметрично рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$?
6. Як обчислити площу поверхні, що утворюється обертанням навколо осі Ox (чи осі Oy) кривої, заданої параметрично рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$?

Вправи для самостійного виконання

1. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox прямокутника $\{(x, y): x \in [a, b], y \in [c, d]\}$, (при $a < b$, $0 < c < d$ і конкретних a, b, c, d).
2. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox відрізка прямої $y = 2$ для x в межах від -3 до 3.
3. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox кола радіуса 2 з центром в точці (0, 3).
4. Знайти об'єм зрізаного конуса, утворюваного обертанням навколо осі Oy трапеції, обмеженої лініями $x = 0$, $y = 0$, $y = 3$, $y = 4 - 2x$.
5. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями, що утворюються обертанням навколо осі Oy кривої $y = 2^x$ та прямих $y = 0.5$, $y = 4$.
6. Знайти об' єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y = 4 - |x - 4|$, $x = 3$, $x = 5$, $y = 0$.
7. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y = 6 - x$, $y = x + 5$, $x = 1$, $x = 2$. Знайти також площу повної поверхні цього тіла.
8. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox кривої $y = 2 + \cos(\sin(9x))$ в межах від $x = -4$ до $x = +4$.

§ 18. Елементи статистичного аналізу експериментальних даних. Основні поняття

Нехай в результаті спостережень за деяким процесом чи явищем, які при протребі можуть бути повторені досить велику кількість разів, отримано певний набір значень деякої характеристики цього процесу чи явища: $x_1, x_2, \ldots x_n$. Надалі досліджувані величини (характеристики) позначатимемо великими літерами X, Y, Z тощо. Спостережені значення величини X називатимуться варіантами.

Набір спостережених значень називають статистичною вибіркою із множини можливих значень досліджуваної характеристики. Множину всіх можливих значень досліджуваної величини називають генеральною сукупністю значень. Точна закономірність, яку задовольняє досліджувана характеристика, невідома, тому неможливо передбачити, які саме її значення буде спостережено в той чи інший момент. Цю закономірність принаймні наближено і необхідно встановити за результатами аналізу набору спостережених значень.

Наприклад, неможливо наперед точно встановити, який саме урожай певної культури буде отримано, якщо внести ту чи іншу кількість добрив на 1 гектар землі, оскільки неможливо точно передбачити і врахувати вплив всіх факторів, від яких залежить урожай – вологість і температура повітря і грунту, сусідство з іншими культурами, наявність корисних комах і шкідників і т.д.

Можна навести й інші приклади процесів і явищ, значення окремих характеристик яких є непередбачуваними в наперед вказані моменти спостережень.

Зауважимо однак, що якщо проведено досить багато спостережень, то на їх підставі з великою мірою впевненості можна говорити про деякі межі, в яких слід очікувати значення спостережуваної характеристики.

Не виключено, що серед значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$ окремі повторюються по кілька разів. В такому разі зручно набір спостережених значень подати у вигляді таблиці

x_i	x_1	x_2	…	x_k
m_i	m_1	m_2	…	m_k

,

де x_i – одна з варіант, що зустрічається в наборі $x_1, x_2, \ldots, x_n$, m_i – кількість однакових значень x_i в наборі.

Число m_i називають частотою значення x_i. Як правило, значення x_1, $x_2, \ldots, x_k$ розташовують в порядку їх зростання, що надалі завжди припускається. При цьому $x_1 = \min\limits_{1 \le i \le n}(x_i) = x_{\min}$, $\quad x_k = \max\limits_{1 \le i \le n}(x_i) = x_{\max}$.

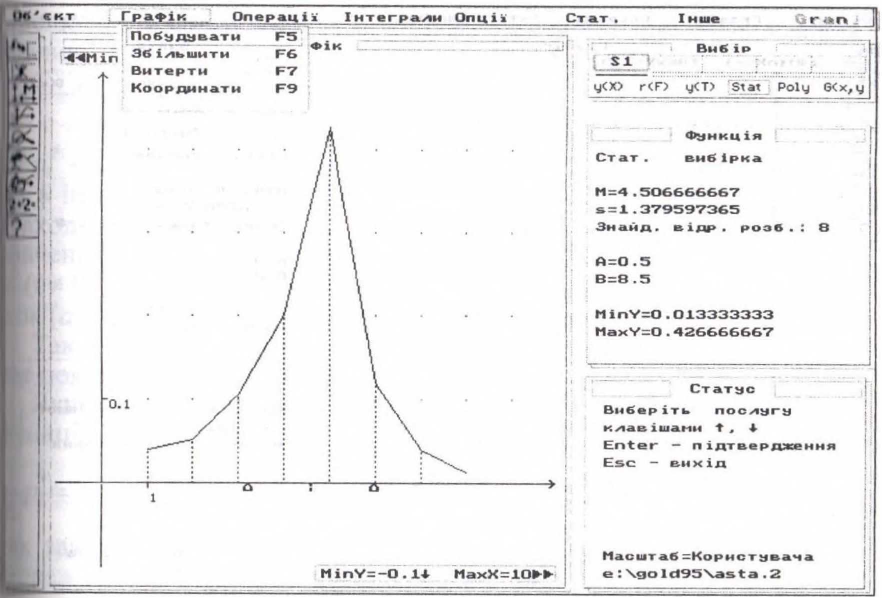


Рис. 1.133

Так побудовану таблицю називають рядом розподілу частот по множині спостережених значень досліджуваної величини.

Часто зручніше замість частоти m_i значення x_i розглядати його відносну частоту $m_i^* = \dfrac{m_i}{n}$.

x_i	x_1	x_2	...	x_k
m_i^*	m_1^*	m_2^*	...	m_k^*

Таку таблицю називають рядом розподілу відносних частот по множині спостережених значень досліджуваної величини. Очевидно, сума відносних частот завжди дорівнює 1.

Якщо на площині xOy нанести точки з координатами (x_i, $\dfrac{m_i}{n}$) і потім з'єднати їх ламаною лінією, то утвориться так званий полігон відносних частот появи значень x_i (рис. 1.133). При великій кількості неоднакових значень x_1, x_2, ..., x_k, досить густо розсіяних між найменшим і найбільшим значеннями x_1 та x_k, зберігання кожного окремого значення втрачає смисл. В такому разі зручно проміжок $[x_1, x_k]$ поділити на деяке число інтервалів $[a_0, a_1[$, $[a_1, a_2[$, ..., $[a_{m-1}, a_m[$ однакової довжини, так, що $a_0 < x_{\min}$, $a_m > x_{\max}$, $a_i = a_{i-1} + h = a_{i-1} + \dfrac{a_m - a_0}{m}$,

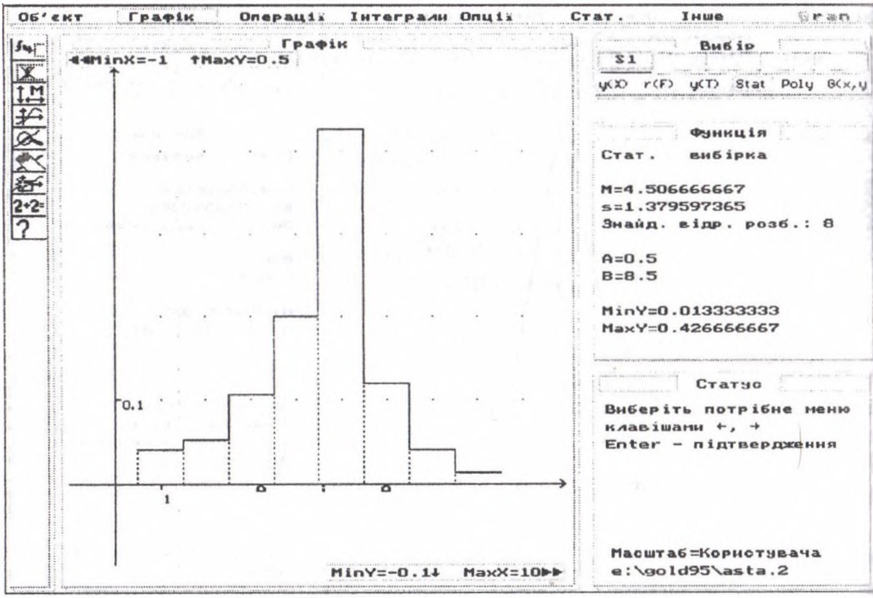


Рис. 1.134

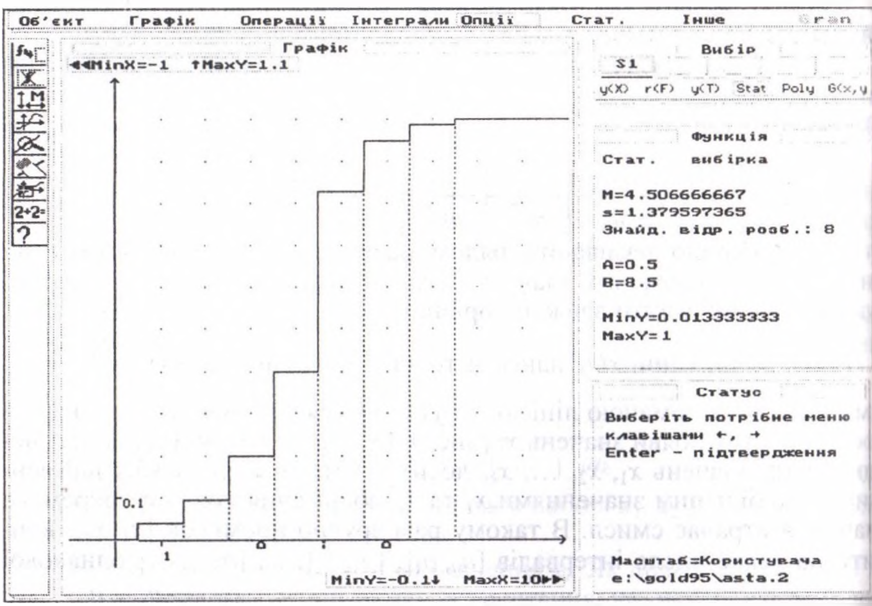


Рис. 1.135

і дещо узагальнити результати спостережень, подавши їх у вигляді таблиці

$[a_{i-1}, a_i[$	$[a_0, a_1[$	$[a_1, a_2[$	...	$[a_{m-1}, a_m[$
p_i^*	p_1^*	p_2^*	...	p_m^*

де p_i^* – відносна частота попадання значень спостережуваної величини в інтервал $[a_{i-1}, a_i[$, тобто кількість значень серед $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які знаходяться в межах між a_{i-1} та a_i, поділена на загальну кількість n значень x_i. На практиці, якщо якесь із значень l разів попадає на межу a_i ($i \neq 0$, $i \neq s$), вважають, що таке значення $l/2$ разів попадає в проміжок $[a_{i-1}, a_i[$ і $l/2$ разів – в проміжок $[a_i, a_{i+1}[$.

Таку таблицю називають інтервальним розподілом відносних частот появи спостережуваних значень досліджуваної величини.

Якщо тепер на площині xOy побудувати графік кусково-сталої функції, яка дорівнює нулеві за межами проміжку $[a_0, a_m[$ і $\frac{1}{h}p_i^* = \frac{p_i^*}{a_i - a_{i-1}}$ на проміжку $[a_{i-1}, a_i[$, де $h = \frac{a_m - a_0}{m}$, то одержиться так звана гістограма інтервального розподілу відносних частот спостережених значень досліджуваної величини (рис. 1.134).

Оскільки $\sum_{i=1}^{m} p_i^* = 1$, то площа під гістограмою дорівнює 1, як сума площ виду $\frac{p_i^*}{h}(a_i - a_{i-1}) = p_i^*$.

Іноді буває зручно розподіл відносних частот появи спостережуваних значень описувати за допомогою так званої функції розподілу відносних частот: $F_n^*(x) = P_n^*\,(X < x)$, де x довільне значення із проміжка $]-\infty, \infty[$, P_n^* – відносна частота попадання значень досліджуваної величини X лівіше значення x, тобто на проміжок $]-\infty, x[$.

Якщо крок $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{m}$ досить малий, то наближено можна покласти

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq x_{\min} \\ \sum_{k=1}^{i} p_k^*, & \text{якщо } a_{i-1} < x \leq a_i \\ 1, & \text{якщо } x_{\max} < x, \end{cases}$$

вважаючи, що на проміжку $]a_{i-1}, a_i]$ функція $F_n^*(x)$ набуває одного і того ж значення $\sum_{k=1}^{i} p_k^*$ (рис. 1.135).

Однією з найважливіших числових характеристик набору спостережуваних значень є їхнє середнє арифметичне

$$M_n^*[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i^* .$$

Це середнє арифметичне буде ближчим до значень, які зустрічаються частіше, ніж до значень, які зустрічаються рідко. Тому число $M_n^*[X]$ є значенням, близько до якого в першу чергу слід сподіватися отримати більшість значень в майбутніх спостереженнях, і є своєрідним центром розсіювання частот спостережуваних значень досліджуваної величини.

Крім центру розсіювання важливими характеристиками множини спостережених значень є також значення, які певним чином описують величину розсіювання частот, тобто наскільки далеко можуть бути віддалені (в переважній більшості випадків) значення досліджуваної величини від центра розсіювання, в якому діапазоні (в переважній більшості випадків) вони можуть знаходитись тощо.

Однією з характеристик величини розсіювання частот є розмах значень вибірки $x_{max} - x_{min}$.

Проте більш суттєвою характеристикою розсіювання частот є так зване середнє квадратичне відхилення спостережуваних значень досліджуваної величини від значення $M_n^*[X]$, тобто від центра розсіювання. Таке середнє квадратичне відхилення обчислюється за формулою

$$\sigma_n^*[X] = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - M_n^*[X])^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i - M_n^*[X])^2 p_i^*} .$$

Справа в тому, що найбільш суттєвими для визначення величини розсіювання частот значень досліджуваної величини (при досить великому числі спостережень) є ті значення, які у вибірці зустрічаються найбільш часто. Значення ж, частота появи яких у вибірці дуже мала, практично не впливають суттєво на характеристику розсіювання частот основної маси спостережених значень досліджуваної величини. Тому характеристика $x_{max} - x_{min}$ може виявитись дещо завищеною у порівнянні з більш суттєвою характеристикою $\sigma_n^*[X]$.

Нехай, наприклад, серед 10000 спостережених значень 1 раз зустрічається значення –1, 1 раз – +1, 9998 разів – 0. Очевидно, що $M_n^*[X] = 0$. Природно вважати, що розсіювання частот значень досліджуваної величини навколо центра розсіювання $M_n^*[X] = 0$ практично відсутнє:

$$\sigma_n^*[X]=\sqrt{(-1-0)^2\,\frac{1}{10000}+(0-0)^2\,\frac{9998}{10000}+(1-0)^2\,\frac{1}{10000}}=\sqrt{0{,}0002}\approx 0.014\approx 0,$$

хоч $x_{\max}-x_{\min}=1-(-1)=2$. В даному разі спостережені значення -1 і $+1$ є несуттєвими і практично не впливають на характеристики основної маси спостережених значень.

Іноді середнє значення характеризують не середнім арифметичним, а середнім гармонічним:

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i}p_i^*}.$$

Така характеристика може бути зручнішою у випадку, наприклад, визначення середньої швидкості руху деякого тіла вздовж прямої від точки $x=0$ до точки $x=n$, якщо відомо, що першу одиницю шляху тіло пройшло із швидкістю V_1, другу – із швидкістю V_2, …, n-ту – із швидкістю V_n. Тоді час, витрачений на першу одиницю шляху, буде $\frac{1}{V_1}$, на другу $\frac{1}{V_2}$, …, на n-ту $\frac{1}{V_n}$. Загальний час, витрачений на n одиниць шляху, дорівнює $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{V_n}$. Середня швидкість на всьому шляху довжиною n одиниць дорівнюватиме

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{V_n}}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{V_n}}.$$

Якщо проміжки довжиною 1, які тіло проходить із швидкістю V_1, зустрічаються m_1 разів, із швидкістю V_2 – m_2 разів і т.д., із швидкістю V_k – m_k разів, тоді середня швидкість дорівнюватиме

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}m_i}{\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i}{V_i}}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i}{V_i}}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i}{V_i}}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i}{n}\cdot\frac{1}{V_i}}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{V_i}p_i^*},$$

де p_i^* – відносна частота, з якою зустрічаються проміжки, які тіло проходить із швидкістю V_i.

При розгляді добутків значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$ використовується середнє геометричне значення $\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$. Очевидно, логарифм середнього геометричного дорівнює середньому арифметичному логарифмів значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\log_a(\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log_a(x_i).$$

В конкретних ситуаціях можуть знадобитись і деякі інші характеристики вибірки $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Запитання для самоконтролю

1. Що називають генеральною сукупністю значень досліджуваної величини?
2. Що називають статистичною вибіркою?
3. Що називають варіантами?
4. Що називають частотою появи значення x_i у вибірці $x_1, x_2, \dots, x_n$?
5. Що називають відносною частотою появи значення x_i у вибірці $x_1, x_2, \dots, x_n$?
6. Яка характеристика значення x_i більш інформативна – частота m_i чи відносна частота $\frac{m_i}{n}$?
7. Що називають рядом розподілу відносних частот по множині спостережених значень досліджуваної величини?
8. Що називають інтервальним розподілом відносних частот появи спостережених значень досліджуваної величини?
9. Чому дорівнює сума відносних частот появи всіх спостережених значень досліджуваної величини?
10. Що називають полігоном частот?
11. Що називають гістограмою інтервального розподілу відносних частот появи спостережених значень досліджуваної величини?
12. Чому дорівнює площа під гістограмою?
13. Що називають функцією розподілу відносних частот появи спостережених значень досліджуваної величини?
14. Якого найменшого значення може набувати функція $F_n^*(x)$?
15. Якого найбільшого значення може набувати функція $F_n^*(x)$?
16. Чи може мати місце нерівність $F_n^*(x_1) > F_n^*(x_2)$, якщо $x_1 < x_2$?
17. Що характеризує середнє арифметичне $M_n^*[X]$ спостережених значень $x_1, x_2, \dots, x_n$?
18. Чому точку з абсцисою $x = M_n^*[X]$ називають центром розсіювання відносних частот появи значень x_i досліджуваної величини?
19. Чи може значення $M_n^*[X]$ не співпадати з жодним із значень x_i, що належать до вибірки?
20. Які показники використовують, щоб охарактеризувати величину розсіювання відносних частот появи спостережених значень досліджуваної величини?
21. Чому середнє квадратичне відхилення $\sigma_n^*[X]$ слід вважати більш коректною характеристикою розсіювання відносних частот появи спостережених значень $x_1, x_2, \dots, x_n$ досліджуваної величини навколо центра розсіювання $M_n^*[X]$, ніж характеристика розсіювання $x_{max} - x_{min}$?

Вправи для самостійного виконання

Виконати вправи 1-5, використовуючи при потребі для виконання обчислень послугу «Калькулятор» пункту «Інше» чи інші послуги програми *GRAN1*.

1. Побудувати полігон відносних частот появи спостережених значень досліджуваної величини, якщо задано розподіл частот:

x_i	−3	−2	−1	0	1	2	3
m_i	1	6	15	43	17	5	2

2. За даними вправи 1 побудувати гістограму інтервального розподілу відносних частот появи спостережених значень досліджуваної величини, якщо розглядаються інтервали [−3.5; −2.5[, [−2.5; −1.5[, [−1.5; −0.5[, [−0.5; 0.5[, [0.5; 1.5[, [1.5; 2.5[, [2.5; 3.5[.
3. За даними вправи 1 побудувати графік функції $F_n^*(x)$ розподілу відносних частот появи значень досліджуваної величини на проміжку [−5; 5[.
4. За даними вправи 1 знайти $M_n^*[X]$ – середнє арифметичне спостережених значень досліджуваної величини.
5. За даними вправи 1 знайти $\sigma_n^*[X]$ – середнє квадратичне відхилення спостережених значень досліджуваної величини від їх середнього арифметичного $M_n^*[X]$.

§ 19. Введення експериментальних даних

Деякі елементи статистичного аналізу набору спостережених значень досліджуваної величини можна виконати з використанням послуг програми *GRAN1*.

Проте перш ніж приступити до аналізу набору спостережених значень з використанням послуг програми *GRAN1*, ці дані необхідно ввести з клавіатури чи з деякого файла на дискові до робочого файла програми.

Перед початком введення набору спостережених даних слід встановити тип задання функціональної залежності «Стат.», для чого в пункті «Опції» головного меню слід звернутися до підпункту «Встановити тип...», в якому в свою чергу звернутися до підпункту «тип Стат. *Alt-S*». При цьому в рядку, що вказує на тип задання функції, під вікном «Вибір» помічається (затемнюється) поле *Stat*. Той же результат досягається, якщо одночасно натиснути клавішу *Alt* і клавішу з літерою *S*, не звертаючись до підпунктів пункту «Опції», або ж, якщо використовується маніпулятор «мишка», встановити курсор «мишки» на позначення *Stat* (під вікном «Вибір») і натиснути ліву клавішу «мишки».

Після того, як вказано тип *Stat* і вказівник у вікні «Вибір» встановлено на вільне місце (або на місце, на якому уже є позначення залежності типу *S*), слід звернутися до пункту «Об'єкт» головного меню. Цього разу в цьому пункті з'являються підпункти:

Нова вибірка	F4
Змінити вибірку	
К-ть відр. розб.	
Завантажити	F3
Зберегти	F2
Переписати	
Вилучити	
Вибір	

Підпункт «Нова вибірка» використовується, якщо на вільне місце, відповідне поміченому полю у вікні «Вибір», вводиться інформація,

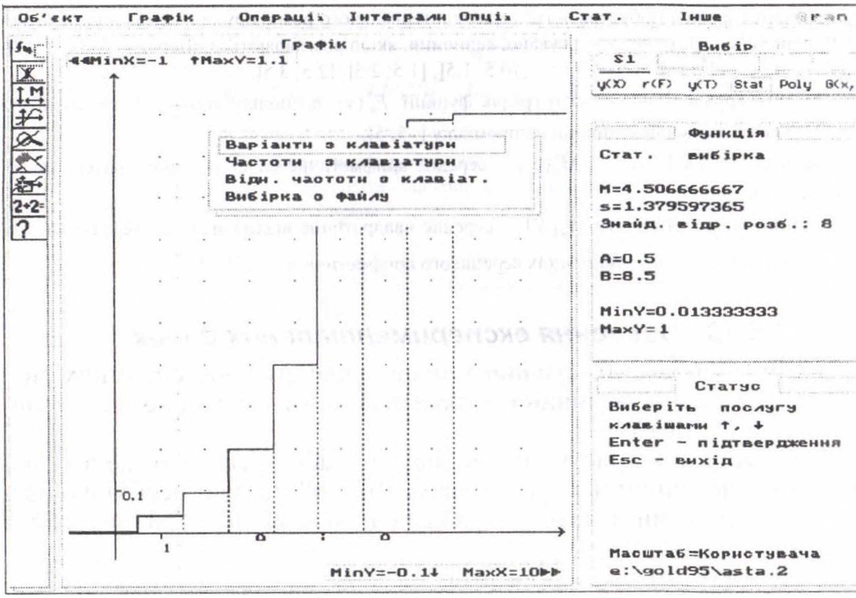


Рис. 1.136

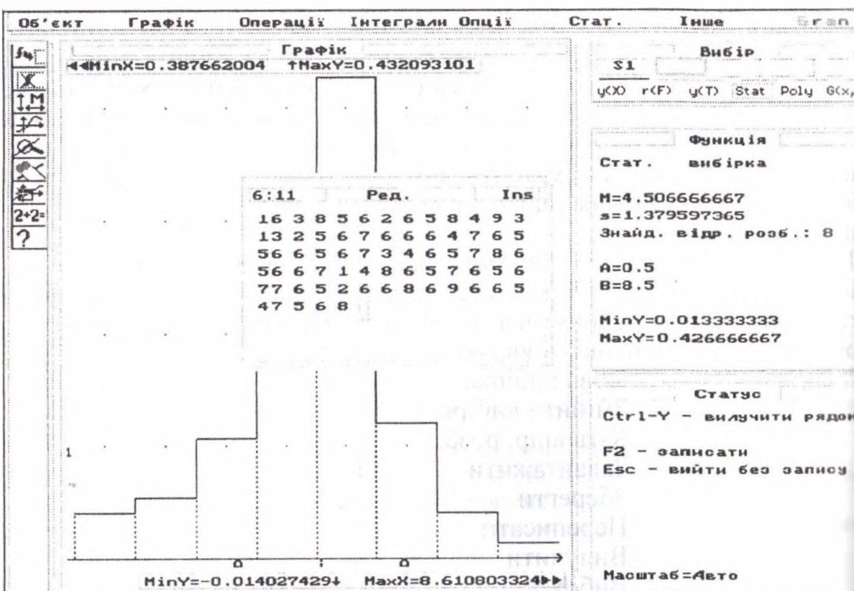


Рис. 1.137

що стосується вибірки, яка раніше не вводилась. Якщо у вікні «Вибір» вільних місць немає, операція «Нова вибірка» (як і розглянута раніше «Нова функція») стає недоступною. Якщо вільні місця є, то при зверненні до пункту «Нова вибірка» вказівник у вікні «Вибір» автоматично встановлюється у найлівіше вільне поле, якщо таке поле не було вказано за допомогою послуги «Вибір».

При зверненні до послуги «Нова вибірка» у вікні «Графік» з'являється додаткове вікно, у якому є 4 підпункти (рис. 1.136):

Варіанти з клавіатури
Частоти з клавіатури
Відн. частоти з клавіатури
Вибірка з файла

При зверненні до підпункту «Варіанти з клавіатури» у вікні «Графік» з'являється нове додаткове вікно з написами 1:1, Ред, Ins (рис. 1.137).

Цифри в лівому верхньому куті вказують на номер рядка і номер стовпчика, в якому знаходиться курсор. Тепер можна вводити дані з клавіатури. Числа, що вводяться, відокремлюються одне від одного комами або пропусками. При необхідності вилучити рядок, в якому стоїть курсор, слід одночасно натиснути клавішу *Ctrl* і клавішу з літерою *Y* (див. підказку у вікні «Статус» праворуч внизу).

Неправильно введені числа редагуються як звичайно – з використанням клавіш *Bs*, *Delete*, *Ins* та клавіш управління курсором. Якщо відключити режим вставляння (*Insert*), для чого досить натиснути клавішу *Ins*, то цифри, що вводяться заново, будуть записуватись на місце раніше введених. При відключеному режимі вставляння напис «Ins» в правому верхньому куті додаткового вікна зникає. Щоб включити режим вставляння, досить натиснути клавішу *Ins* ще раз. Дані, що вводяться, з'являються у полі даних додаткового вікна «Ред.» (редагування). Максимальна довжина рядка у цьому вікні – 26 позицій, максимальна кількість рядків – 1000, з них у вікні «Ред.» одночасно можна спостерігати 10 рядків, що йдуть послідовно один за одним.

Після закінчення введення даних слід натиснути клавішу F2 для збереження введених даних і їхнього подальшого аналізу (при цьому програма автоматично створює тимчасовий файл в активному каталозі, про що користувач може і не знати).

Використання підпункту «Частоти з клавіатури» здійснюється аналогічно до попереднього. Відмінність лише в тому, що числа розглядаються попарно, перше з яких трактується як варіанта, друге – як відповідна їй частота. Один і той самий набір чисел таким чином може трактуватися по-різному – як набір окремих варіант або як набір послідовно записаних пар чисел, перше з яких трактується як варіанта, а друге – як відповідна їй частота. Загальна сума частот не повинна перевищувати 1000, як і загальна кількість варіант.

Підпункт «Відносні частоти з клавіатури» використовується так само, як і підпункт «Частоти з клавіатури» – введені числа розглядаються попарно, перше з яких трактується як варіанта, а друге – як відповідна їй відносна частота. При цьому сума відносних частот повинна дорівнювати 1. Якщо сума відносних частот не дорівнює 1, видається повідомлення «Сума відносних частот < > 1», після чого введення варіант і відповідних їм відносних частот слід повторити заново.

При зверненні до підпункту «Вибірка з файла» у вікні «Графік» з'являється додаткове вікно «Вибір файла» з переліком файлів активного директорію (рис. 1.138). Після того, як ім'я файла вказано, у вікні «Графік» з'являється додаткове допоміжне вікно з пунктами (рис. 1.139):

Варіанти з файла
Частоти з файла
Відносні частоти з файла

Вибір того чи іншого пункту вказує на спосіб трактування даних у файлі: відповідні дані вводяться до робочого файла:

- як набір окремих варіант,
- як набір пар чисел, перше з яких трактується як варіанта, а друге – як частота цієї варіанти,
- як набір пар чисел, перше з яких трактується як варіанта, а друге – як відносна частота цієї варіанти.

Після звернення до одного із цих трьох пунктів у вікні «Графік» з'являється панель калькулятора і запит «Кількість відрізків розбиття» над рядком введення, в якому можна вказати бажану кількіть відрізків розбиття (в межах від 2 до 30). При цьому кількість відрізків, пропонована за програмою, висвітлюється вслід за словом «Розб.». (рис. 1.140). Якщо немає необхідності вказувати іншу кількість відрізків розбиття, досить натиснути клавішу *Enter* чи ліву клавішу «мишки».

В результаті у вікні «Вибір» на місці, де було встановлено вказівник цього вікна, з'являється позначення вибірки (літера *S* з відповідною цифрою), що означає, що далі можна виконувати передбачені програмою операції з цією вибіркою – змінювати, вилучати, будувати графіки і т.д.

Підпункт «Змінити вибірку» призначено для використання при необхідності відредагувати чи змінити дані у вибірці, на позначення якої встановлено вказівник у вікні «Вибір». Після звернення до послуги «Змінити вибірку» у вікні «Графік» з'являється додаткове вікно з переліком підпунктів:

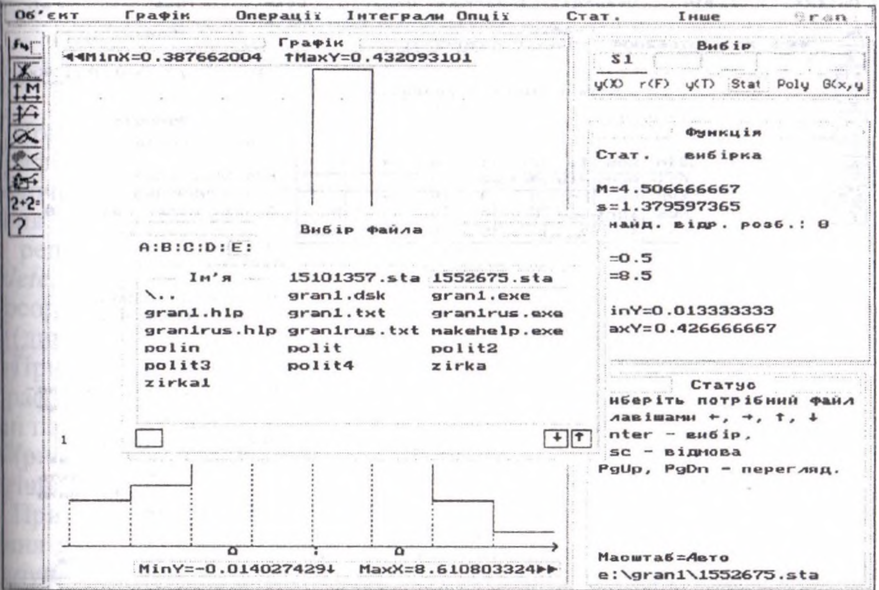


Рис. 1.138

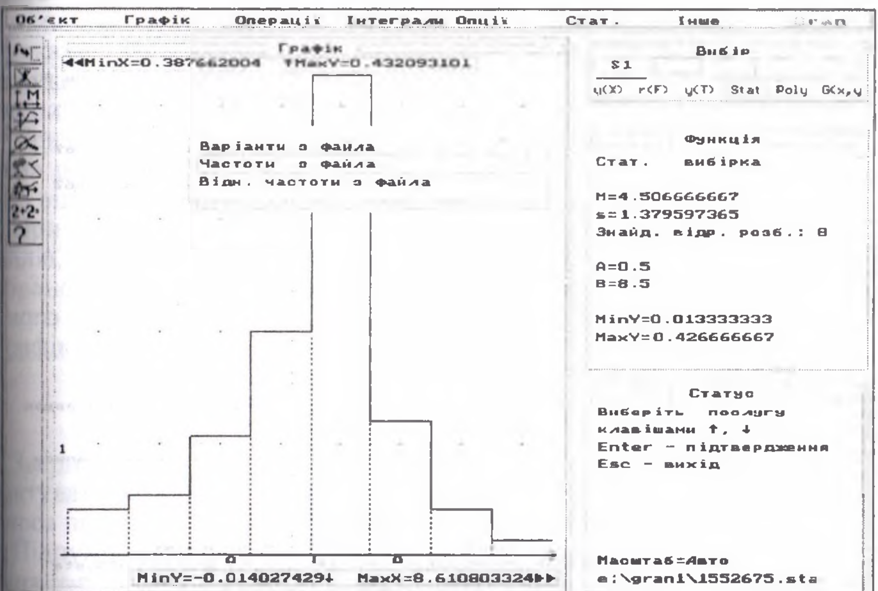


Рис. 1.139

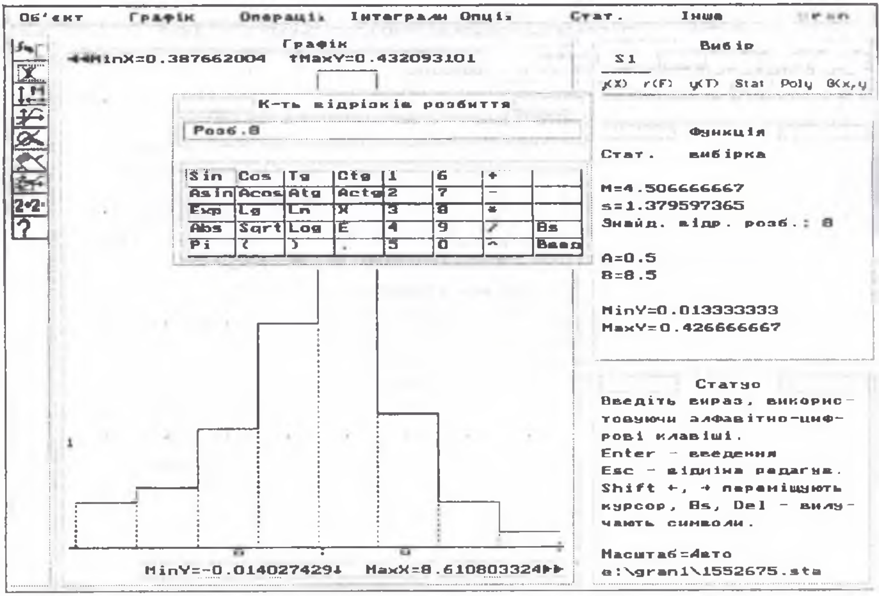


Рис. 1.140

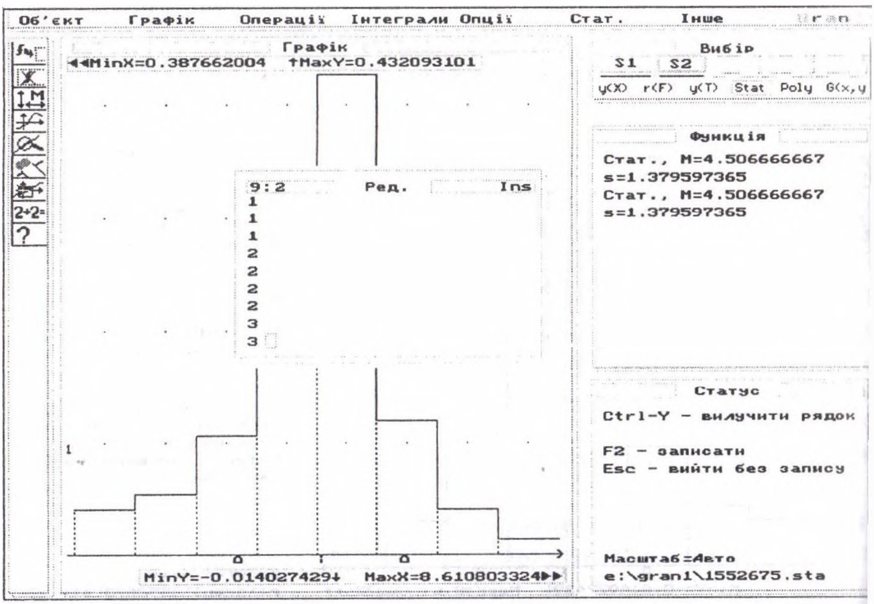


Рис. 1.141

Варіанти з клавіатури
Частоти з клавіатури
Відносні частоти з клавіатури
Вибірка з файла

При зверненні до підпункту «Варіанти з клавіатури» у вікні «Графік» з'являється допоміжне вікно (рис. 1.141), в якому в один стовпчик розташовано варіанти вибірки, що змінюється. Після внесення необхідних змін, які здійснюються цілком аналогічно до того, як редагується текстова інформація (з використанням клавіш *Bs*, *Delete*, *Insert*, вказівки *Ctrl-Y* для вилучення рядка, клавіш управління курсором та клавіш з потрібними символами), слід натиснути клавішу F2 (див. підказку на екрані внизу праворуч).

При зверненні до підпункту «Частоти з клавіатури» у вікні «Графік» з'являється додаткове вікно, в якому у дві колонки розташовані пари чисел – в лівій колонці варіанти, в правій – відповідні частоти (рис. 1.142). Редагування інформації та її запис здійснюється аналогічно до попереднього.

При необхідності переглянути таблицю частот вибірки, на позначення якої у вікні «Вибір» встановлено вказівник, використовується підпункт «Частотна таблиця» пункту «Стат.» головного меню. В цій таблиці подається три колонки чисел. Найлівіша колонка – це варіанти або ж межі проміжків розбиття, якщо ці межі не співпадають з введеними варіантами. Друга колонка – це частоти відповідних варіант, що вказані в першій колонці, або частоти попадання в проміжок, нижня і верхня межі якого вказані в першій колонці. Третя колонка – це накопичена сума всіх попередніх частот (рис. 1.143).

Призначення і використання підпункту «Відносні частоти з клавіатури» цілком аналогічні до попереднього. Слід пам'ятати, проте, що сума відносних частот повинна дорівнювати 1.

При зверненні до підпункту «Вибірка з файла» з'являється перелік файлів, що в даний момент є в активному піддиректорії. Після того, як вибрано один із цих файлів або, в разі потреби, здійснено перехід до іншого піддиректорію і вказано відповідне ім'я файла, у вікні «Графік» з'являється додаткове вікно з підпунктами:

Варіанти з файла
Частоти з файла
Відносні частоти з файла

Звернення до одного із цих підпунктів вказуватиме на те, як слід трактувати записані в файлі дані, цілком аналогічно до того, як це робилося при виконанні послуги «Нова вибірка».

Підпункт «Кількість відрізків розбиття» призначено для використання у разі необхідності змінити кількість відрізків, на яких визначаються частоти та відносні частоти попадання варіант в такі відрізки. Початкове значення кількості відрізків за програмою визначається

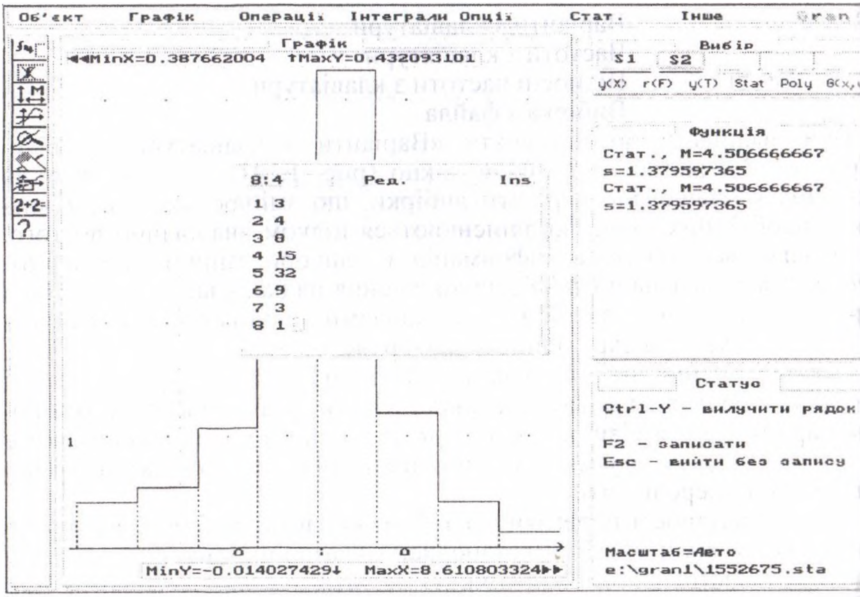


Рис. 1.142

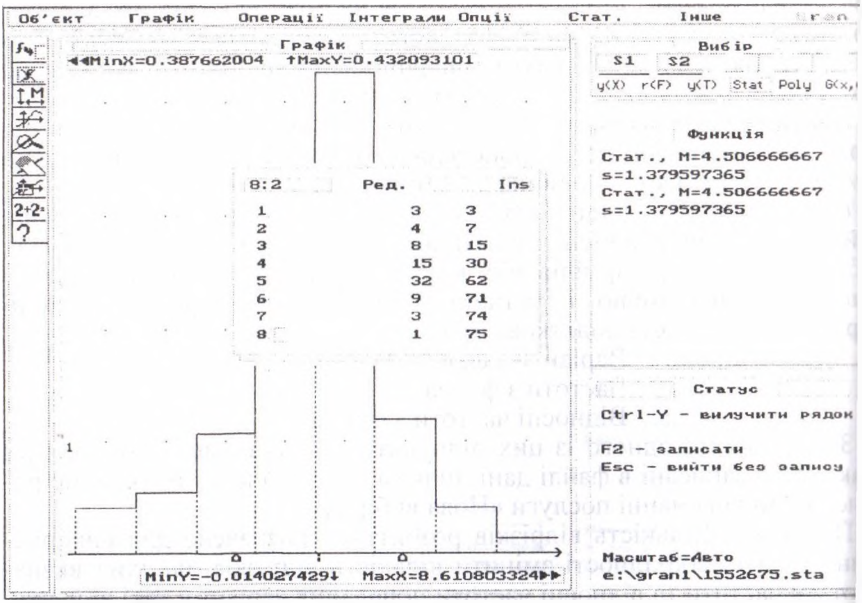


Рис. 1.143

автоматично. При зверненні до цього підпункту у вікні «Графік» з'являється панель калькулятора і над рядком введення запит: «К-ть відрізків розбиття». В рядку введення з написом «Розб.» вказана кількість відрізків розбиття, визначена за програмою. Нове значення вводиться з клавіатури чи з використанням панелі калькулятора, зображеної у вікні «Графік», та «мишки» чи клавіатури, як звичайно. Якщо немає потреби змінювати кількість відрізків розбиття, досить натиснути клавішу *Enter* (чи ліву клавішу «мишки»).

Підпункти «Вилучити» і «Вибір» при роботі із статистичними вибірками використовуються цілком аналогічно до того, як вони використовуються і при роботі із функціями. При вилученні вибірок тимчасові (робочі) файли, куди в процесі даного сеансу роботи з програмою записувалась інформація про вибірки, також вилучаються. Якщо ж вийти із програми, не вилучаючи вибірок, відповідні файли залишаються на носієві, де вони були записані, в директорії, що був активним на час створення файла.

Запитання для самоконтролю

1. Який тип задання функціональної залежності слід встановити перед початком статистичного аналізу експериментальних даних за допомогою програми *GRAN1*?
2. Як вводяться експериментальні дані до робочих файлів програми *GRAN1*?
3. Як вводяться варіанти з клавіатури?
4. Як вводяться частоти з клавіатури?
5. Як вводяться відносні частоти з клавіатури?
6. Яку додаткову вимогу повинні задовольняти відносні частоти, що вводяться з клавіатури?
7. Як вводяться варіанти з файла на диску?
8. Як вводяться частоти з файла на диску?
9. Як переглянути дані, що зберігаються в робочому файлі?
10. Як при необхідності можна вносити корективи до раніше введених даних?
11. Як можна інтерпретувати дані, що вводяться з клавіатури?
12. В якому вигляді на екрані подається набір введених раніше варіант, якщо вирішено їх переглянути чи відкоригувати?
13. В якому вигляді подається на екрані ряд розподілу частот, якщо вирішено його переглянути чи відкоригувати?
14. В якому вигляді подається на екрані ряд розподілу відносних частот, якщо вирішено його переглянути чи відкоригувати?
15. В якому вигляді подається на екрані інтервальний розподіл частот, якщо вирішено його переглянути чи відкоригувати?

Вправи для самостійного виконання

1. Ввести з клавіатури до робочого файла програми *GRAN1* 50 навмання вибраних значень із проміжку [0, 1].
2. Ввести з клавіатури спостережені значення досліджуваної величини та відповідні їм частоти:

x_i	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7
m_i	2	8	14	20	37	42	18	16	5	1

3. Ввести з клавіатури ряд розподілу відносних частот появи значень досліджуваної величини за даними вправи 2.

4. Ввести набір спостережених значень досліджуваної величини із наперед створеного файла в піддиректорії *GRAN1*.
5. Ввести ряд розподілу частот появи спостережених значень досліджуваної величини з наперед створеного файла в піддиректорії *GRAN1*.
6. Ввести з наперед створеного файла в піддиректорії *GRAN1* ряд розподілу відносних частот появи спостережених значень досліджуваної величини.

§ 20. Графічне подання результатів статистичного аналізу експериментальних даних

Для графічного подання полігонів частот, гістограм, функцій розподілу відносних частот появи значень досліджуваної величини, деяких числових характеристик розподілу відносних частот тощо можна скористатися послугою «Побудувати» пункту «Графік», вказавши попередньо тип графіка, для чого слід звернутися до послуги «Тип графіка» пункту «Стат.» (рис. 1.144).

При роботі із статистичними вибірками послуга «Побудувати» пункту «Графік» головного меню використовується цілком аналогічно, як і при побудові графіків функцій. Одночасно у вікні «Графік» може бути побудовано до 5 графіків для будь-яких із вказаних типів задання функціональних залежностей.

При роботі з однією гістограмою допустимими є операції «Інтеграл», «Об'єм, вісь OX», «Об'єм, вісь OY», «Площа за точками» в пункті «Інтеграли» головного меню і «Нерівність» в пункті «Операції».

При аналізові двох гістограм одночасно допустимими є всі операції із підменю пункту «Інтеграли» і «Нерівність» в пункті «Операції».

Підпункт «Стат.інфо.» («Статистична інформація») використовується при необхідності переглянути основні числові характеристики вибірки, на позначення якої встановлено вказівник у вікні «Вибір». При зверненні до цієї послуги на полі вікна «Функція» з'являється додаткове вікно із написом «Стат. х-ки» («Статистичні характеристики») (рис. 1.145), в якому подано: об'єм вибірки, розмах вибірки (Min x_i, Max x_i), мода, медіана, Ср. гарм., Ср. геом., Ср. арифм., Ср. квадр.

Середнє арифметичне M і середнє квадратичне відхилення s для кожної вибірки подаються також у вікні «Функція» (див. рис. 1.133, 1.134 та ін.).

Найменше і найбільше значення варіант при цьому можна спостерігати також у вікні «Графік», де за допомогою послуги «Координати» можна визначити частоти кожної з варіант, а також, використовуючи послуги різних пунктів головного меню програми, визначити інші необхідні характеристики вибірок та їм відповідних графічних зображень (гістограми, полігону частот, функції $F_n^*(x)$).

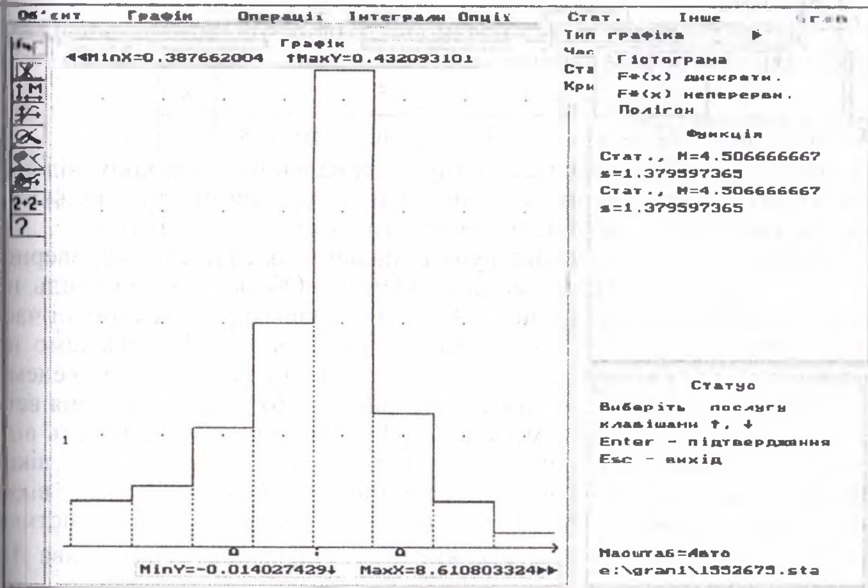


Рис. 1.144

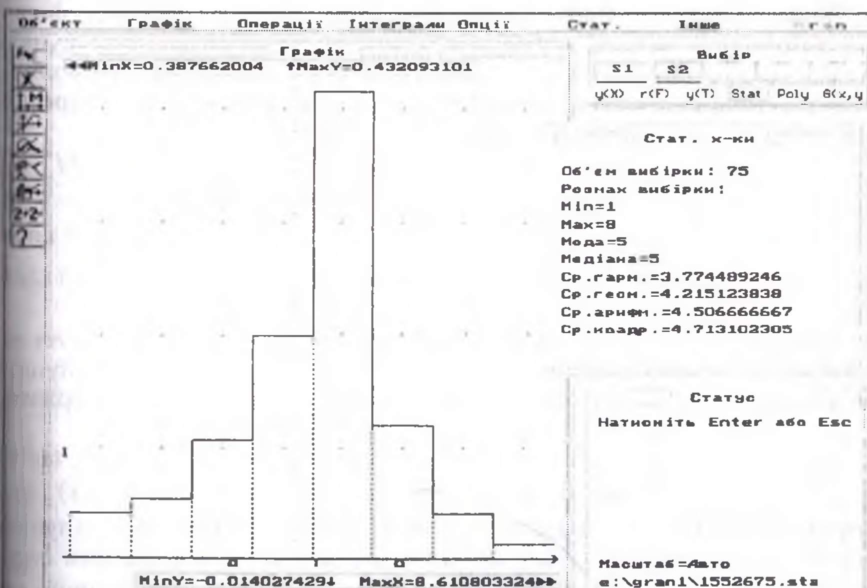


Рис. 1.145

Приклади

1. Нехай розподіл частот появи спостережених значень досліджуваної величини задано таблицею:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_i	12	17	19	37	30	10	8	5	4

Потрібно побудувати гістограму інтервального розподілу відносних частот спостережених значень. При цьому приймається кількість відрізків розбиття, яка за програмою визначається автоматично.

Встановивши тип задання функціональної залежності *Stat*, звернемось до підпункту «Нова вибірка» пункту «Об'єкт». У відповідь на запит «Варіанти з клавіатури», «Частоти з клавіатури», «Відносні частоти з клавіатури», «Вибірка з файла» (див. рис. 1.136) вкажемо на підпункт «Частоти з клавіатури». Після появи вікна введення введемо з клавіатури заданий розподіл частот (рис. 1.146) і після введення всіх заданих пар чисел натиснемо клавішу F2. Далі вкажемс кількість відрізків розбиття 9 (визначене за програмою). В результаті у вікні «Вибір» з'являється позначення S3 щойно введеної вибірки, а у вікні «Функція» – запис «Стат. вибірка» (рис. 1.147) і деякі характеристики вибірки: $M(M_n^*[X])$, $s\,(\sigma_n^*[X])$, кількість відрізків розбиття, ліва A і права B межі проміжка, який охоплює всі спостережені значення досліджуваної величини.

Якщо тепер звернутись послідовно до підпунктів «Тип графіка», «Гістограма» пункту «Стат» і далі до підпункту «Побудувати» пункту «Графік», то в результаті одержимо гістограму інтервального розподілу відносних частот на проміжку [0.5, 9.5[, поділеному на 9 інтервалів довжиною 1 з центрами в точках 1, 2, 3, ..., 8, 9.

На осі Ox відмічаються також точки з абсцисами $x = M_n^*[X]$ (центр розсіювання, на рис. 1.147 точка на осі Ox з абсцисою $x = 4.18$) та абсцисами $x = M_n^*[X] - \sigma_n^*[X]$ і $x = M_n^*[X] + \sigma_n^*[X]$ (вліво і вправо від центра розсіювання відкладається по одному разу $\sigma_n^*[X]$) (див. рис. 1.147).

Щоб пересвідчитись, що площа під гістограмою (над віссю Ox) дорівнює 1, можна скористатись послугою «Інтеграл» пункту «Інтеграли». Вказавши межі інтегрування $a = 0.5$, $b = 9.5$, одержимо $I = 1.001$ (рис. 1.148).

Щоб побудувати графік функції розподілу відносних частот $F_n^*(x)$, слід звернутись до підпунктів «Тип графіка», «$F^*(x)$ дискретн.» чи «$F^*(x)$ неперервн.» пункту «Стат» і далі до підпункту «Побудувати» пункту «Графік». В результаті на екрані дисплея одержимо дискретний чи неперервний графік $F_n^*(x)$. Для даного прикладу графіки подані на рис. 1.149, рис. 1.150.

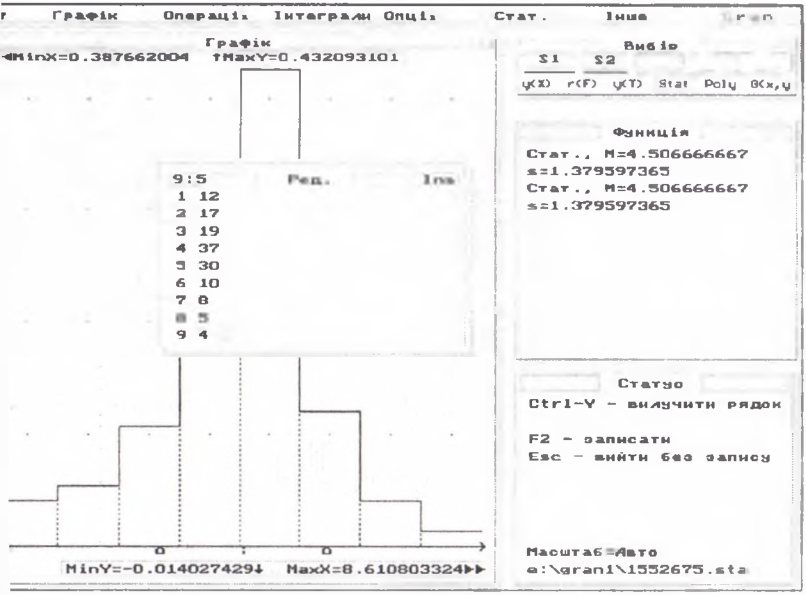


Рис. 1.146

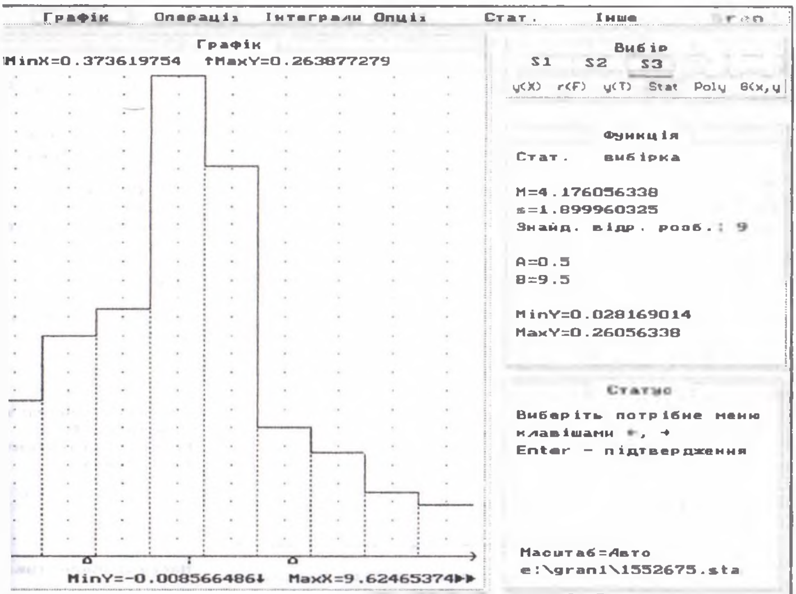


Рис. 1.147

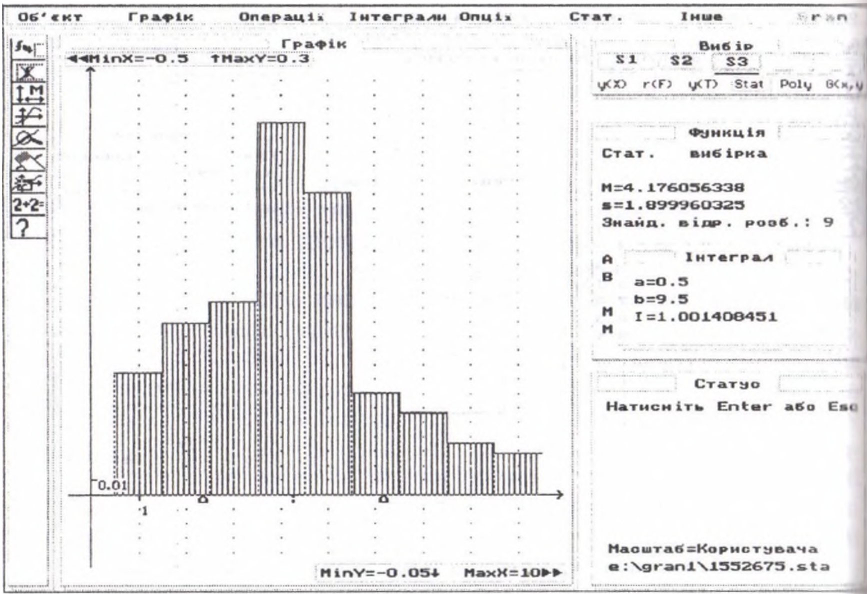


Рис. 1.148

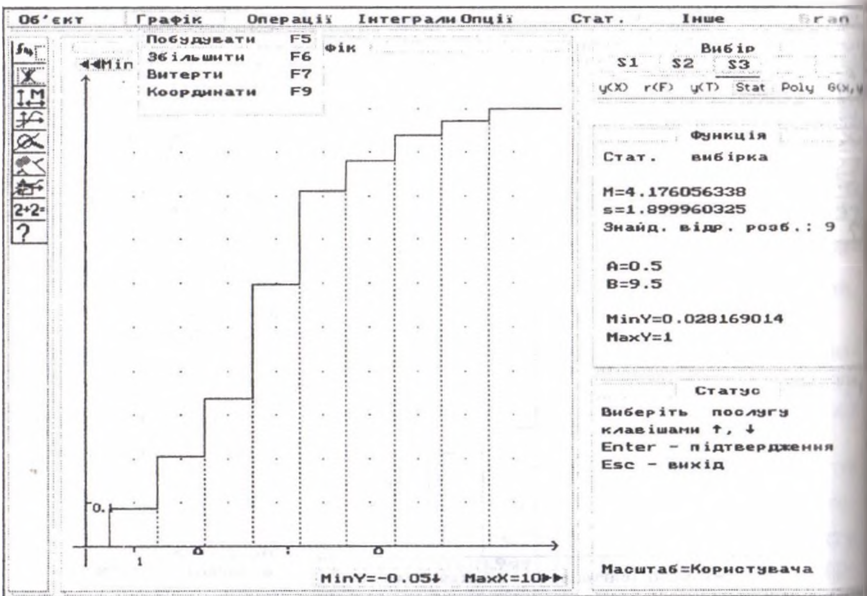


Рис. 1.149

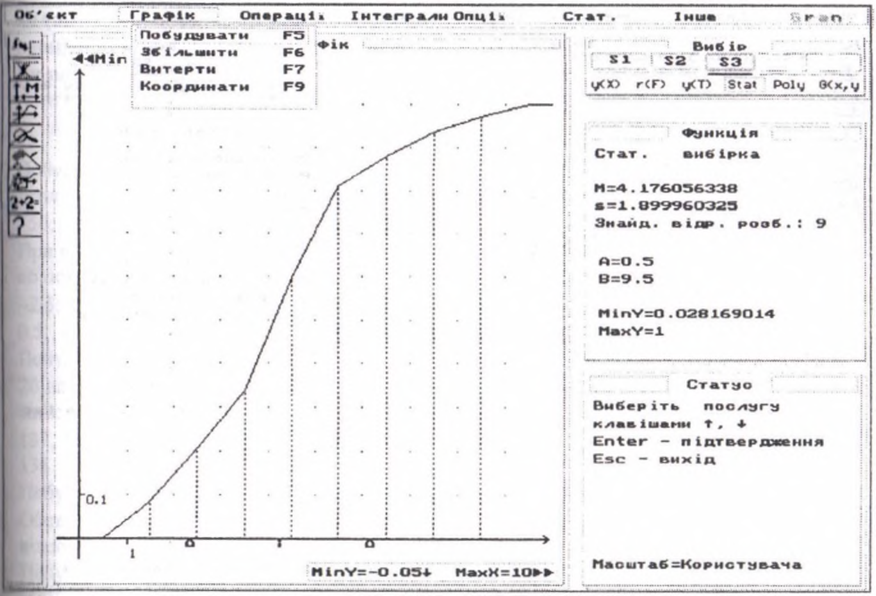


Рис. 1.150

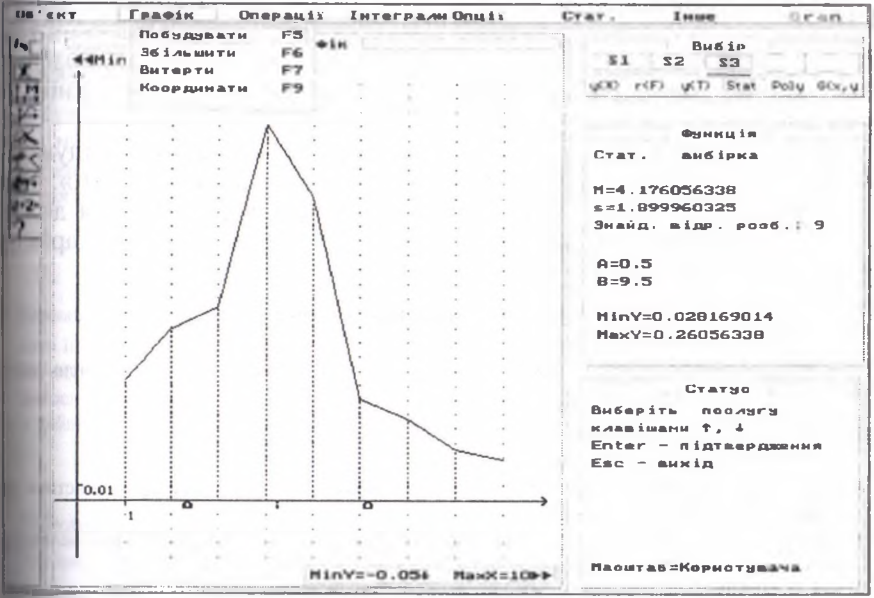


Рис. 1.151

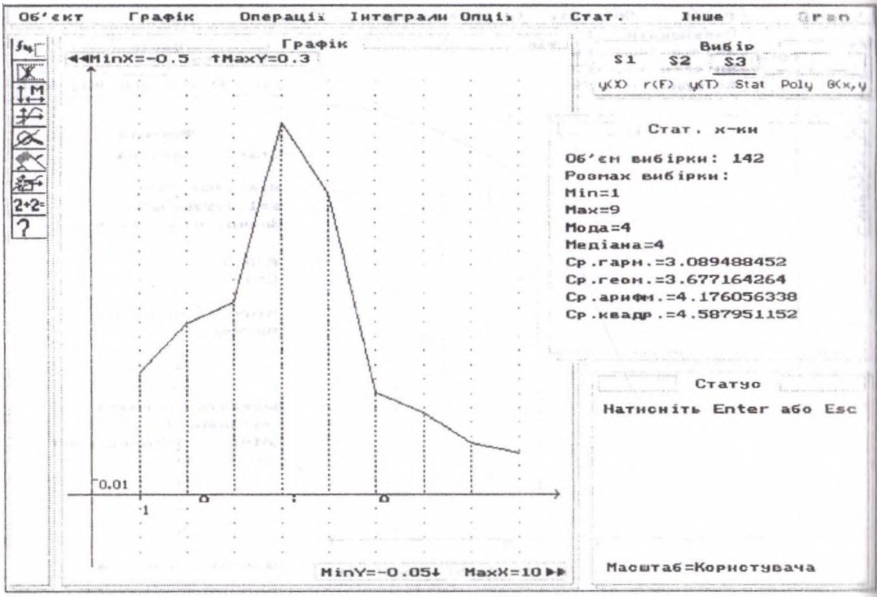


Рис. 1.152

Щоб побудувати полігон відносних частот появи спостережених значень досліджуваної величини, слід вказати на підпункти «Тип графіка», «Полігон» пункту «Стат» і далі «Побудувати» пункту «Графік». Для даного прикладу одержимо полігон відносних частот, поданий на рис. 1.151.

Щоб переглянути основні числові характеристики розглядуваної вибірки, скористаємось послугою «Стат. інфо.» пункту «Стат.». При зверненні до цієї послуги на полі вікна «Функція» з'являється додаткове вікно «Стат. х-ки», в якому подаються основні числові характеристики розглядуваної вибірки (рис. 1.152).

Запитання для самоконтролю

1. Як з використанням послуг програми *GRAN1* побудувати:
   а) гістограму інтервального розподілу відносних частот появи спостережених значень досліджуваної величини?
   б) функцію розподілу відносних частот $F_n^*(x)$?
   в) полігон відносних частот?
2. Як з використанням послуг програми *GRAN1* отримати основні числові характеристики досліджуваної вибірки?
3. Як визначити найбільшу відносну частоту та відповідне значення досліджуваної величини, якщо побудовано полігон частот?
4. Як за гістограмою наближено визначити відносну частоту попадання спостережених значень досліджуваної величини на проміжок $[\alpha, \beta[\subset [A, B]$? Тут A і B відповідно нижня і верхня межі інтервалу, на якому побудовано гістограму. При цьому припускається, що інтер…

ли $[a_{i-1}, a_i[$, на яких визначено відповідні значення ординат на гістограмі, дуже дрібні, а проміжок $[\alpha, \beta[$ охоплює досить значну кількість таких інтервалів).

Чи потрібно попередньо виконувати які-небудь обчислення, перш ніж скористатися послугами програми *GRAN1* для статистичного аналізу експериментальних даних?

Вправи для самостійного виконання

Побудувати ряд розподілу і полігон частот для вибірки, яку утворюють відхилення результатів вимірювання відстані між двома точками від істинного значення цієї відстані:

−50, 20, −10, 10, 20, −50, −20, −10, 40, −20, −30, −10, 10, 20, −40, 50, −10, 10, 50.

При визначенні похибки вимірювального приладу зроблено 40 вимірів, при яких зафіксовано похибки:

−2.5; 3; 4; 2; 0.5; −1; 2; 4; −4; 0; −0.5; −0.5; 1; 0.5; 2.5; −0.5; 2; 1; −4; −2; −1; 1,5; 0.5; 4; −1.5; −1; 0; 1; 0; 1; −1.5; 1.5; 0.5; 0.5; −0.5; −1.5; −0.5; −1; 2; 0.5.

Побудувати інтервальний ряд розподілу частот і гістограму частот, поклавши $n = 8$.

20 навмання взятих учнів виконують стрибки у висоту, при цьому зафіксовано такі результати:

137, 140, 143, 135, 142, 139, 141, 137, 142, 131, 145, 138, 141, 143, 130, 138, 140, 135, 137, 138.

Побудувати ряд розподілу частот, полігон частот, гістограму для $n = 10$.

Обстежено 10 навмання взятих 7-х класів. Кількість відмінників в кожному з них виявилась відповідно: 5, 8, 3, 4, 5, 1, 6, 4, 2, 3.

Побудувати ряд розподілу частот, функцію розподілу частот для досліджуваної величини.

Навмання перевірено 50 телеприймачів і дані цієї перевірки зведено в таблицю

Час безвідмовної роботи в роках	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
Кількість телеприймачів	1	1	2	4	4	7	10	10	6	3	1	1

Побудувати функцію розподілу частот $F_{50}^{*}(x)$ та її наближений графік.

На 100 навмання вибраних ділянках землі в даному районі висаджено по 100 саджанців фруктових дерев. Для кількості саджанців, що прийнялися, побудовано інтервальний розподіл спостережених частот

I_i	[0,10[	[10,20[	[20,30[	[30,40[	[40,50[	[50,60[	[60,70[	[70,80[	[80,90[	[90,100[
p_m^{*}	0.05	0.08	0.12	0.14	0.15	0.20	0.10	0.08	0.06	0.02

Визначити значення функції розподілу частот $F_{100}^{*}(x)$ в кінцях заданих інтервалів і побудувати її графік.

На 100 однакових за розмірами навмання вибраних ділянках землі з однаковою кількістю внесених добрив зібрано різний урожай зерна. Результати проведених спостережень подано у таблиці:

Урожай (в ц/га)	14	15	16	17	18	19	20
Кількість ділянок	6	10	18	28	20	12	6

Побудувати полігон частот. Визначити середнє арифметичне $M_n^{*}[X]$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma_n^{*}[X]$.

Кількість викликів, що поступають на АТС за 1 годину, є випадкова величина. Для спостережень протягом кількох днів навмання вибрано 10 разів по 1 годині між дев'ятою і дванадцятою годиною і одержано такі результати:

№ спостереження	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Кількість викликів	280	320	315	300	285	270	300	330	310	290

Побудувати полігон частот. Знайти середнє арифметичне і середнє квадратичне відхилення для досліджуваної величини.

9. Одна і та ж віддаль вимірюється багато разів. Результати 10 різних вимірювань наведено в таблиці:

№ вимірювання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Результат вимірювання	41	39.5	40	40.2	39.9	40.2	39.8	40.1	40	39.9

Побудувати полігон частот. Знайти числові характеристики $M_n^*[X]$, $\sigma_n^*[X]$.

10. Для визначення середнього часу безвідмовної роботи електроприладу обстежено 100 приладів. За результатами спостережень одержано ряд розподілу частот

x_i	1070	1120	1170	1220	1270	1320	1370	1420
p_{100i}^*	0.02	0.08	0.11	0.20	0.35	0.15	0.06	0.03

Побудувати полігон частот. Знайти числові характеристики $M_n^*[X]$, $\sigma_n^*[X]$.

§ 21. Визначення узгодженості із спостереженими даними гіпотези про розподіл частот

Позначимо через $f_n^*(x)$ функцію, графіком якої є гістограма інтервального розподілу відносних частот появи спостережених значень досліджуваної величини, тобто кусково-сталу функцію $f_n^*(x)$ таку, що за межами проміжка $[a_0, a_m[$ набуває значень, рівних нулеві, а в точках проміжка $[a_{i-1}, a_i[$ набуває значень $\dfrac{p_i^*}{a_i - a_{i-1}}$. Очевидно,

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x)dx = \frac{p_i^*}{a_i - a_{i-1}} \cdot (a_i - a_{i-1}) = p_i^* = P_n^*(X \in [a_{i-1}, a_i[).$$

У геометричному тлумаченні $\int_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x)dx$ є площа прямокутника, обмеженого лініями $y = f_n^*(x_i) = \dfrac{p_i^*}{a_i - a_{i-1}}$, $y = 0$, $x = a_{i-1}$, $x = a_i$. Таким чином відносна частота попадання спостережених значень на проміжок $[a_{i-1}, a_i[$ дорівнює інтегралу від функції $f_n^*(x)$ по проміжку $[a_{i-1}, a_i[$. Якщо взяти довільний проміжок $[\alpha, \beta[$, такий, що α співпадає з лівим кінцем деякого інтервалу $[a_{i-1}, a_i[$, β – з правим кінцем деякого інтервалу $[a_{k-1}, a_k[$, ($\alpha < \beta$, $i < k$), то очевидно

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_n^*(x)dx = \sum_{[a_{i-1}, a_i[\subset [\alpha, \beta[} p_i^*,$$

тобто відносна частота попадання спостережених значень на проміжок $[\alpha, \beta[$ дорівнює інтегралу від функції $f_n^*(x)$ по проміжку $[\alpha, \beta[$:

$$P_n^*(X \in [\alpha, \beta[) = \int_{\alpha}^{\beta} f_n^*(x)dx.$$

З іншого боку

$$p_i^* = P_n^*(X \in [a_{i-1}, a_i[) = F_n^*(a_i) - F_n^*(a_{i-1}),$$

$$P_n^*(X \in [\alpha, \beta[) = \sum_{[a_{i-1}, a_i[\subset [\alpha, \beta[} p_i^* = \sum_{[a_{i-1}, a_i[\subset [\alpha, \beta[} (F_n^*(x_i) - F_n^*(x_{i-1})) = F_n^*(\beta) - F_n^*(\alpha).$$

Таким чином $f_n^*(x)$ характеризує середню швидкість зростання функції $F_n^*(x)$ в точках проміжка $[a_{i-1}, a_i[$. Якщо вважати, що функція $F_n^*(x)$ на проміжках $[a_{i-1}, a_i[$ не є сталою, а зростає лінійно, тобто для $x \in [a_{i-1}, a_i[$

$$F_n^*(x) = F_n^*(a_{i-1}) + \frac{F_n^*(a_i) - F_n^*(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}}(x - a_{i-1}),$$

тоді на відрізку $[a_{i-1}, a_i[$

$$(F_n^*(x))' = \frac{F_n^*(a_i) - F_n^*(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}} = \frac{p_i^*}{a_i - a_{i-1}} = f_n^*(x).$$

Таким чином в точках проміжка $[a_0, a_m[$ функція $f_n^*(x)$ характеризує швидкість зростання функції $F_n^*(x)$, тобто $f_n^*(x)$ може розглядатися як похідна по відношенню до функції $F_n^*(x)$, а $F_n^*(x)$ – як первісна по відношенню до функції $f_n^*(x)$.

Якщо довжини відрізків $[a_{i-1}, a_i[$ досить малі, то при довільних $[\alpha, \beta[$ можна покласти

$$P_n^*(X \in [\alpha, \beta[) \approx \int_{\alpha}^{\beta} f_n^*(x)dx = F_n^*(\beta) - F_n^*(\alpha),$$

не припускаючись при цьому великої похибки.

Отже фактично графік функції $F_n^*(x)$ є графіком функції

$\int f_n^*(x)dx$, (оскільки при всіх $x < a_0$ $F_n^*(x) = 0$).

Виникає питання, чи не можна функцію $f_n^*(x)$ замінити деякою функцією $f(x)$ так, щоб для будь-яких α, β значення

$$P_n^*(X \in [\alpha, \beta[\,) = \int_\alpha^\beta f_n^*(x)dx$$

з достатньою точністю можна було замінити значенням $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, і в такий спосіб таблично подану функцію $f_n^*(x)$ наблизити деяким аналітичним виразом $f(x)$.

Гіпотезу про те, що функція $f(x)$ досить добре наближає функцію $f_n^*(x)$, перевіряють за так званим критерієм Пірсона.

Згідно з цим критерієм для всіх інтервалів $[a_{i-1}, a_i[$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, для значень p_i^* знаходять наближення p_i за формулою $p_i = \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)dx$, після чого оцінюють величину χ^2 (хі-квадрат): $\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} c_i (p_i - p_i^*)^2$, де $c_i = \frac{n}{p_i}$ – «вагові» коефіцієнти значень $(p_i - p_i^*)^2$.

Так отримане значення χ^2 називають спостереженим значенням $\chi^2_{\text{експ}}$ (χ^2 експериментальне).

Однак, якщо проводити інші серії спостережень за тією ж величиною, то в кожній з них можуть бути одержані інші значення $\chi^2_{\text{експ}}$. Якщо таких серій спостережень проведено дуже багато, то для величини χ^2 можна побудувати функції $f_\chi(x)$ і $F_\chi(x)$, аналогічні до функцій $f_n^*(x)$ та $F_n^*(x)$, розглянутих вище, і в такий спосіб (з використанням, наприклад, функції $F_\chi(x)$) визначити, при якому значенні $\chi^2_{\text{кр}}$ відносна частота попадання спостережуваних значень величини χ^2 на проміжок $]-\infty, \chi^2_{\text{кр}}[$ набуватиме наперед заданого значення α:

$$P_N^*(\chi^2 < \chi^2_{\text{кр}}) = \alpha.$$

Якщо при цьому α дорівнює, наприклад, 0.99, то відносна частота попадання значень χ^2 правіше значення $\chi^2_{\text{кр}}$ дорівнює 0.01, тобто попадання значення χ^2 правіше від значення $\chi^2_{\text{кр}}$ слід вважати практично неможливим. Зауважимо, що якщо число спостережень дуже велике, то усереднений результат всієї маси спостережень стає передбачуваним в досить чітких межах з досить великою мірою впевненості. Тому, якщо спостережене значення $\chi^2_{\text{експ}}$ більше, ніж $\chi^2_{\text{кр}}$, то такий ре

...ультат $\chi^2_{\text{експ}}$ слід вважати практично неможливим (малоймовірним), і ...ому гіпотезу про те, що функція $f(x)$ є коректним наближенням функ...ції $f_n^*(x)$, необхідно відхилити, не ризикуючи припуститися грубої ...омилки, оскільки в 99 випадках із 100 значення $\chi^2_{\text{експ}}$ менше, ніж ...начення $\chi^2_{\text{кр}}$.

Число α називають рівнем значущості оцінки $\chi^2_{\text{кр}}$. Значення $\chi^2_{\text{кр}}$ ...находять за спеціальними таблицями, побудованими для величини χ^2, за якими за даним рівнем значущості α можна визначити відповід...не значення $\chi^2_{\text{кр}}$. Таким чином, знайшовши $\chi^2_{\text{експ}}$ і визначивши $\chi^2_{\text{кр}}$, ...що відповідає заданому рівню значущості α, слід проаналізувати спів...відношення значень $\chi^2_{\text{експ}}$ і $\chi^2_{\text{кр}}$. Якщо $\chi^2_{\text{експ}} > \chi^2_{\text{кр}}$, гіпотезу про те, що ...функція $f(x)$ є коректним наближенням функції $f_n^*(x)$, слід відхилити ...як таку, що не узгоджується з результатами спостережень.

Якщо ж $\chi^2_{\text{експ}} < \chi^2_{\text{кр}}$, тоді вважається, що така гіпотеза не суперечить ...експериментальним даним і немає підстав її відхиляти.

У програмі *GRAN1* передбачено перевірку за критерієм Пірсона гі...потези про коректність заміни функції $f_n^*(x)$ функцією $f(x)$. Для цьо...го використовується послуга «Критерій Пірсона» пункту «Стат» (рис. 1.153).

Позначення статистичної вибірки і функції, які співставляються, у ...вікні «Вибір» повинні бути підкресленими.

Область визначення функції повинна охоплювати область, в якій ...змінюються варіанти вибірки. Необхідна інформація про вибірку ви...водиться праворуч у вікні «Функція», якщо у вікні «Вибір» підкре...слено позначення лише однієї вибірки.

Співставляти за критерієм Пірсона можна також дві вибірки, варі...анти яких змінюються в одних і тих самих межах (співпадають «відрізки задання» вибірок).

При зверненні до пункту «Критерій Пірсона» за програмою переві...ряються дві умови:

1. Відрізок $[a, b]$, на якому визначено гіпотетичну функцію $f(x)$, повинен повністю охоплювати межі, в яких змінюються варіанти вибірки ($[A, B] \subset [a, b]$).
2. Повинна виконуватись умова

$$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

Якщо перша умова не виконується, у вікні «Графік» з'являється ...даткове вікно з повідомленням (рис. 1.154):

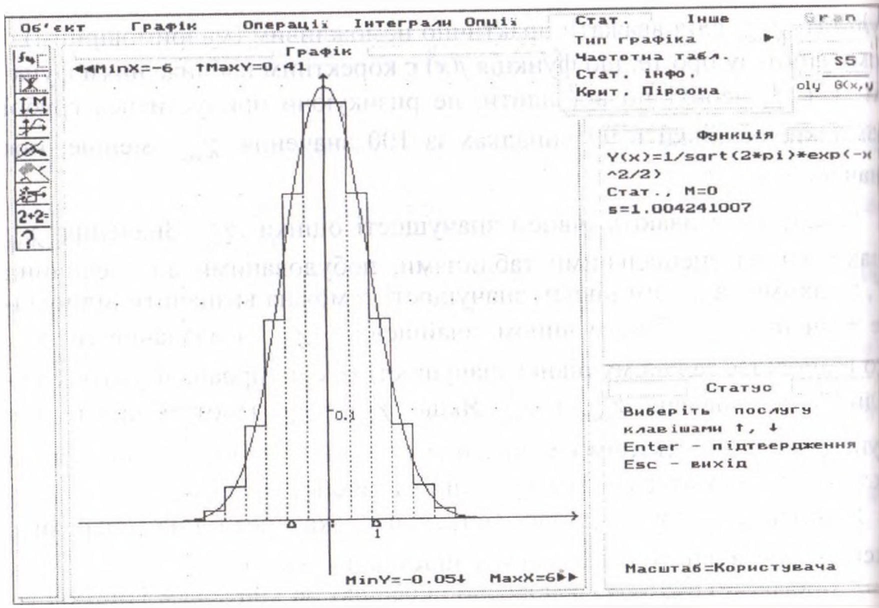


Рис. 1.153

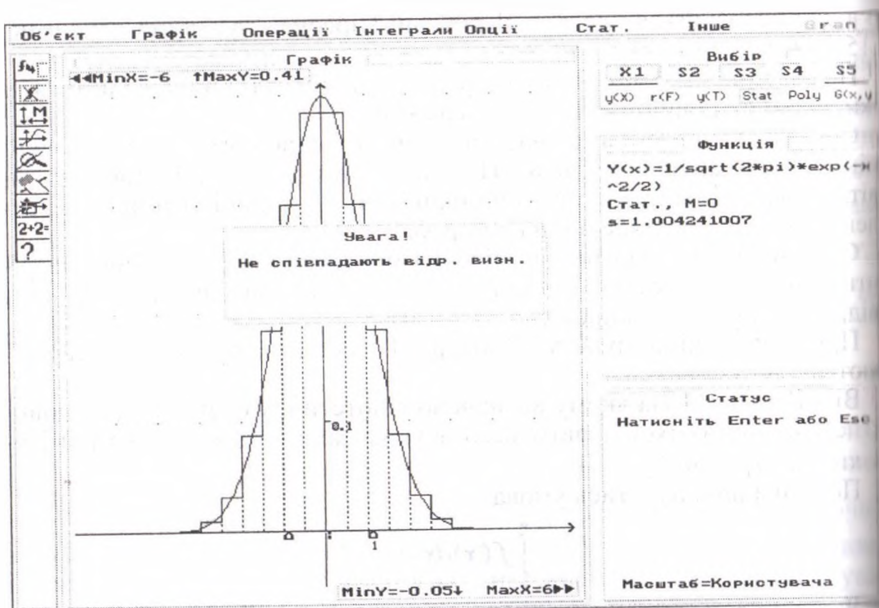


Рис. 1.154

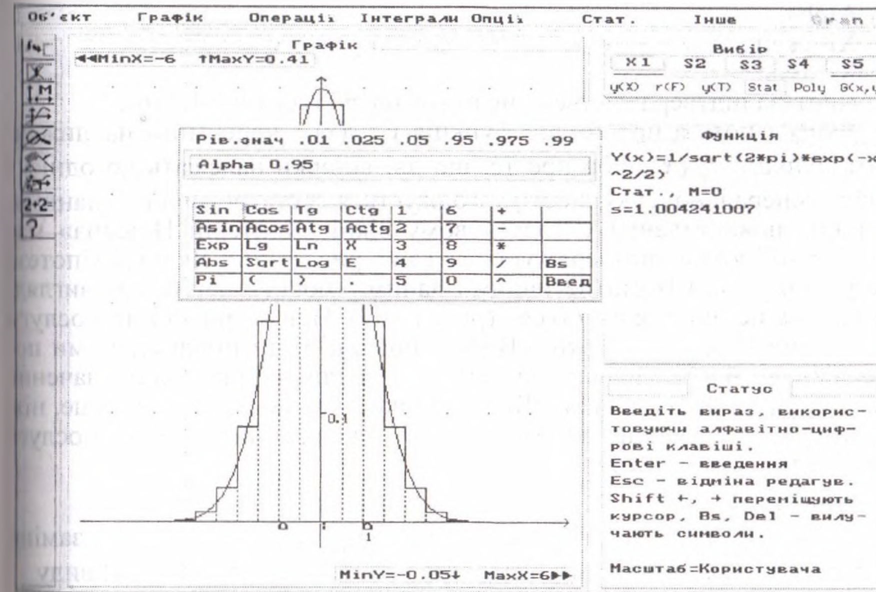


Рис. 1.155

Увага!

Не співпадають відрізки визнач.

Це означає, що необхідно змінити відрізок $[a, b]$, на якому визначено функцію $y = f(x)$, так, щоб виконувалась вимога $[A, B] \subset [a, b]$. Для цього використовується підпункт «Змінити відрізок» пункту «Функція».

Якщо обидві вимоги $[A, B] \subset [a, b]$ і $\int_a^b f(x)dx = 1$ виконуються, то у вікні «Графік» з'являється панель калькулятора, над якою розташовано рядок введення з надписом «Alpha», і додаткове вікно з надписом «Рів. знач. .01 .025 .05 .95 .975 .99» (рис. 1.155).

При цьому в рядку Alpha подається початкове значення рівня значущості 0.95. Якщо немає потреби його змінювати, досить натиснути клавішу *Enter* або встановити курсор «мишки» на поле «Введ» на панелі калькулятора і натиснути ліву клавішу «мишки». Якщо є потреба ввести інше значення із вказаних, таке введення здійснюється з клавіатури чи з панелі «калькулятора» за допомогою клавіатури чи «мишки» як звичайно.

Після того як рівень значущості α введено, на полі вікна «Функція» з'являється додаткове вікно з написом «Критерій Пірсона», в якому подано значення

Alpha,
Xi^2 експ.,
Xi^2 теор.,
гіпотеза підтверджується / не підтверджується (рис 1.156).

Якщо гіпотеза про те, що функція $y = f(x)$ є коректним наближенням функції $f_n^*(x)$, або про те, що дві вибірки належать до однієї і тієї ж генеральної сукупності, узгоджується із статистичними даними, останнє повідомлення у додатковому вікні «Критерій Пірсона» має вигляд: «Гіпотеза підтверджується» (див. рис. 1.156). Якщо ж гіпотеза не узгоджується із статистичними даними, повідомлення має вигляд «Гіпотеза не підтверджується» (рис. 1.157). При зверненні до послуги «Критерій Пірсона» у вікні «Вибір» повинні бути підкресленими позначення функції, заданої у вигляді $y = f(x)$, та вибірки, чи позначення двох вибірок. Якщо у вікні «Вибір» підкреслено більше чи менше, ніж 2 позначення функцій вказаного типу задання чи вибірок, послуга «Критерій Пірсона» стає недоступною.

Приклади

1. Нехай потрібно перевірити гіпотезу про коректність заміни функції $f_n^*(x)$, графік якої подано на рис. 1.158, функцією $f(x)$ виду

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

заданою на проміжку $[a, b]$. Покладемо спочатку $m = 4$, $\sigma = 1$, $a = 0$, $b = 8$ і побудуємо графіки функцій $y = f_n^*(x)$ та $y = f(x)$ (рис. 1.159). Якщо тепер звернутись до послуги «Критерій Пірсона», то на екрані дисплея з'являється повідомлення «Увага! Не співпадають відрізки визначення» (рис. 1.160).

Виберемо далі функцію

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,1.9} e^{-\frac{(x-4.18)^2}{2(1.9)^2}},$$

поклавши $a = -3$, $b = 11$, $m = 4.18$, $\sigma = 1.9$. Цього разу відрізок $[-3, 11]$ визначення функції $f(x)$ повністю охоплює відрізок $[0.5; 9.5]$ визначення функції $f_n^*(x)$, і $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 1$ з достатньою точністю (рис. 1.161). Після звернення до послуги «Критерій Пірсона» наведені раніше повідомлення про невідповідність відрізків визначення чи нерівність одиниці значення інтеграла $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ тепер не з'являються, а з'являється запрошення вказати рівень значущості α (рис. 1.162).

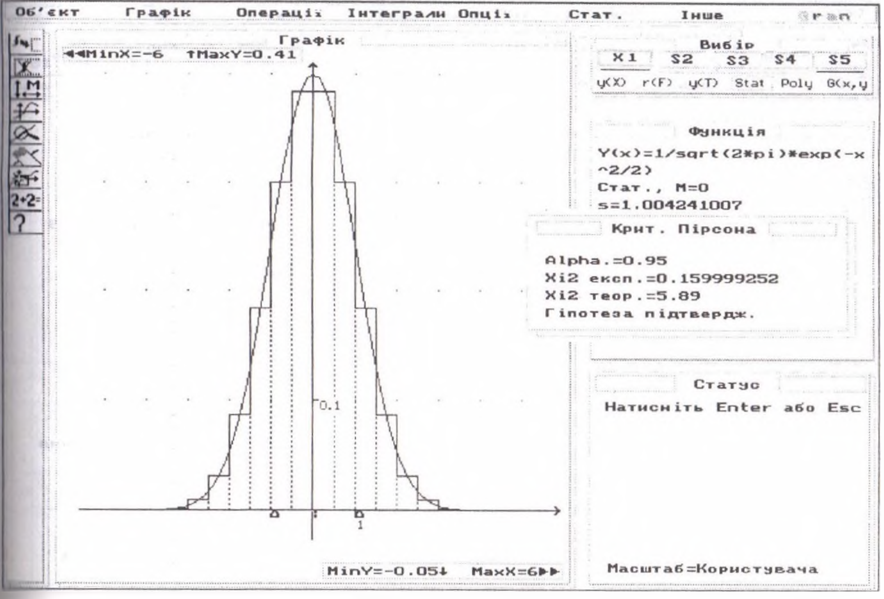


Рис. 1.156

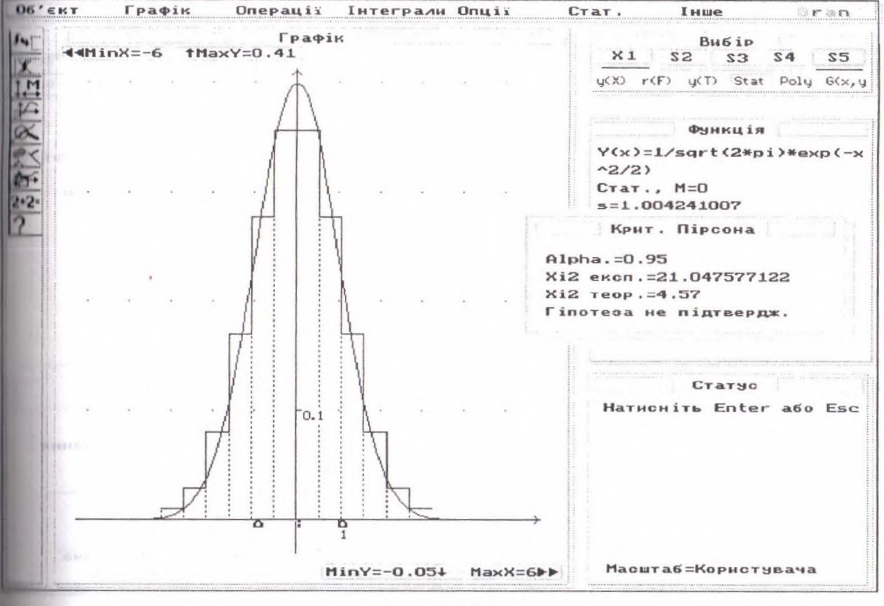


Рис. 1.157

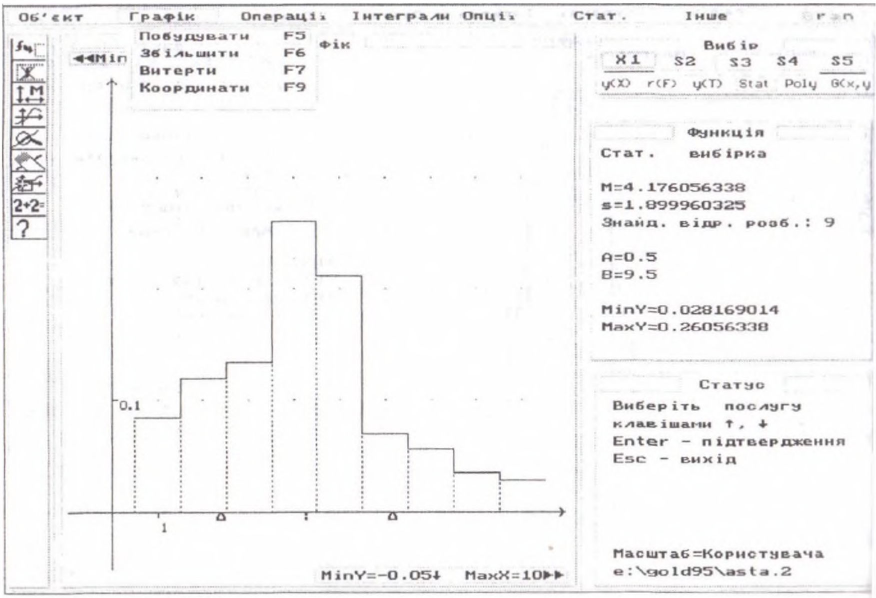


Рис. 1.158

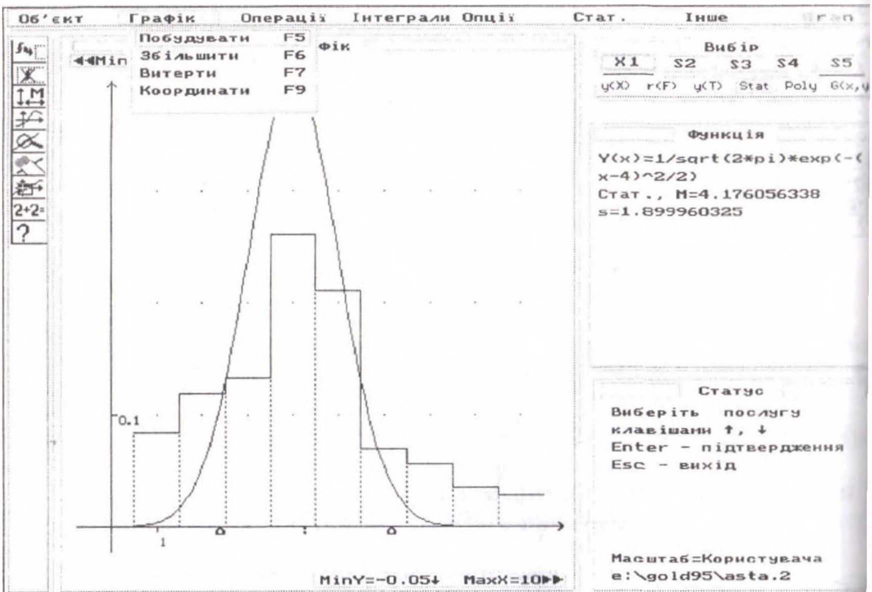


Рис. 1.159

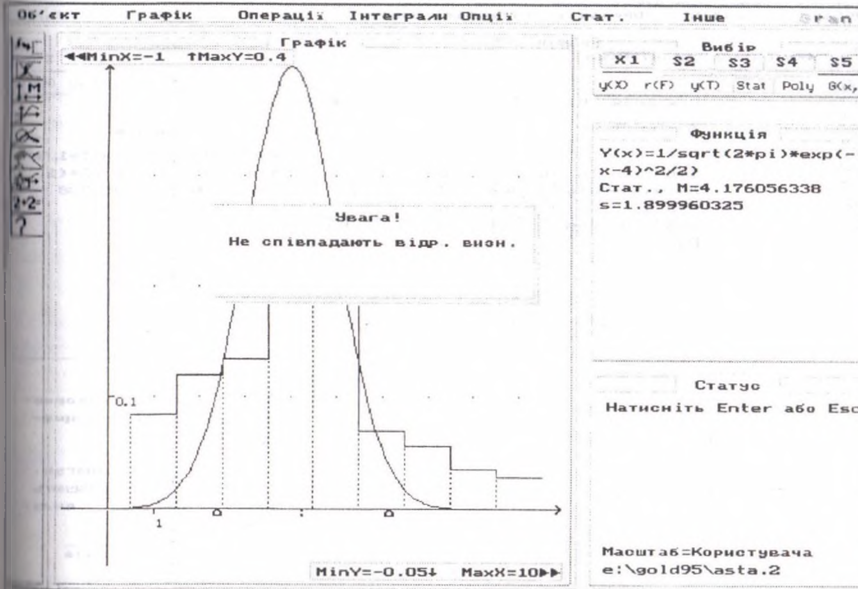


Рис. 1.160

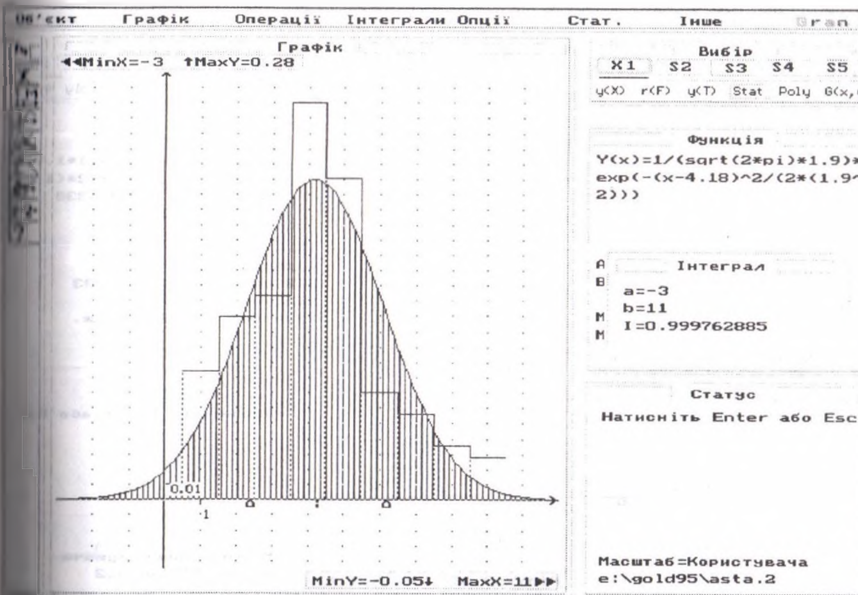


Рис. 1.161

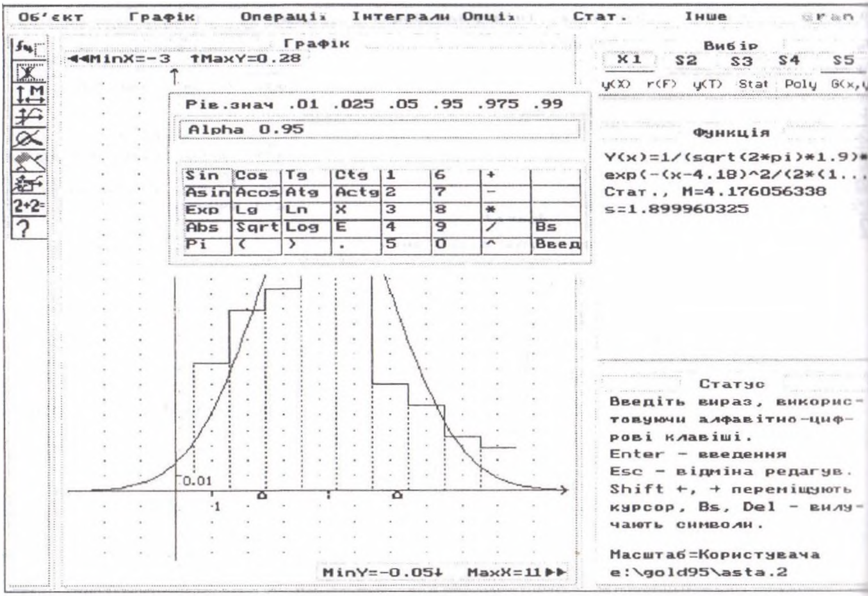


Рис. 1.162

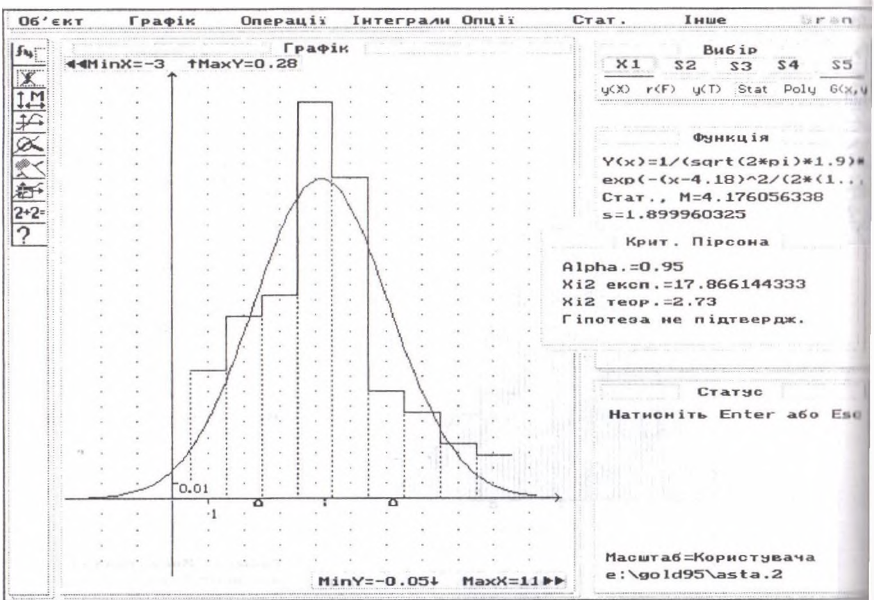


Рис. 1.163

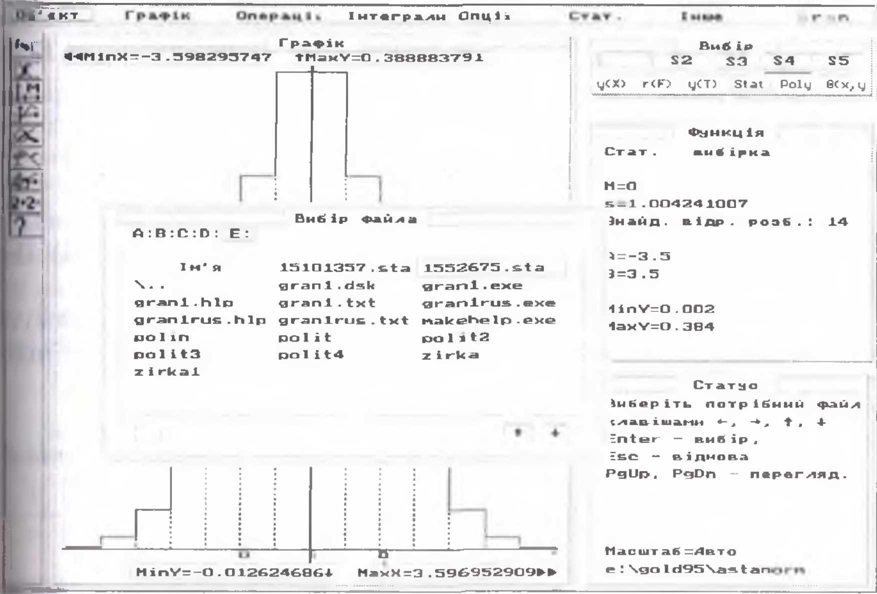


Рис. 1.164

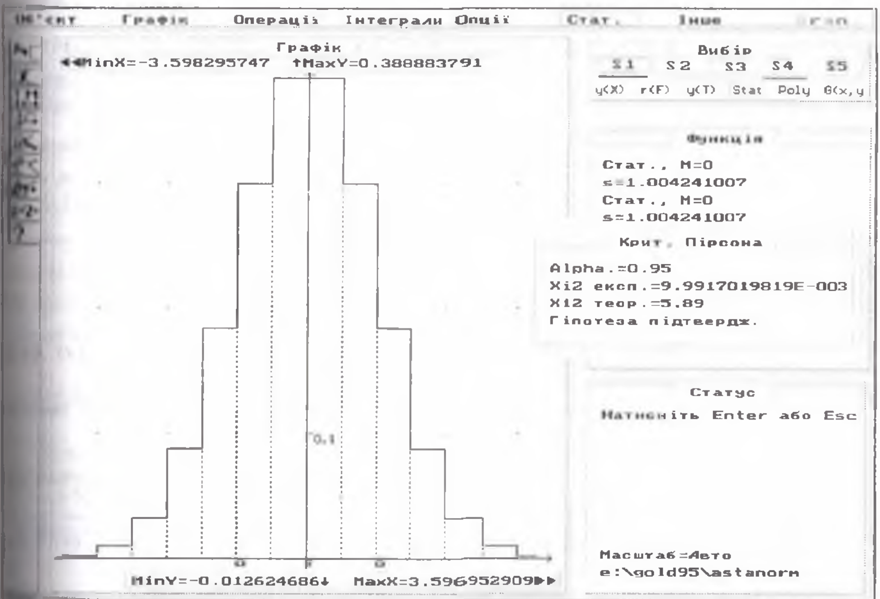


Рис. 1.165

Після введення рівня значущості Alpha = 0,95 на полі вікна «Функція» з'являється додаткове вікно «Крит. Пірсона» з повідомленням (рис 1.163):

Alpha = 0.95,

$\chi^2_{\text{експ}} = 17.866$,

$\chi^2_{\text{теор}} = 2.73$,

Гіпотеза не підтверджується.

2. З одного і того ж файлу введено вибірки $S1$ і $S4$ (рис. 1.164). Порівняти їх за критерієм Пірсона.

Цього разу гіпотеза про те, що функція $f_n^*(x)$ коректно може бути замінена нею ж, не викликає сумнівів. Цей очевидний результат підтверджується і за критерієм Пірсона (рис. 1.165).

Запитання для самоконтролю

1. Як знайти відносну частоту попадання значень досліджуваної величини на проміжок $[\alpha, \beta[$, якщо відома функція $f_n^*(x)$?
2. Чому дорівнює $\int_{-\infty}^{\infty} f_n^*(x)dx$?
3. Як, знаючи функцію $F_n^*(x)$, знайти відносну частоту попадання значень досліджуваної величини на проміжок $[\alpha, \beta[$?
4. Що характеризує $f_n^*(x)$ по відношенню до $F_n^*(x)$?
5. Як, знаючи $f_n^*(x)$, знайти $F_n^*(x)$?
6. Як, знаючи $F_n^*(x)$, знайти $f_n^*(x)$?
7. Чому дорівнюють значення: $F_n^*(-\infty)$? $F_n^*(+\infty)$?
8. Чи може $f_n^*(x)$ набувати від'ємних значень?
9. Чи може $F_n^*(x)$ набувати від'ємних значень?
10. Чи може функція $F_n^*(x)$ спадати із зростанням x?
11. Чи може функція $f_n^*(x)$ спадати із зростанням x?
12. Чи обов'язково $F_n^*(x_1) < F_n^*(x_2)$, якщо $x_1 < x_2$?
13. Як за критерієм Пірсона встановити коректність наближеної заміни функції $f_n^*(x)$ функцією $f(x)$?
14. Які умови повинна задовольняти функція $f(x)$, якою пропонується наближено замінити функцію $f_n^*(x)$?
15. Як за критерієм Пірсона оцінюється близькість функцій $f_n^*(x)$ і $f(x)$? Як обчислюється міра такої близькості?
16. Яке значення називають спостереженим значенням міри близькості функцій $f_n^*(x)$ і $f(x)$, оцінюваної за критерієм Пірсона?
17. Як для заданого рівня значущості визначають критичне значення, правіше від якого практично неможлива поява спостережуваних значень $\chi^2_{\text{експ}}$?

В яких випадках вважають, що за критерієм Пірсона гіпотеза про коректність заміни функції $f_n^*(x)$ функцією $f(x)$ не узгоджується з експериментальними даними ?

Як перевірити за критерієм Пірсона гіпотезу про коректність заміни функції $f_n^*(x)$ функцією $f(x)$, використовуючи послуги програми *GRAN1*?

Якщо введено кілька вибірок і кілька функцій $f(x)$, які саме серед них будуть аналізуватися за критерієм Пірсона при використанні послуги «Критерій Пірсона»?

Як з використанням послуг програми *GRAN1* визначити значення $\chi^2_{\text{експ}}$ та $\chi^2_{\text{кр}}$ для заданого рівня значущості ?

Як вказати рівень значущості при використанні послуги «Критерій Пірсона» для з'ясування за критерієм Пірсона питання про несуперечливість із експериментальними даними гіпотези про коректність наближеної заміни функції $f_n^*(x)$ функцією $f(x)$?

Вправи для самостійного виконання

Задано інтервальний ряд розподілу відносних частот появи спостережених значень досліджуваної величини X:

x_i	[−4, −3[	[−3, −2[	[−2, −1[	[−1, 0[	[0, 1[	[1, 2[	[2, 3[	[3, 4[
m_i	0.002	0.019	0.144	0.335	0.321	0.156	0.022	0.001

Записати аналітичні вирази для функцій $f_n^*(x)$ і $F_n^*(x)$.

Ввести дані до робочого файлу (вводячи замість обох абсцис кінців кожного інтервалу абсцису його середини).

Побудувати графіки функцій $f_n^*(x)$ та $F_n^*(x)$, скориставшись послугами програми *GRAN1*.

Побудувати полігон частот, вважаючи середини інтервалів представниками всіх точок відповідних інтервалів.

За функціями $f_n^*(x)$ та $F_n^*(x)$ визначити відносні частоти попадання спостережених значень досліджуваної величини на проміжки: [−4, 4[; [−3, 3[; [−2, 2[; [−1, 1[; [0, 1[; [0, 2[; [0, 3[; [1, 2[; [1, 3[; [2, 3[.

З використанням послуг програми *GRAN1* визначити $M_n^*[X]$ і $\sigma_n^*[X]$ для вказаного розподілу відносних частот.

За критерієм Пірсона визначити, чи узгоджується із наведеними в інтервальному ряді розподілу відносних частот даними гіпотеза про те, що функція $f_n^*(x)$ може бути коректно замінена функцією $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, заданою на проміжку [−5, 5].

Ті ж завдання виконати для інтервального розподілу відносних частот:

[−4, −3.5[	[−3.5, −3[	[−3, −2.5[	[−2.5, −2[	[−2, −1.5[	[−1.5, −1[	[−1, −0.5[	[−0.5, 0[
0.0001	0.0010	0.0047	0.0164	0.0440	0.0920	0.1500	0.1918

[0, 0.5[	[0.5, 1[	[1, 1.5[	[1.5, 2[	[2, 2.5[	[2.5, 3[	[3, 3.5[	[3.5, 4[
0.1918	0.1500	0.0920	0.0440	0.0164	0.0047	0.0010	0.0001

§ 22. Деякі допоміжні послуги програми GRAN1

При роботі з програмою *GRAN1* може з'явитися потреба в деяки[х] поясненнях щодо правил використання тієї чи іншої послуги, прове[]дення додаткових обчислень, виходу із середовища програми *GRAN1*.

Такого роду послуги зосереджено в пункті «Інше».

Пункт «Інше» містить 3 підпункти (рис. 1.166): Допомога Ctrl-F1, Калькулятор, Вихід.

При зверненні до підпункту «Допомога» (що можна здійснити та[]кож одночасним натисненням клавіш *Ctrl* і F1) на екрані з'являєт[ься] додаткове вікно із надписом «Зміст» (рис. 1.167), в якому подано пе[]релік підпунктів пункту «Допомога». Звернення до кожного підпункт[у] здійснюється як звичайно. При зверненні до деякого із підпунктів у вікні «Зміст» на екрані з'являється вікно із надписом «Допомога», в якому подається текст з короткими поясненнями стосовно вказаного підпункту із «Змісту» (рис. 1.168). Зміна («листання») сторінок у вік[ні] «Допомога» здійснюється за допомогою клавіш *Page Up*, *Page Down*. Для завершення роботи з послугою «Допомога» досить натисну[ти] клавішу *Esc*.

До послуги «Допомога» можна звернутися в будь-який момент ро[]боти з програмою. Якщо встановити вказівник на будь-який підпун[кт] будь-якого із пунктів головного меню і натиснути клавішу F1, то на екрані з'являється допоміжне вікно із надписом «Допомога», в яко[му] містяться короткі пояснення саме до вказаного підпункту (рис. 1.169). При цьому не має значення, доступний для виконання вибраний під[]пункт чи недоступний.

Підпункт «Вихід» призначено для використання при необхідно[сті] вийти із середовища програми *GRAN1* і перейти до середовища опе[]раційної оболонки чи самої операційної системи, якщо операці[йна] оболонка не використовується.

При необхідності зберегти (записати на диск) об'єкти (функ[ції], вибірки, таблиці), визначені при роботі з програмою, використовуєт[ь]ся послуга «Зберегти» пункту «Об'єкт». Якщо об'єкти не бу[ли] пов'язані з іменем файла, в якому вони зберігатимуться, необхідно ввести таке ім'я (за відповідним запитом).

При необхідності записати в новий файл на дискові об'єкти, визна[]чені під час роботи з програмою, використовується послу[га] «Переписати». При цьому потрібно вказати ім'я файла, в яко[му] зберігатиметься інформація.

При необхідності завантажити з диску інформацію, попередньо за[]писану з використанням послуг «Зберегти» чи «Переписати», вико[]стовується послуга «Завантажити». При цьому (за відповідним запи[]том) потрібно вказати ім'я файла, з якого завантажуватиметься інформація.

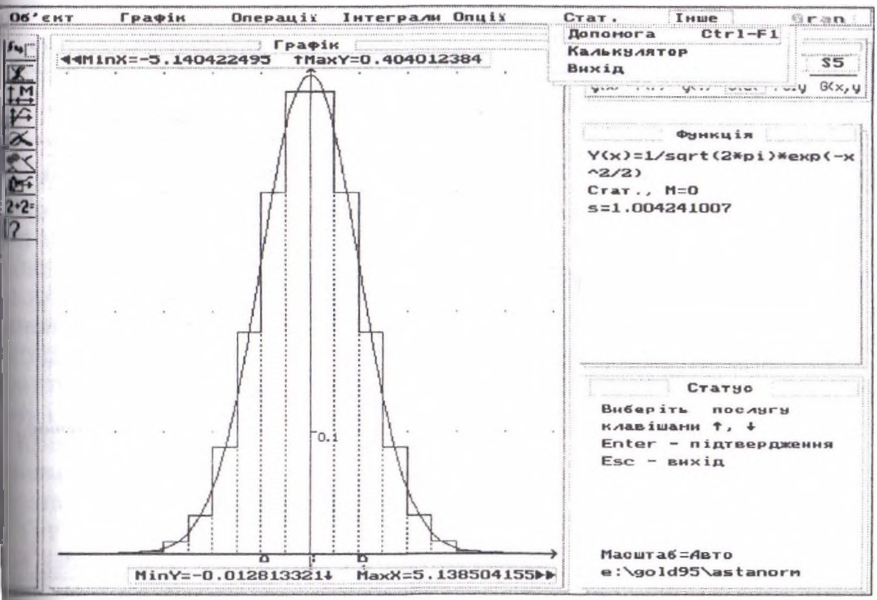


Рис. 1.166

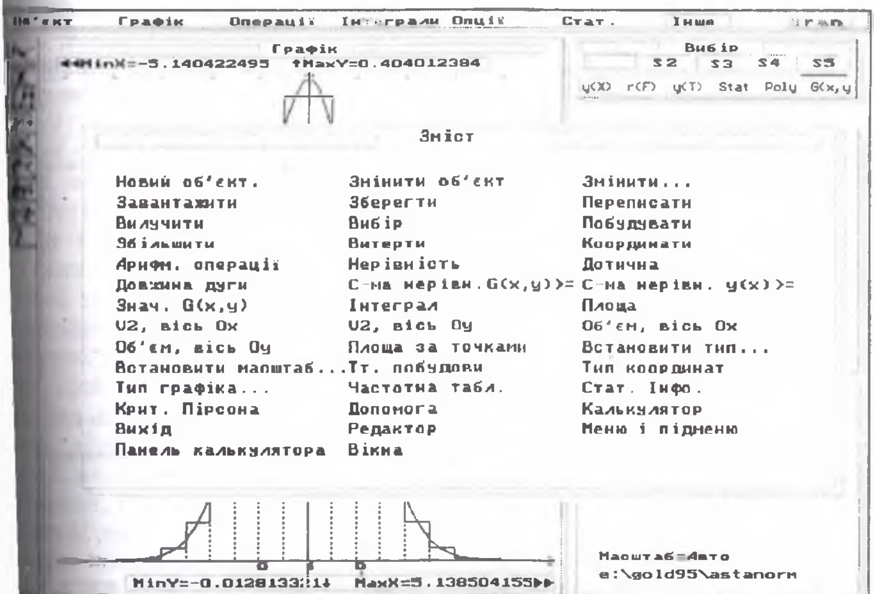


Рис. 1.167

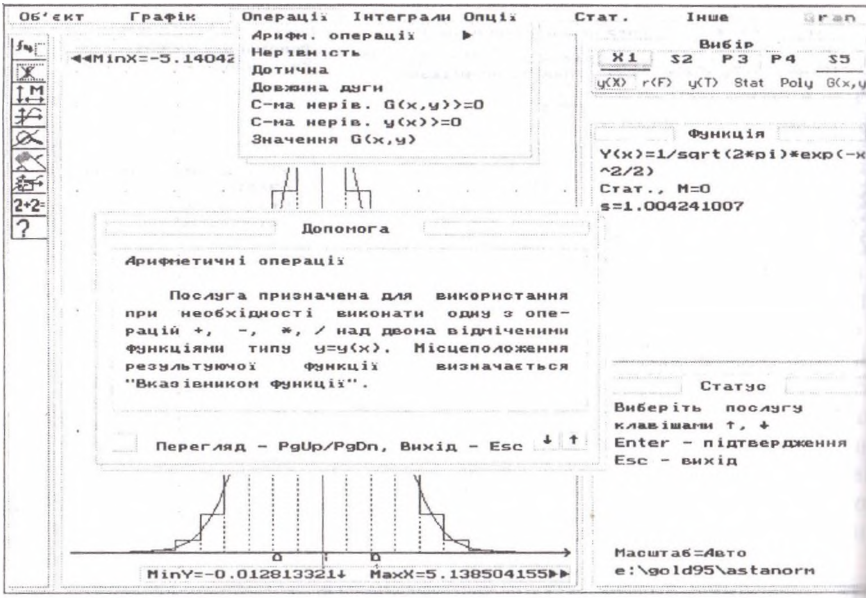


Рис. 1.168

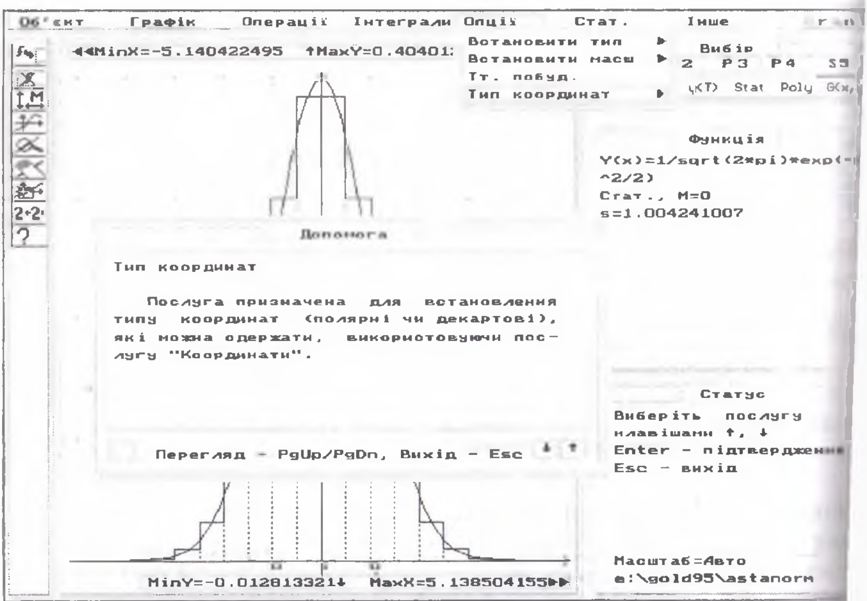


Рис. 1.169

Розділ 2
Програма DERIVE

§ 23. Початок роботи з програмою. Допустимі операції і функції. Введення інформації

Програма *DERIVE* призначена для розв'язування досить значного кола математичних задач – відшукання розв'язків рівнянь в числових і буквенних виразах, границь функцій, звичайних і частинних похідних різних порядків, розкладу функції в ряд Тейлора, невизначених і визначених інтегралів різної кратності з сталими і змінними межами, виконання операцій над векторами і матрицями, визначення числових характеристик статистичних вибірок, графічних побудов у двовимірному і тривимірному просторах і ін.

Крім того, виконуються спрощення виразів алгебраїчно з використанням досить загальних перетворень, обчислення значень виразів з заданою точністю тощо.

Тут буде розглянуто лише окремі типи задач, що можуть бути розв'язані за допомогою програми *DERIVE*. Деяку додаткову інформацію можна отримати, скориставшись послугою *Help* (допомога), а також проаналізувавши файли **.mth* в директорії *DERIVE*.

Щоб розпочати роботу з програмою, необхідно ініціювати виконання файлу *DERIVE.EXE*. В результаті на екрані з'являється повідомлення, показане на рис. 2.1. При необхідності переглянути довідкову інформацію стосовно правил роботи з програмою слід натиснути клавішу *H* (*Help*).

При роботі з програмою використовуються три типи вікон: алгебраїчні, вікна 2-вимірної графіки (*2D-Plot*), вікна 3-вимірної графіки (*3D-Plot*) (рис. 2.2). На самому початку роботи з програмою на екрані з'являється алгебраїчне вікно з переліком послуг (меню) програми під ним (див. рис. 2.1).

Щоб звернутися до потрібної послуги, слід (послідовно натискуючи клавішу *Spase Bar*) встановити вказівник пунктів (підсвічений прямокутник) на відповідний пункт меню, після чого натиснути клавішу *Enter*. Цей же результат досягається, якщо натиснути клавішу з літерою, яка в назві потрібного пункту меню велика (це не обов'язково перша літера в назві, див., наприклад, на рис. 2.1 назви пунктів *approX*, *moVe*, *soLve*).

Вирази, що досліджуються, вводяться з клавіатури і відображаються в алгебраїчному вікні.

Якщо необхідно ввести деякий вираз, використовується пункт головного меню *Author*. При зверненні до пункту *Author* на місці головного меню з'являється запит:

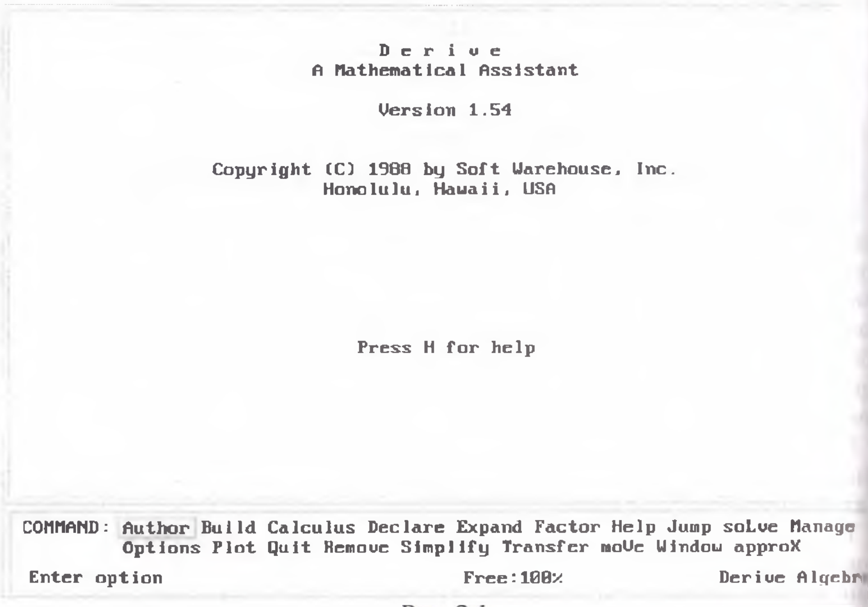

D e r i v e
A Mathematical Assistant
Version 1.54
Copyright (C) 1988 by Soft Warehouse, Inc.
Honolulu, Hawaii, USA
Press H for help
COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Enter option
Free:100%
Derive Algebr

Рис. 2.1

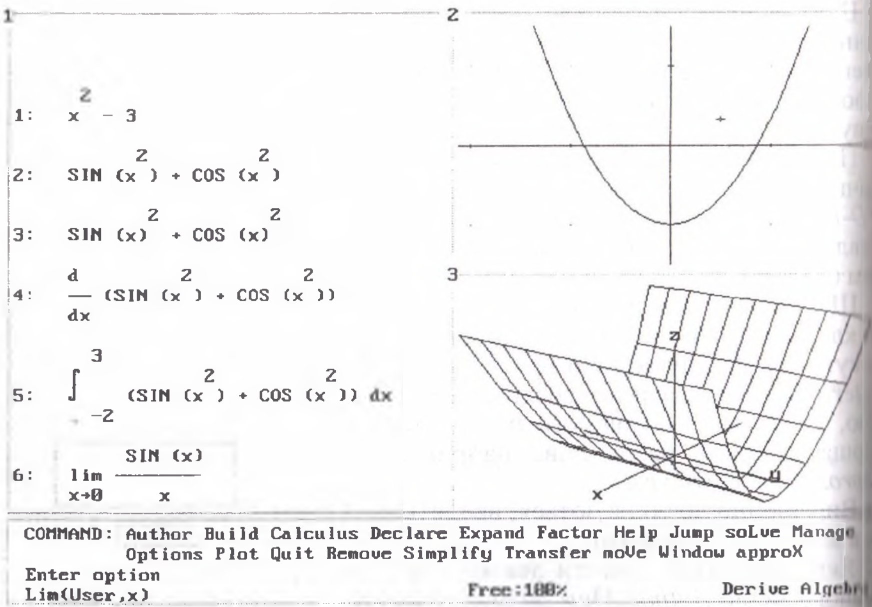

1
2
3
1: x^2 - 3
2: SIN (x^2) + COS (x^2)
3: SIN (x)^2 + COS (x)^2
4: d/dx (SIN (x^2) + COS (x^2))
5: ∫ from -2 to 3 (SIN (x^2) + COS (x^2)) dx
6: lim x→0 SIN (x)/x
z
x
y
COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Enter option
Lim(User,x)
Free:100%
Derive Algebr

Рис. 2.2

AUTHOR expression:
enter expression,

у відповідь на який слід ввести з клавіатури необхідний вираз.

Після того, як вираз набрано на клавіатурі (при цьому вираз відображається в рядку введення вслід за словами *AUTHOR expression*) і натиснуто клавішу *Enter*, вираз з'являється в алгебраїчному вікні під відповідним номером (міткою), а програма повертається до головного меню (див. рис. 2.2). Якщо вираз набрано неправильно, під написом *Author expression* з'являється повідомлення *Syntax error at cursor*, причому курсор (у рядку введення) вказує на позицію у виразі, де виявлено помилку. Введення і редагування виразу здійснюється як звичайно (з використанням символьних клавіш та клавіші *Back Space*).

При цьому у виразах можуть використовуватись наведені нижче константи, оператори, функції.

Константи:

#e	основа натуральних логарифмів
#i	корінь квадратний із –1
pi	число π – відношення довжини кола до його діаметра
deg	кут в градусах
inf	додатна нескінченність

Оператори:

-z	мінус *z*
z + w	*z* плюс *w*
z – w	*z* мінус *w*
*z * w*	*z* помножити на *w*
z / w	*z* поділити на *w*
z^w	*z* в степені *w*
z%	*z* процентів (*z* / 100)

Показникові функції:

exp(z)	число *e* в степені *z*
sqrt(z)	квадратний корінь із *z*

Логарифмічні функції:

ln(z)	логарифм натуральний *z*
log(z)	логарифм натуральний *z*
log(z,w)	логарифм *z* за основою *w*

Тригонометричні функції:

sin(z,deg)	синус *z* градусів
sin(z)	синус *z* радіан
cos(z)	косинус *z* радіан
tan(z)	тангенс *z* радіан
cot(z)	котангенс *z* радіан
sec(z)	секанс *z* радіан

csc(z)	косеканс z радіан

Обернені тригонометричні функції (в радіанах):

asin(z)	арксинус z
acos(z)	арккосинус z
atan(z)	арктангенс z
acot(z)	арккотангенс z
atan(y,x)	кут між віссю Ox та радіусом-вектором точки (x, y)
acot(x,y)	кут між віссю Ox та радіусом-вектором точки (y, x)
asec(z)	арксеканс z
acsc(z)	арккосеканс z

Кусково неперервні функції:

abs(x)	абсолютне значення x
sign(x)	знак x
max (x,y,...)	максимум серед аргументів
min (x,y,...)	мінімум серед аргументів
step(x)	1 при $x > 0$, 0 при $x < 0$
chi(a,x,b)	1 при $a \le x \le b$, 0 при $x < a$ або $x > b$

Функції комплексної змінної:

abs(z)	модуль z
sign(z)	знак z
re(z)	дійсна частина z
im(z)	уявна частина z
conj(z)	комплексно спряжена до z
phase(z)	фазовий кут z

Комбінаторні формули:

z!	z-факторіал
perm(z,w)	число розміщень із z елементів по w елементів
comb(z,w)	число комбінацій із z елементів по w елементів

Статистичні функції:

average(z1,..,zN)	середнє арифметичне елементів $z_1, \ldots, z_N$
rms(z1,..,zN)	середнє квадратичне елементів $z_1, \ldots, z_N$
var(z1,..,zN)	варіація
stdev(z1,..,zN)	середнє квадратичне відхилення
gamma(z)	гамма-функція від z
normal(z,m,s)	функція нормального розподілу ймовірностей з математичним сподіванням m і середнім квадратичним відхиленням s, тобто $\frac{1}{\sqrt{2\pi}s}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{(t-m)^2}{2s^2}}dt$

Функції обчислень:

lim(u,x,a)	границя u, якщо x наближається до a зверху (справа)

lim(u,x,a,0)	границя *u*, якщо *x* наближається до *a* знизу (зліва)
dif(u,x)	похідна від *u* за змінною *x*
dif(u,x,n)	похідна *n*-го порядку від *u* за змінною *x*
taylor(u,x,a,n)	наближення *u* *n* членами ряду Тейлора в околі точки $x = a$
int(u,x)	первісна від *u* за змінною *x*
int(u,x,a,b)	визначений інтеграл від *u* за змінною *x* в межах від *a* до *b*
sum(u,n)	сума *n* значень виразу *u* від *k*, коли *k* змінюється від 0 до $n - 1$
sum(u,n,k,m)	визначена сума значень *u* від *n*, коли *n* змінюється від *k* до *m*
product(u,n)	добуток *n* значень виразу *u* від *k*, коли *k* змінюється від 0 до $n - 1$
product(u,n,k,m)	визначений добуток значень *u* від *n*, коли *n* змінюється від *k* до *m*

Векторні функції:

vector(u,k,m,n,s)	вектор із елементів *u*, коли *k* змінюється від *m* до *n* з кроком *s*
element(v,n)	*n*-й елемент вектора *v*
v·w	скалярний добуток векторів *v* і *w*
cross(v,w)	векторний добуток векторів *v* і *w*
dimension(v)	кількість елементів вектора *v*

Матричні функції:

identity_matrix(n)	одинична матриця розмірності $n \times n$
element(A,j,k)	елемент *j*-го рядка і *k*-го стовпчика матриці *A*
A·B	добуток матриць
A'	транспонована матриця
det(A)	визначник квадратної матриці
A^-1	матриця, обернена до квадратної матриці *A*

Оператори і функції порівняння:

u = v	*u* дорівнює *v*
u /= v	*u* не дорівнює *v*
u < v	*u* менше ніж *v*
u <= v	*u* менше або дорівнює *v*
u > v	*u* більше ніж *v*
u >= v	*u* більше або дорівнює *v*
solve(u,x)	розв'язати рівняння $u = 0$ відносно *x*
solve(u=v,x)	розв'язати рівняння $u = v$ відносно *x*
solve(u=v,x,a,b)	розв'язати рівняння $u = v$ відносно *x* із $[a, b]$

Деякі додаткові відомості про функції і константи можна отримати, звернувшись до послуги *Help*, підпункт *F – Functions and Constants*.

Щоб вилучити один чи кілька (підряд) виразів, що вже введені, слід скористатися послугою *Remove*. Звернення до пункту *Remove* призводить до появи додаткового запиту у вигляді

REMOVE: Start: End:
Enter label number.

У відповідь слід вказати початковий та кінцевий номери (мітки) виразів, які необхідно вилучити з даного вікна типу *Algebra*. При цьому спочатку можна вказати останній з виразів, що вилучаються, а потім перший, чи навпаки.

Ці вирази можна вказати також, переміщуючи відповідним чином вказівник виразів за допомогою клавіш управління курсором. При переміщуванні вказівника номер (мітка) виразу після слова *Start* чи *End* відповідним чином змінюється автоматично.

Якщо виникає потреба перемістити вказівник виразів з деякого виразу на інший, не перебираючи підряд всі проміжні вирази, слід скористатися послугою *Jump*.

При зверненні до пункту *Jump* з'являється додатковий запит у вигляді

Jump to:

У відповідь на нього слід вказати номер виразу, на який необхідно перемістити вказівник виразів.

При потребі перемістити один чи кілька виразів на інше місце використовується послуга *Move*. При зверненні до пункту *Move* з'являється додатковий запит у вигляді

MOVE: Before: Start: End:
Enter label number.

У відповідь потрібно встановити вказівник на вираз, перед яким слід вставити деякі інші, або ж ввести номер (мітку) цього виразу з клавіатури. Далі аналогічно слід встановити номер (мітку) першого виразу та номер (мітку) останнього виразу групи виразів, які бажано помістити перед виразом, вказаним раніше, і натиснути клавішу *Enter*, після чого вказану групу виразів буде поміщено перед заданим виразом.

Запитання для самоконтролю

1. Як розпочати роботу з програмою *DERIVE*?
2. Як отримати довідкову інформацію щодо послуг програми *DERIVE*?
3. Вікна яких типів використовуються при роботі з програмою *DERIVE*?
4. Як звернутися до потрібної послуги програми *DERIVE*?
5. Як вводяться вирази до алгебраїчного вікна?
6. Які константи можуть бути використані у виразах?
7. Які операції допустимі при побудові виразів і як вони позначаються?
8. Які функції можуть бути включені до виразів?
9. Як вилучити один чи кілька раніше введених виразів?
10. Як перемістити вказівник з наявного на потрібний вираз, не перебираючи інші вирази?
11. Як перемістити групу виразів на інше місце?

Вправи для самостійного виконання

1. Ввести до алгебраїчного вікна вирази:

$x^2 - 3x + 7$; $\cos^2(x) + \sin(x^2)$; $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$; $\log_2(2x - \sqrt{x+1})$; $\arccos(\sin(1 - x^2))$;

$|x^2 - 5x + 6|$; $1 / (1 + x^2)$; $\sqrt{\sin(x^2) + \cos(x^2)}$.

2. Перемістити вказівник виразів на вираз з міткою 2: .
3. Помістити вирази з мітками 1:, 2: перед виразом з міткою 12: .
4. Вилучити з алгебраїчного вікна вирази з мітками 3:, 4:, 5: .
5. Ввести до алгебраїчного вікна константи: π, $-\infty$, $+\infty$, e.
6. Ввести до алгебраїчного вікна вирази:

$\sin(0)$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\arcsin(0)$, $\arcsin(1)$, $\arcsin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\cos(0)$, $\cos\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)$, $\arccos(0)$,

$\arccos(1)$, $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\arccos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\arccos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\mathrm{arctg}(0)$, $\mathrm{arctg}(1)$, $\mathrm{arctg}(-\infty)$,

$\mathrm{arctg}(+\infty)$.

7. Ввести вирази:
$\log_2 10$, $\log_{10} 2$, $\log_5 3$, $\log_3 5$, $\lg 20$, $\lg 5^2$, $\lg(-x)$, $\lg(-3)$.

§ 24. Оголошення імен констант, змінних і функцій. Введення елементів векторів і матриць

Часто буває зручно замість багатократного безпосереднього подання зображень деяких констант чи виразів присвоїти їм певні імена (позначення) і далі, де необхідно, використовувати такі константи чи вирази, вказуючи відповідні імена.

Щоб присвоїти ім'я константі чи виразові, а також вказати тип змінної, слід скористатися послугою *Declare*.

При зверненні до підпункту *Declare* на місці головного меню з'являється підменю

DECLARE: Constant Function Variable Matrix vectoR.

При зверненні до підпункту *Constant* з'являється запит

DECLARE CONSTANT name: .

У відповідь необхідно ввести ім'я константи, яке повинно починатися з літери і містити лише літери і цифри.

Після введення імені константи з'являється запит

DECLARE CONSTANT value: .

У відповідь слід ввести значення константи, після чого в алгебраїчному вікні з'являється запис виду:

D:=знач,

де *D* – вказане ім'я константи, *знач* – послідовність символів, що визначають значення константи. Далі у виразах замість значення константи можна використовувати її ім'я (позначення), аналогічно до того, як у різних формулах використовується позначення π числа

3.141592…, позначення *e* числа 2.718281828... і ін. (рис. 2.3, вирази 8:, 9:).

При зверненні до підпункту *Function* з'являється запит

DECLARE FUNCTION name: .

У відповідь слід ввести ім'я функції, яке утворюється за тими ж правилами, що й ім'я константи.

Після введення імені функції з'являється запит

DECLARE FUNCTION value: .

У відповідь слід ввести вираз, який визначає функцію. В результаті цього в алгебраїчному вікні з'являється запис виду

$$F(x,y,z,...):=\Phi,$$

де F – вказане ім'я функції, Φ – введений вираз, x, y, z, … – змінні, що входять до виразу Φ. Далі замість конкретного виразу можна використовувати його ім'я (див. рис. 2.3, вирази 11:, 12:).

При зверненні до підпункту *Variable* з'являється запит

DECLARE variable: .

У відповідь слід ввести ім'я (позначення) змінної, після чого з'являється запит

DECLARE:Domain:Positive Nonnegative Real Complex Interval.

При зверенні до підпунктів *Positive*, *Nonnegative*, *Real*, *Complex* змінній присвоюється відповідний тип (додатна, невід'ємна, дійсна, комплексна) та встановлюються відповідні інтервали зміни ($(0;\infty)$, $[0,\infty)$, $(-\infty,\infty)$). При зверненні до підпункту *Interval* з'являється запит

$$DECLARE:\ Bounds:\ a\ (<)\le v\ (<)\le b,$$

де v – вказане ім'я змінної, a, b – вказані раніше межі даної змінної у відповідності до її типу, $<$, $\le$ – знаки нерівності, причому, в дужках взято знак нерівності, який відповідає раніше встановленим обмеженням для змінної. Наприклад, якщо змінну v раніше було оголошено як невід'ємну, то запит матиме вигляд

$$DECLARE:\ Bounds\ 0<(\le)\ v\ (<)\le .$$

Далі, якщо необхідно, слід вказати нові числові значення меж зміни змінної з вказаним іменем. Щоб перейти при цьому від знака $<$ до знака $\le$, використовується клавіша *Space Bar* (пропуск), щоб перейти від лівої пари знаків $<$, $\le$ до правої чи навпаки, використовується клавіша *Tab*.

Вказані типи змінних та межі їх зміни згідно до програми запам'ятовуються і зберігаються доти, поки їх не буде змінено щойно вказаним способом. При оголошенні типу змінної в алгебраїчному вікні ніяка інформація не подається.

При необхідності ввести вектор чи матрицю використовують підпункти *vectoR* чи *Matrix* пункту *Declare*.

При зверненні до підпункту *Matrix* з'являється додатковий запит

DECLARE MATRIX: Rows:3 Columns:3.

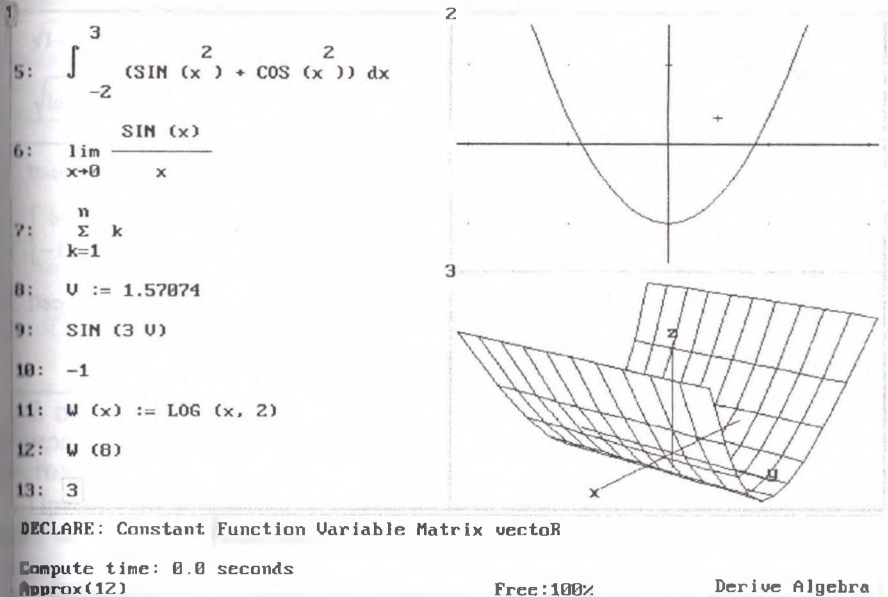


Рис. 2.3

У відповідь слід ввести кількість рядків (ціле число) та кількість стовпчиків (ціле число) у матриці, що оголошується.

Перехід від підпункту *Rows* до підпункту *Columns* і навпаки здійснюється за допомогою клавіші *Tab*.

Слід мати на увазі, що m і n – цілі числа. Якщо для m і n вводяться не цілі значення, вони округлюються до цілих. Якщо ж вводиться число нуль або вираз, що містить змінні, видається повідомлення про помилку і знову пропонується ввести значення m чи n.

Коли введено кількість рядків і кількість стовпчиків матриці, з'являється додатковий запит

MATRIX element:0.

У відповідь слід ввести $m \times n$ виразів, що визначають елементи матриці, де m – кількість рядків, n – кількість стовпчиків.

В результаті цього в алгебраїчному вікні з'явиться матриця у вигляді:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \dots & \Phi_{1n} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \dots & \Phi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{m1} & \Phi_{m2} & \dots & \Phi_{mn} \end{bmatrix},$$

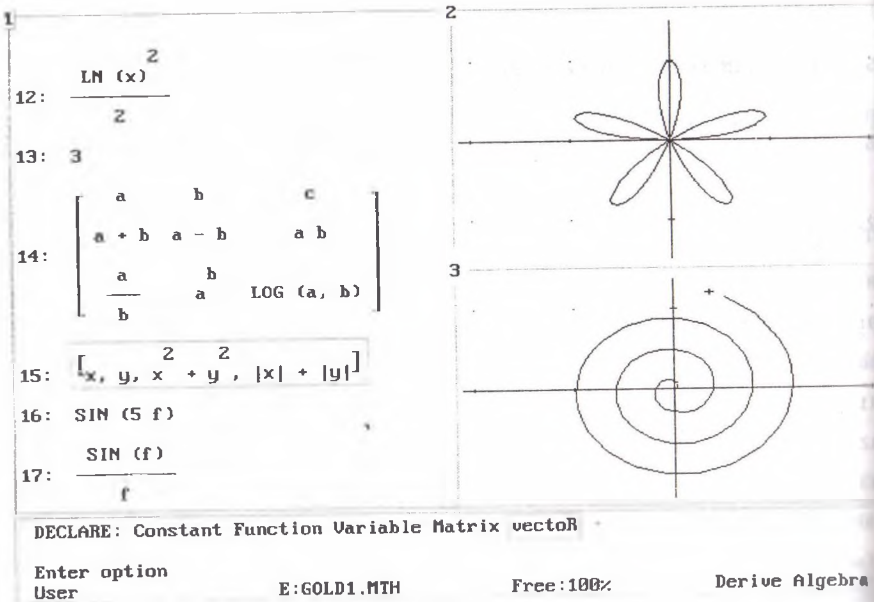


Рис. 2.4

де Φ_{ij} – введений вираз, що визначає елемент в i-му рядку і в j-му стовпчику (див. рис. 2.4, вираз 14:).

При зверненні до підпункту *vectoR* з'являється додатковий запит

DECLARE VECTOR: Dimension: .

У відповідь слід ввести розмірність вектора (ціле число), після чого з'являється ще один запит

VECTOR element: .

У відповідь слід ввести n виразів, що визначають елементи вектора, де n – вказана розмірність вектора.

В результаті в алгебраїчному вікні з'являється подання вектора у вигляді: $[\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n]$ де $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ – введені вирази, що визначають елементи вектора (див. рис. 2.4, вираз 15:).

Запитання для самоконтролю

1. Як присвоїти ім'я: константі? функції? змінній?
2. Як з використанням послуг програми *DERIVE* встановити тип змінної?
3. Як вказати межі зміни деякої змінної?
4. Як ввести матрицю розмірності 3×5?
5. Як ввести вектор розмірності 5?

Вправи для самостійного виконання

1. Присвоїти вказаним константам вказані імена:

$\sqrt{2\pi}$ – $S1$; $\sqrt{2}$ – $S2$; 1.41 – $S3$; 2.57312948992004 – W.

2. Присвоїти вказаним функціям вказані імена:

$\sqrt{1-x^2}$ – VA; $\frac{1}{2}\ln x - \sin(\sin(x^2)+\cos(x^2)-4x)$ – $W1$; $\sqrt{1+x+x^2+x^3+x^4}$ – VS;

$\frac{\sqrt{\log_2(1+\sqrt{1+x^2+x^4})}}{\sqrt{1+x^2}}$ – $W2$.

3. Ввести до алгебраїчного вікна матриці:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 & 2 \\ -3 & 5 & 4 & 9 & -1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ x & y & z \end{bmatrix}$.

4. Ввести до алгебраїчного вікна вектори: [0, 1]; [x, y, z]; [a, b, c, d, e, f]; [–5, 3, 2, 4, 5].

§ 25. Конструювання виразів

В програмі *DERIVE* передбачено можливість конструювати вирази з виразів, що введені раніше чи вводяться заново. З цією метою використовуються послуги *Build* та *Calculus*.

При зверненні до пункту *Build* (*build* – побудувати) на місці головного меню з'являється повідомлення

BUILD first expression: #n,

де n – номер виразу, на якому було встановлено вказівник (підсвічений прямокутник, який можна переміщувати в алгебраїчному вікні, використовуючи клавіші управління курсором ↑, ↓, ←, →), знак # означає номер. Номер першого виразу, який буде використовуватися при конструюванні нового, можна вказати з клавіатури, якщо серед виразів, які подано в алгебраїчному вікні, є потрібний. Якщо такого виразу немає, його можна ввести з клавіатури, як звичайно (попередньо вилучивши символи #n). Номер виразу #n автоматично змінюється, якщо переміщувати вказівник виразів вгору чи вниз (за допомогою клавіш управління курсором). Крім того, вираз можна вводити не весь, а лише його частину, для чого слід встановити вказівник виразів (за допомогою клавіш управління курсором ↑, ↓, ←, →) на відповідну частину виразу і далі натиснути клавішу *Enter*.

Після того як вказано на вираз чи його частину або введено з клавіатури номер раніше введеного виразу чи новий вираз і натиснуто клавішу *Enter*, на місці меню з'являється повідомлення (рис. 2.5):

*BUILD: Operator: + - * / ^ . ' = Minus Recip Ln Exp Tan Sin Cos Atan ! % Done Select operator.*

Серед вказаних операцій і функцій є двомісні (+, -, *, /, ^, •, =), при виконанні яких потрібно вказувати два операнди, і одномісні (', *Minus*, *Recip*, *Ln*, *Exp*, *Tan*, *Sin*, *Cos*, *Atan*, *!*, *%*), при виконанні яких досить вказати один операнд. При цьому знак ' означає операцію транспонування матриці, знак • означає скалярний добуток векторів, добуток матриць чи звичайний добуток чисел, *Recip* – величину, обернену до даної.

Якщо вказано двомісну операцію (для чого слід перемістити вказівник операцій (підсвічений прямокутничок, див. рис. 2.5) на позначення потрібної операції і натиснути клавішу *Enter*), в рядкові підказок внизу екрана з'являється повідомлення

BUILD next expression: #n.

Після того як вказано наступний вираз (цілком аналогічно до попереднього), в рядкові підказок знову з'являється рядок
*BUILD: Operator: + - * / ^ . ' = Minus Recip Ln Exp Tan Sin Cos Atan ! % Done,*
при цьому вказівник операцій встановлюється на слові *Done*. Якщо побудову виразу закінчено, досить натиснути клавішу *Enter*, після чого так утворений вираз з'являється в алгебраїчному вікні. Якщо ж побудову виразу не закінчено, наступні операції і вирази, з яких конструюється новий, вводяться цілком аналогічно до попереднього.

Якщо вказується одномісна операція, то повідомлення

BUILD next expression: #n

не з'являється і вказівник операцій одразу встановлюється на слові *Done*. Далі можна продовжити побудову виразу аналогічно до попереднього чи закінчити її, натиснувши клавішу *Enter*.

При зверненні до пункту *Calculus* на місці головного меню на екрані з'являється підменю (рис. 2.6):

CALCULUS: Differentiate Integrate Limit Product Sum Taylor.

При зверненні до підпункту *Differentiate* на екрані з'являється повідомлення

Differentiate expression: #n.

На місці *#n* можна вказати номер одного із виразів, що вже введені, або ж ввести потрібний вираз, як і раніше.

Після того як вказано вираз чи його номер або введено новий вираз, на екрані з'являється запит

DIFFERENTIATE variable: x.

У відповідь слід вказати позначення змінної, за якою необхідно виконувати диференціювання.

Далі з'являється запит

DIFFERENTIATE order: 1.

У відповідь на нього слід ввести порядок похідної, яку необхідно визначити.

Коли введено відповіді на всі запити програми, до раніше введених виразів додається новий у вигляді

$$\left[\frac{d}{dv}\right]^m \Phi,$$

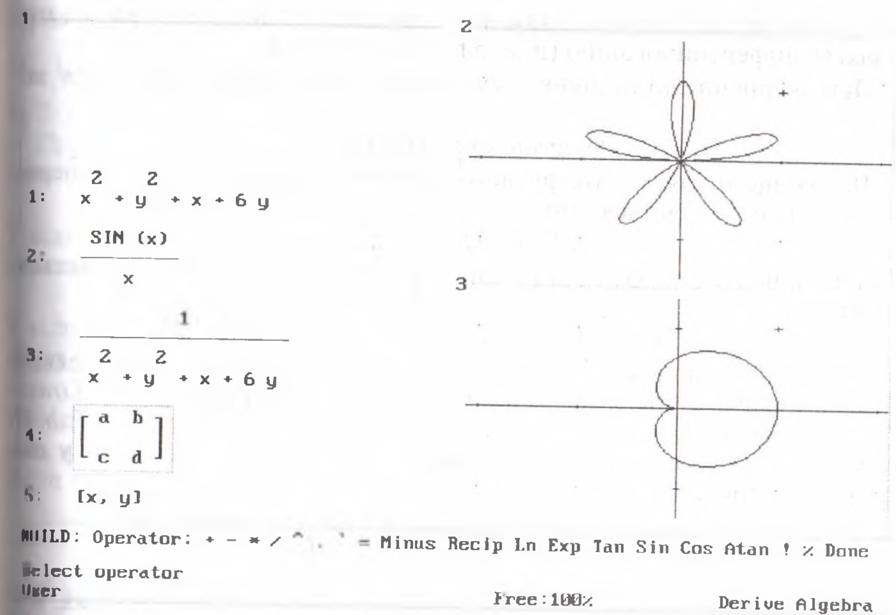


Рис. 2.5

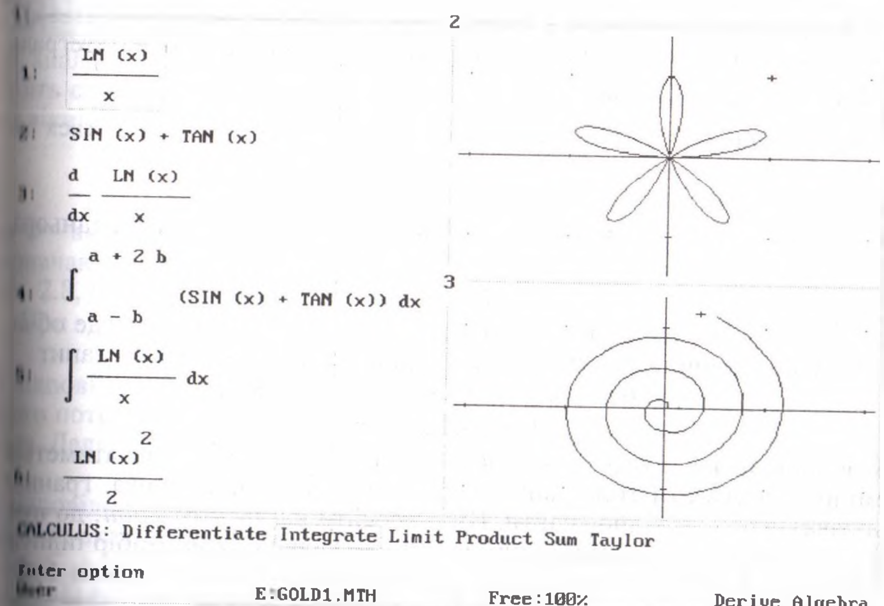


Рис. 2.6

де v – змінна диференціювання, m – порядок похідної, Φ – вираз, що підлягає диференціюванню (див. рис. 2.6, вираз 3:).

При зверненні до підпункту *Integrate* внизу екрана з'являється запит:

Integrate expression: #n.

Вираз, що підлягає інтегруванню, вводиться аналогічно до попереднього. Далі з'являється запит

INTEGRATE variable: x.

У відповідь слід вказати змінну інтегрування. Після цього з'являється запит

INTEGRATE: Lower limit: Upper limit:,

у відповідь на який слід ввести межі інтегрування у вигляді деяких виразів (зокрема чисел чи змінних). Щоб перейти від пункту *Lower limit* до пункту *Upper limit* або навпаки, слід натиснути клавішу *Tab*. В результаті цього в алгебраїчному вікні з'являється новий вираз у вигляді (див. рис. 2.6, вираз 4:):

$$\int_a^b \Phi \, dv,$$

де Φ – вказаний вираз, v – змінна інтегрування, a – нижня межа, b – верхня межа інтегрування.

Якщо межі інтегрування не вказувати і одразу натиснути клавішу *Enter*, то з'явиться новий вираз у вигляді невизначеного інтеграла $\int \Phi \, dv$ (див. рис. 2.6, вираз 5:).

При зверненні до підпункту *Limit* у рядку підказок з'являється запит

LIMIT exspession:.

У відповідь слід ввести необхідний вираз аналогічно до попереднього.

Далі з'являється запит

LIMIT variable:.

У відповідь необхідно ввести позначення змінної, за якою буде обчислюватись границя. Після того як вказано змінну, з'являється запит

LIMIT:Point:0   From:(Both) Left Right

Enter limit point.

У відповідь на нього слід ввести вираз, до якого наближатиметься змінна, та вказати тип границі (двостороння, границя зліва, границя справа), яку необхідно знайти. Щоб перейти від пункту *Point*: до пункту *From*: і навпаки, необхідно натиснути клавішу *Tab*. Вибір підпунктів *Both*, *Left*, *Right* здійснюється так само, як і вибір пунктів будь-якого іншого меню чи підменю. Після того як вказано значення змінної та тип границі, в алгебраїчному вікні з'являється новий вираз вигляді $\lim\limits_{v \to a} \Phi$ чи у вигляді $\lim\limits_{v \to a-} \Phi$, якщо вказано *LEFT* (границя зліва), чи $\lim\limits_{v \to a+} \Phi$ якщо вказано *RIGHT* (границя справа) (рис. 2.7, вирази 6:, 7:).

При зверненні до підпункту *Product* (добуток) на екрані з'являється запит

PRODUCT exspression: # n.

У відповідь необхідно ввести досліджуваний вираз аналогічно до попереднього. Після введення виразу з'являється запит

PRODUCT variable: x.

У відповідь слід ввести змінну, за якою буде відбуватися перемножування. Далі з'являється запит

PRODUCT: Lower limit: Upper limit: .

У відповідь на нього потрібно ввести вирази для нижньої та верхньої меж, в яких буде змінюватися параметр перемножування. В результаті цього в алгебраїчному вікні з'являється новий вираз виду

$$\prod_{v=a}^{b} \Phi,$$

де Φ – вказаний вираз, v – параметр перемножування, a, b – вирази, що визначають відповідно верхню і нижню межі параметра v (рис. 2.8, вираз 9:).

При зверненні до підпункту *Sum* (сума) на екрані з'являються запити, аналогічні запитам підпункту *Product*, в яких замість слова *Product* стоїть слово *Sum*. Після введення відповідей на запити в алгебраїчному вікні з'являється новий вираз виду

$$\sum_{v=a}^{b} \Phi,$$

де Φ – вказаний вираз, v – параметр підсумовування, a, b – вирази, що визначають відповідно верхню і нижню межі параметра v (див. рис. 2.8, вираз 10:).

При зверненні до підпункту *Taylor* з'являється запит

TAYLOR expression: #n.

У відповідь на нього аналогічно попередньому слід ввести вираз, для якого потрібно знайти кілька перших членів його розкладу в ряд Тейлора. Далі з'являється запит

TAYLOR variable: x.

У відповідь на який слід вказати змінну, за якою необхідно одержати розклад вказаного виразу. У відповідь на наступний запит:

TAYLOR: Degree:5 Point:0

слід ввести бажаний найвищий показник степеня змінної в отримуваних членах розкладу в ряд Тейлора та вираз для значення змінної, в

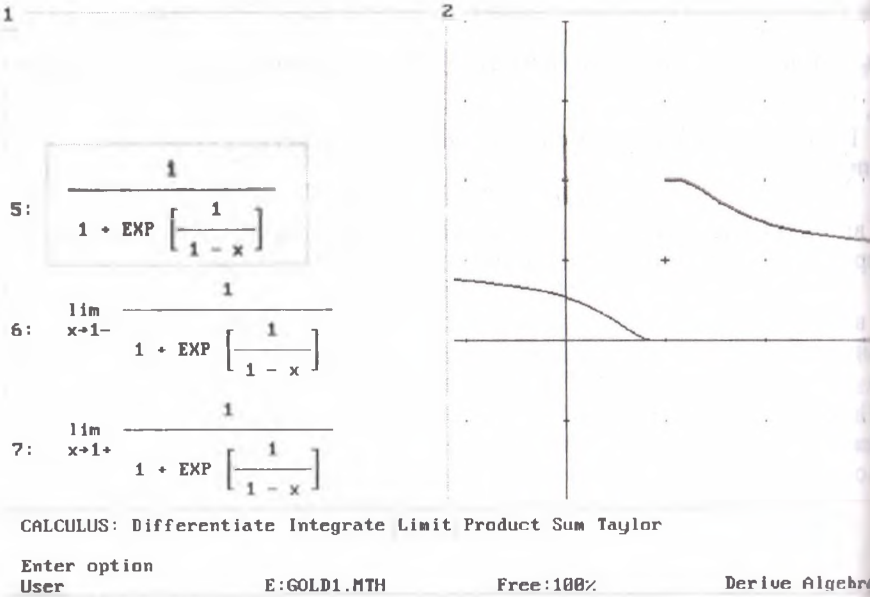

1
2
5: 1/(1 + EXP [1/(1 - x)])
6: lim x→1- 1/(1 + EXP [1/(1 - x)])
7: lim x→1+ 1/(1 + EXP [1/(1 - x)])
CALCULUS: Differentiate Integrate Limit Product Sum Taylor
Enter option
User
E:GOLD1.MTH
Free:100%
Derive Algebra

Рис. 2.7

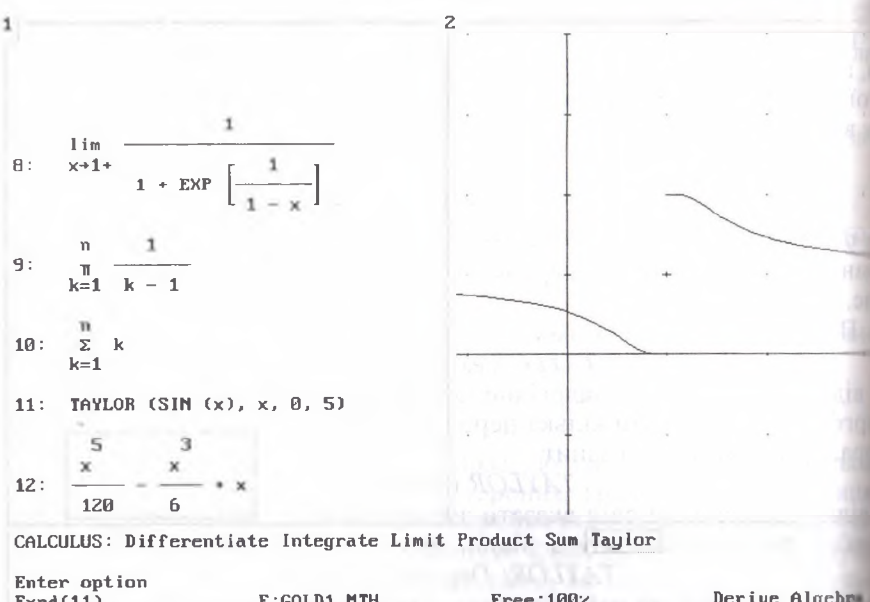

1
2
8: lim x→1+ 1/(1 + EXP [1/(1 - x)])
9: Π k=1 n 1/(k - 1)
10: Σ k=1 n k
11: TAYLOR (SIN (x), x, 0, 5)
12: x^5/120 - x^3/6 + x
CALCULUS: Differentiate Integrate Limit Product Sum Taylor
Enter option
Expd(11)
E:GOLD1.MTH
Free:100%
Derive Algebra

Рис. 2.8

околі якого необхідно виконати розклад. Після відповідей на всі запити в алгебраїчному вікні з'являється новий вираз у вигляді

TAYLOR (Φ, v, a, m),

де *Φ* – вказаний вираз, *v* – змінна, за якою виконується розклад, *a* – вираз для значення змінної, в околі якого виконується розклад, *m* – вказаний найвищий порядок членів розкладу (див. рис. 2.8, вираз 11:).

Запитання для самоконтролю

1. Які послуги програми *DERIVE* можуть бути використані для конструювання виразів із раніше введених чи тих, що вводяться заново?
2. Які операції передбачено в пункті *Build*?
3. Які операції передбачено в пункті *Calculus*?
4. Скільки операторів пункту *Build* можна використати при конструюванні нового виразу?
5. Як сконструювати вирази виду:

$$\lim_{x\to a+0} f(x);\quad \frac{d^2}{dx^2}f(x);\quad \int f(x)dx;\quad \int_a^b f(x)dx;\quad \sum_{k=1}^{n} f(k);\quad \prod_{k=1}^{n} f(k);\quad TAYLOR\,(f(x), x, 0{,}5)?$$

Вправи для самостійного виконання

1. Ввести вирази: x; 2; π; $VA(x):= x^2 + \cos(x)$; k.

Скориставшись послугами *Build* і *Calculus*, із введених виразів сконструювати вирази:

$$\sin(x^2);\quad \left[\frac{d}{dx}\right]^3 \sin(x^2);\quad \int_a^b x^4 \sin(x)dx;\quad \int \cos\left(\frac{x^2}{2}\right)dx;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x};\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-x^2/2}dx;$$

$$x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2;\quad \int_{-1}^{1}\left(\int_{-t}^{t} e^x dx\right)dt;\quad \int_1^{2/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{\pi}\,\mathrm{arctg}(\sqrt{x^2-1})dx;\quad \int VA(x)dx;\quad \prod_{k=1}^{10}\frac{k}{k+1};$$

$$\sum_{k=1}^{n}(\sin(k) - (\sin(k-1));\quad TAYLOR\,(\sin x, x, 0, 7);\ TAYLOR\,(\cos x, x, 0, 6).$$

2. Ввести матриці

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ p & q & r \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} v & w \\ x & y \\ t & s \end{bmatrix}$$

і вектори $[i, j, k]$, $[l, o, u]$, $[m, n]$ і сконструювати вирази:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ p & q & r \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} v & w \\ x & y \\ t & s \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ p & q & r \end{bmatrix}\cdot[i, j, k],\quad \begin{bmatrix} v & w \\ x & y \\ t & s \end{bmatrix}\cdot[m, n],\quad [l, o, u]\cdot[i, j, k].$$

§ 26. Розкриття і спрощення виразів

Щоб перетворити або спростити вираз, у програмі *DERIVE* передбачено послуги *Expand* (розкрити вираз) та *Simplify* (спростити вираз).

При зверненні до пункту *Expand* з'являється додатковий запит

EXPAND expression: #n.

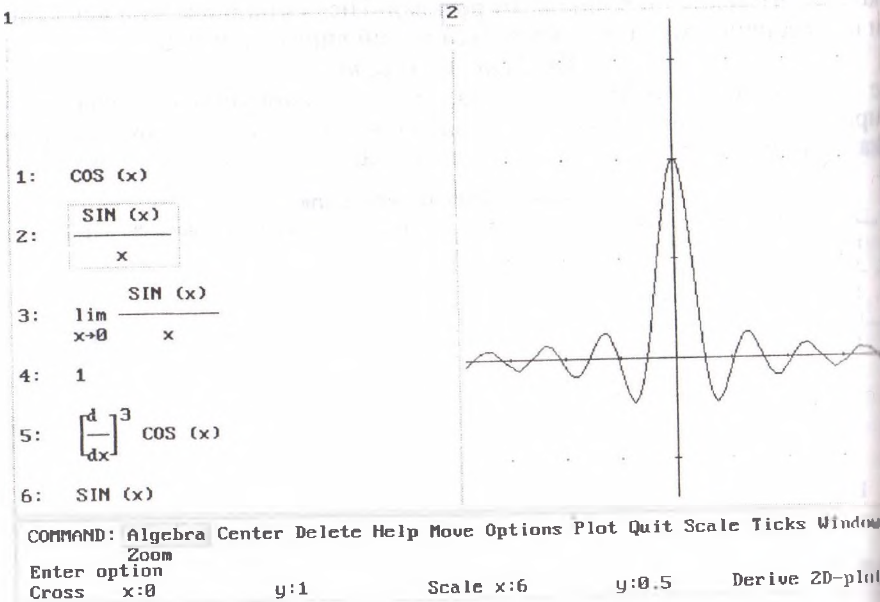


Рис. 2.9

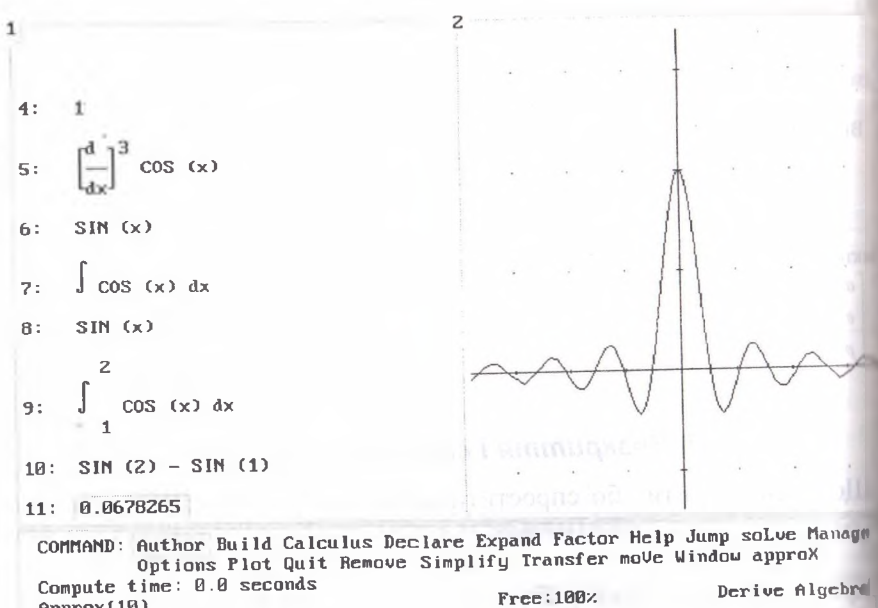


Рис. 2.10

У відповідь на нього слід ввести відповідний вираз одним із раніше вказаних способів. В результаті цього в алгебраїчному вікні з'являється новий вираз, перетворений відповідно до набору і послідовності операцій, вказаних у попередньому виразі.

При зверненні до пункту *Simplify* з'являється додатковий запит у вигляді

SIMPLIFY expression: #n
Enter expression.

У відповідь слід вказати вираз, що підлягає спрощенню.

Дія цього пункту аналогічна до дії пункту *Expand*.

При необхідності обчислити значення числового виразу слід звернутися до послуги *approX*.

При зверненні до пункту *approX* з'являється додатковий запит у вигляді

APPROXIMATE expressions: #n
Enter expression.

У відповідь на нього слід ввести вираз, значення якого необхідно обчислити.

Приклади

1. Якщо побудовано вираз $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}$, то після звернення до послуги *Expand* одержимо значення вказаної границі – 1 (див. рис. 2.9).
2. Якщо побудовано вираз $\left[\dfrac{d}{dx}\right]^3\cos(x)$, то після звернення до послуги *Expand* одержимо шуканий результат – третю похідну від функції cos(x) – функцію sin(x) (див. рис. 2.9).
3. Якщо введено функцію cos(x) і побудовано вираз $\int\cos(x)dx$, тоді після звернення до послуги *Expand* одержимо первісну до функції cos(x) – функцію sin(x) (див. рис. 2.10, вирази 7:, 8:). Якщо ж побудовано вираз $\int\limits_1^2\cos(x)dx$, то після звернення до послуги *Expand* буде одержано $\sin(2)-\sin(1)$. Після звернення до послуги *approX* одержимо значення виразу $\sin(2)-\sin(1)$ – число 0.0678265 (див. рис. 2.10, вирази 9:, 10:, 11:).
4. Нехай потрібно обчислити

$$\int\limits_1^{2/\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{t^2-1}\right)dt.$$

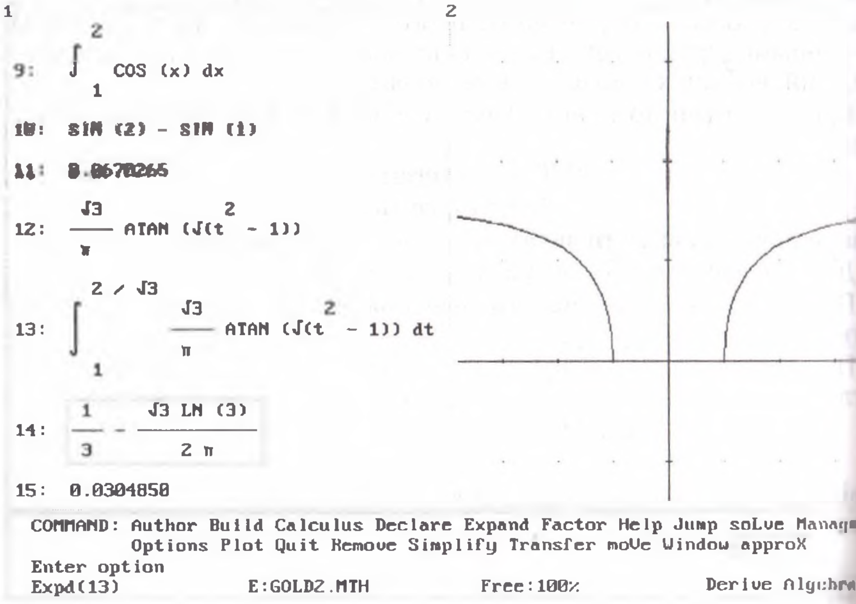


Рис. 2.11

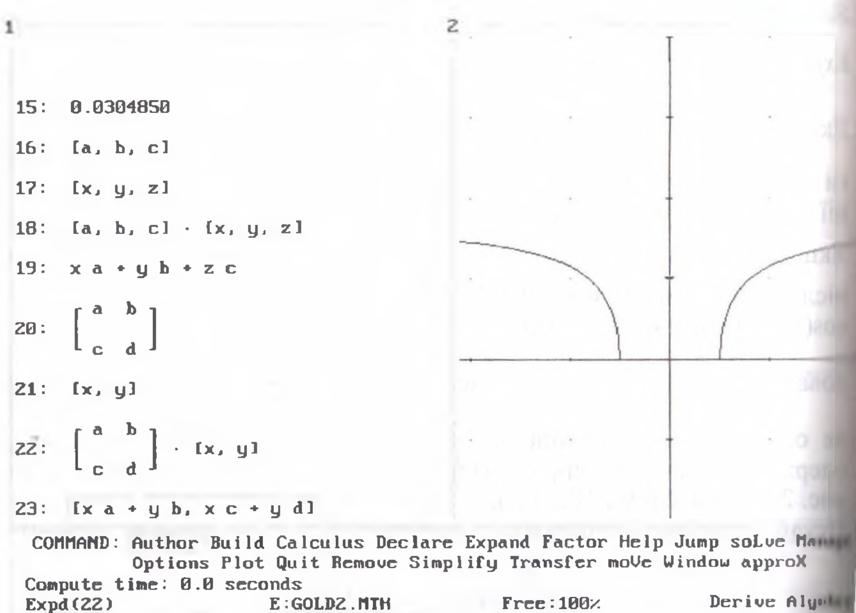


Рис. 2.12

Введемо до алгебраїчного вікна вираз $\frac{\sqrt{3}}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{t^2-1}\right)$ і далі (з використанням послуги *Integrate* пункту *Calculus*) побудуємо вираз (рис. 2.11, вираз 13:)

$$\int_1^{2/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{t^2-1}\right)dt.$$

Звернувшись до послуги *Expand* (вказавши при цьому на вираз 13:), одержимо

$$\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}\ln(3)}{2\pi}.$$

Скориставшись далі послугою *approX*, одержимо шукане значення 0.0304850 (див. рис. 2.11).

5. Якщо введено вектори $[a, b, c]$ і $[x, y, z]$ і побудовано вираз $[a, b, c].[x, y, z]$, то після звернення до послуги *Expand* одержимо скалярний добуток вказаних векторів (рис. 2.12): $xa + yb + zc$.

6. Нехай введено матрицю $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ та вектор $[x, y]$ і за допомогою послуг пункту *Build* побудовано $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot [x, y]$.

Після звернення до пункту *Expand* одержимо $[xa + yb, xc + yd]$ (див. рис. 2.12).

7. Якщо побудовано вираз *TAYLOR* (sin*x*, *x*, 0, 5), то після звернення до послуги *Expand* одержимо $x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ (рис. 2.13), а для *TAYLOR* (cos*x*, *x*, 0, 4) – $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$.

8. Нехай у вікні типу *Algebra* є вирази

1) sin(1),

2) 4/3**pi**2^3,

3) $\int_0^1 x^2 dx$.

Застосовуючи операцію *Approximate* до кожного з цих виразів, послідовно одержимо відповідні значення (рис. 2.14):

1) 0.841470,

2) 33.5103,

3) 0.66666.

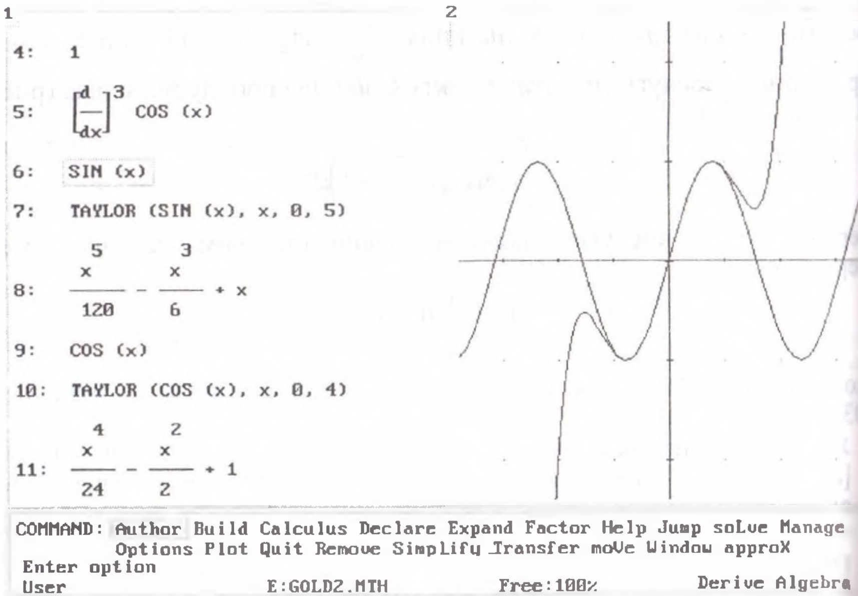


Рис. 2.13

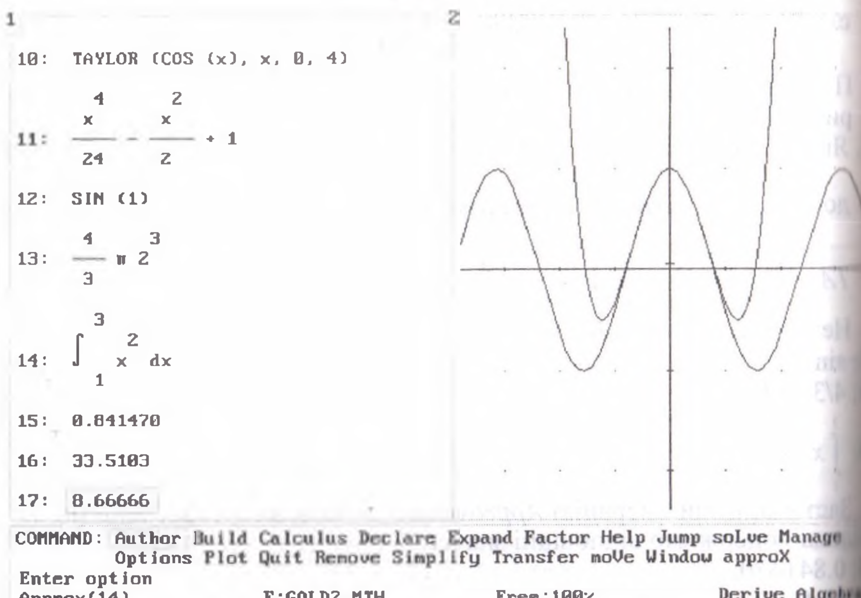


Рис. 2.14

Запитання для самоконтролю

1. Як вказати вираз, який необхідно перетворити чи спростити?
2. Як з використанням послуг програми *DERIVE* отримати значення виразу?
3. Чи досить скористатися послугами пункту *Calculus* для того, щоб:
   а) обчислити границю?
   б) знайти похідну від заданої функції?
   в) знайти первісну до заданої функції?
   г) обчислити визначений інтеграл?
   д) обчислити скалярний добуток векторів?
   е) обчислити добуток матриці на вектор?
   ж) отримати кілька перших членів розкладу заданої функції в ряд Тейлора?

Вправи для самостійного виконання

1. Використовуючи послуги програми *DERIVE*, обчислити:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x};\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-1}{1-\cos x}\right);\ \lim_{x\to -1}\frac{1+x}{1+x^3};\ \lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{tg}(x-1)}{1-x};\ \frac{d}{dx}x\ln x;\ \left[\frac{d}{dx}\right]^2\left(\frac{1}{1+2^{1/x}}\right);$$

$$\left[\frac{d}{dx}\right]^2\left(e^{x+\frac{1}{x}}\right);\ \left[\frac{d}{dx}\right]^2(\mathrm{arctg}\,x);\ \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}};\ \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx;\ \int\frac{dx}{1+x+x^2};\ \int\sin^3 x dx;$$

$$\int_1^2\cos^2 x dx;\ \int_{-a}^{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \text{ для } a=1, 2, 3, 4, 5;\ \int_3^5\frac{dx}{(x-1)(x-2)};\ \int_2^5\frac{(\ln x)^2}{x}dx;\ \int_{-1}^{1}\frac{dx}{(2-|x|)};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2};\ [1,2,3]\cdot[3,-2,1];\ [x,y]\cdot[-y,x];\ \sqrt{[a,b,c]\cdot[a,b,c]} \text{ для } a=0, b=1, c=0, a=1,$$

$$b=1, c=1, a=-1, b=0, c=5;\ \begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 4 & 7 & -1\\ 2 & 6 & 9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ -2 & 1 & 4\\ -3 & 5 & 7\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ 3 & -5 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 5\\ 2\end{bmatrix};\ [a,b,c]\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}\cdot[x,y,z].$$

2. Знайти перші 5 членів розкладу в ряд Тейлора в околі точки $x = 0$ таких функцій:
$\sin x$; $\cos x$; $\ln(1 + x)$; e^x; $\sin(x^2)$; xe^x; e^{-x^2}; $\sqrt{1+x+x^2+x^3}$; $e^x\sin x$; $\cos(\sin x)$; $\sin(\cos x)$.

§ 27. Розклад чисел і виразів на множники

При необхідності розкласти число, многочлен, елементи вектора чи матриці на множники використовується послуга *Factor*.

При зверненні до пункту *Factor* (розкласти на множники) з'являється додатковий запит

Factor expession: #n.

У відповідь на нього слід ввести вираз, що підлягає розкладанню. В результаті цього одержують розклад вказаного виразу на множники. Якщо у виразі є вектор або матриця, то розкладається на множники кожен елемент вектора чи матриці.

1

13: $\frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} + 1$

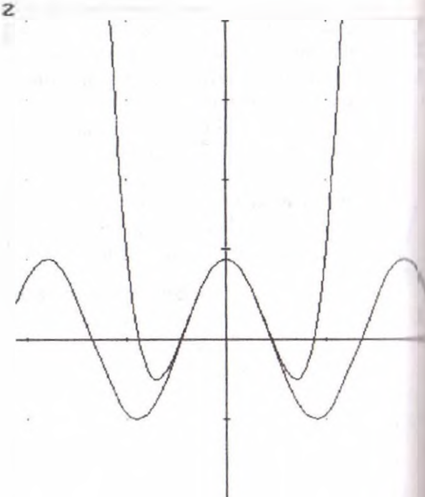
14: [16, 24, 70]

15: $\left[2^4,\ 2^3\ 3,\ 2\ 5\ 7\right]$

16: $\begin{bmatrix} 512 & 88 & 124 \\ 36 & 95 & 79 \\ 234 & 86 & 74 \end{bmatrix}$

17: $\begin{bmatrix} 2^9 & 2^3\ 11 & 2^2\ 31 \\ 2^2\ 3^2 & 5\ 19 & 79 \\ 2\ 3^2\ 13 & 2\ 43 & 2\ 37 \end{bmatrix}$

2



```
COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
         Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Compute time: 0.0 seconds
Fctr(16)              E:GOLD2.MTH          Free:100%          Derive Algebra
```

Рис. 2.15

3: $(x - 3)\ (x - 2)\ (x + 5)\ (x^2 + x + 1)$

4: $x^4 + x^3 - x^2 - 2\ x - 2$

5: $x^4 + x^3 - x^2 - 2\ x - 2$

6: $x^4 + x^3 - x^2 - 2\ x - 2$

7: $(x^2 + 0\ x - 2)\ (x^2 + x + 1)$

8: $(x - \sqrt{2})\ (x + \sqrt{2})\ (x^2 + x + 1)$

9: $-\frac{(x - \sqrt{2})\ (x + \sqrt{2})\ (-(2\ x + 1) + \sqrt{3}\ \hat{\imath})\ \left[x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\ \hat{\imath}}{2}\right]}{2}$

```
FACTOR: Amount: Trivial Squarefree Rational raDicals Complex
Select amount of factoring
User                  E:GOLD2.MTH          Free:100%          Derive Algebra
```

Рис. 2.16

Якщо елементи, що підлягають розкладу на множники, є виразами, що містять змінні, то після введення виразу у відповідь на запит *Factor expression: #n* з'являється додатковий запит

FACTOR: Amount: Trivial Squarefree Rational raDicals Complex
Select amount of factoring.

У відповідь слід вибрати бажаний тип розкладу:

Trivial – найпростіший, незначний (винесення спільного множника за дужки),
Squarefree – вільний від коренів,
Rational – раціональний,
raDicals – в радикалах,
Complex – в комплексних числах,

і натиснути клавішу *Enter*, після чого в алгебраїчному вікні з'являється результат.

Приклади

1. Якщо під номером 12: введено вираз 30, то після звернення до послуги *Factor* одержують 13: 2*3*5.

Якщо під номером 14: введено вектор 14: [16, 24, 70], то після звернення до послуги *Factor* одержують (рис. 2.15)
15: $[2^4, 2^3*3, 2*5*7]$.

На рис. 2.15 показано, як розкладаються на множники елементи матриці (з міткою 16:) після звернення до послуги *Factor* (матриця з міткою 17:).

2. Якщо під номером 5: введено вираз
5: $x^5 + x^4 - 18x^3 + 11x^2 + 11x + 30$ і звертаються до послуги *Factor*, вказавши на вираз 5: та тип розкладу *Rational*, одержують
6: $(x - 3)(x - 2)(x + 5)(x^2 + x + 1)$.

3. Нехай потрібно розкласти на множники многочлен
4: $x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$.

Тоді в залежності від вказаного типу розкладу одержують (рис. 2.16):

Trivial: 5: $x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$;
Squarefree: 6: $x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$;
Rational: 7: $(x^2 + 0x - 2)(x^2 + x + 1)$;
raDicals: 8: $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+x+1)$;
Complex: 9: $-\dfrac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(-(2x+1)+i\sqrt{3})(x+1/2+i\sqrt{3}/2)}{2}$.

Запитання для самоконтролю

1. Для чого призначено послугу *Factor*?
2. Як вказати бажаний тип розкладу на множники виразу із змінними?
3. Як виконується послуга *Factor*, якщо встановити вказівник виразів: на вектор? на матрицю? на поліном?

Вправи для самостійного виконання

1. Розкласти на прості множники числа:
   76; 147; 218; 321; 459; 518; 1048; 5024; 7739; 10492.
2. Розкласти на множники многочлени:
   x^3-1, x^3+1, x^4-1, x^4+1, x^5-1, x^5+1, x^2-7x+6, $x^4-x^3+x^2+x-2$, вказавши для кожного розкладу: *trivial*, *squarefree*, *rational*, *radicals*, *complex*.
3. Розкласти на множники вирази:
   $u^2v^2+uv^2-v^2-u^2v-2u^2-2u+v+2$, $\cos^2x-2\cos x+1$, 2^{x^3-x+3}, e^{x+y}, $\cos^2x-\sin^2x$.

§ 28. Розв'язування рівнянь

Для відшукання аналітичних розв'язків деяких рівнянь в програмі *DERIVE* призначено послугу *soLve*.

При зверненні до послуги *soLve* з'являється додатковий запит у вигляді

SOLVE expression: # n.

У відповідь на нього необхідно вказати один із раніше введених виразів чи ввести новий.

Якщо при цьому вказано вираз виду *Ф1 = Ф2*, то розв'язується відповідне рівняння. Якщо ж вказано вираз виду *Ф1*, то розв'язується рівняння виду *Ф1* = 0. Якщо у вираз входить кілька змінних, то з'являється додатковий запит у вигляді

SOLVE variable: .

У відповідь на нього необхідно вказати змінну, відносно якої слід розв'язати рівняння. Якщо ж до виразу входить лише одна змінна, то рівняння розв'язується відносно цієї змінної.

Приклади

1. Нехай було введено вираз
   8: x^2-5x-6 .

Після звернення до пункту *soLve* і вказування на вираз # 8 одержують

9: $x=-1$,
10: $x=6$.

2. Якщо було сконструйовано вираз (з використанням пункту *Calculus*)

11: $\int_{-1}^{x} t\,dt$,

то після звернення до пункту *soLve* і вказування на вираз #11 одержують

12: $x=1$,
13: $x=-1$.

3. Якщо за допомогою послуги *Build* було побудовано вираз
16: $x^2=25$,

то після звернення до пункту *soLve* і вказування на вираз #16 одержується

17: $x=5$,
18: $x=-5$.

4. Якщо було побудовано вираз

19: $\int_{-1}^{x} t\,dt = x^2$,

то після звернення до пункту *soLve* одержується

20: $x=i$,
21: $x=-i$.

5. Після звернення до пункту *soLve* і вказування на вираз #22

22: $\int_{-1}^{x} t\,dt = x$

одержується

23: $x=1-\sqrt{2}$,
24: $x=\sqrt{2}+1$.

6. Якщо було побудовано вираз
30: $xy-z+t$,

то після звернення до пункту *soLve* і вказування на вираз #30 та змінну *y* одержується

31: $y=\dfrac{z-t}{x}$.

7. Якщо було побудовано вираз
35: $0x+1-w+0$,

то після звернення до пункту *soLve* і вказування на вираз #35 та змінну *w* одержується

36: $w=1$.

Якщо ж вказати на змінну *x*, видається повідомлення: *No solutions found* (розв'язків не знайдено), подається звуковий сигнал про нестандартну ситуацію чи помилкові дії і відбувається перехід до головного меню програми.

8. Якщо було побудовано вираз
37: ax^2+bx+c ,

то після звернення до послуги *soLve* і вказування на змінну *x* одержимо

38: $x=-\dfrac{b}{2a}-\dfrac{i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$,

39: $x=-\dfrac{b}{2a}+\dfrac{i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$.

При вказуванні на змінну a одержимо

40: $a = -\dfrac{bx + c}{x^2}$,

на змінну b –

41: $b = -\dfrac{ax^2 + c}{x}$,

на змінну c –

42: $c = -x(ax + b)$.

9. Якщо введено вираз

43: $|x - 2| + |x - 1| - 1$,

то звернення до послуги *soLve* не дає результату. Разом з тим, очеви[дно], рівнянню $|x - 2| + |x - 1| - 1 = 0$ задовільняє будь-яке $x \in [1,$ (рівняння має безліч розв'язків), оскільки на проміжку $[1,$ $|x - 1| = x - 1$, а $|x - 2| = -(x - 2) = -x + 2$, тому при $x \in [1,$ $|x - 2| + |x - 1| = 1$.

Запитання для самоконтролю

1. Якого типу рівняння можна розв'язати, скориставшись послугою *soLve*?
2. Чи можна за допомогою послуги *soLve* розв'язувати рівняння виду: $\log_a x = b$? $a^x = b$?
3. Чи можна розв'язати з використанням послуги *soLve* рівняння з буквенними коефіцієнтам[и] з числовими коефіцієнтами?
4. Як, користуючись послугою *soLve*, вказати, відносно якої змінної необхідно розв'язати рі[в]няння, якщо до відповідного виразу входять кілька змінних?
5. Чи можна, користуючись послугою *soLve*, знайти комплексні корені полінома?
6. Чи означає, що рівняння виду $f(x) = 0$ не має розв'язків, якщо звернення до послуги *soLve* [не] дає результату?

Вправи для самостійного виконання

Використовуючи послугу *soLve*, розв'язати рівняння:

1. $x^2 - 8x + 9 = 0$ – відносно x;
2. $ax + by = c$ – відносно y;
3. $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$;
4. $\lg^2 x - 4\lg x + 5 = 0$;
5. $2^{4x} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$;
6. $(2x - 1)^2 + (2x - 1)(x + 2) - 2(x + 2)^2 = 0$;
7. $(x - 2)^2 + (2x + 1)(x - 2) - 2(2x + 1)^2 = 0$;
8. $\dfrac{\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x+1} - 2}{x} = 0$;
9. $|x - 1|^{x^2 - 2x} = |1 - x|^{2 - x}$;
10. $|x - 2|^{x^2 - x} = |2 - x|^{2 - x}$;
11. $\log_{x-1}(x + 2) + 1 = \log_{x-1} 4$;
12. $\log_{x-2}(x + 3) + 1 = \log_{x-2} 6$;
13. $x^2 - \dfrac{3}{x+1} = x + 2$;
14. $\sqrt{-x} - \dfrac{2}{\sqrt{-x}} = 1$;
15. $\sqrt{-x} - \dfrac{3}{\sqrt{-x}} = 2$;
16. $4\log_2(\sqrt{-x}) - \sqrt{\log_2(-x)} = 1$;
17. $\log_3(\sqrt{-x}) - \sqrt{\log_3(-x)} = \dfrac{3}{2}$;
18. $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = x$ …
19. $2^{\log_2 2x} + x^{\log_2 2x} = 32$;
20. $\sqrt{x + \sqrt{x + 11}} + \sqrt{x - \sqrt{x - 11}} = 4$ …
21. $\log_2 x - \log_x 4 = 1$;
22. $\dfrac{x^4}{(5x - 6)^2} - 1 = 0$;

23. $\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{2x-6}}=1$;

24. $\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{2x-10}}=1$;

25. $|x+1|+|x-1|+|x-2|=2$;

26. $|x+2|+|x+1|+|x-1|=2$.

§ 29. Розв'язування тригонометричних рівнянь

При розв'язуванні (з використанням послуги *soLve*) найпростіших тригонометричних рівнянь виду $\sin(x)=a$, $\cos(x)=a$, $\text{tg}(x)=a$, $\text{ctg}(x)=a$ за допомогою програми *DERIVE* подаються головні розв'язки цих рівнянь у вигляді, показаному на рис. 2.17. Інші розв'язки можна отримати, використовуючи відповідні графічні побудови або ж враховуючи властивості функцій $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\text{tg}(x)$, $\text{ctg}(x)$ (парність чи непарність, періодичність, величину періоду, відомості про межі, в яких слід визначити значення x). Якщо програма не знаходить розв'язків рівняння, на екран виводиться вихідне рівняння в незмінному вигляді.

Приклади

Розв'язати тригонометричні рівняння

1. $\sin(x)+\cos(x)=1$.

Після звернення до послуги *soLve* одержимо $x = 0$ (рис. 2.18). Розв'язки $x=2k\pi$ та $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z,$ програма не визначає.

2. $\sin(x)+\cos(x)=1/2$.

Після звернення до послуги *soLve* одержимо (див. рис. 2.18):

$$x=\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{7}}{7}\right)-\frac{\pi}{4}.$$

3. $\sin(x)+\cos(2x)=1$.

Звернення до послуги *soLve* не дає бажаних результатів, хоч, очевидно, рівняння має розв'язки $x=0+k\pi$, $x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in Z$. Якщо в пункті *Trigonometry* пункту *Manage* встановити: *Direction: Expand* і *Toward: Sines*, вказаний вираз набуде вигляду $-2\sin^2x+\sin x+1=1$ (див. рис. 2.18), однак подальше звернення до послуги *Solve*, послуг *Simplify* чи *Expand* бажаних результатів не дає. В такому разі слід позначити $\sin(x)$ через, наприклад, v і ввести до розгляду рівняння виду $-2v^2+v+1=1$.

Після звернення до пункту *soLve* одержимо

$v=1/2$

$v=0$.

1 2

38: SIN (x) = a

39: x = ASIN (a)

40: COS (x) = a

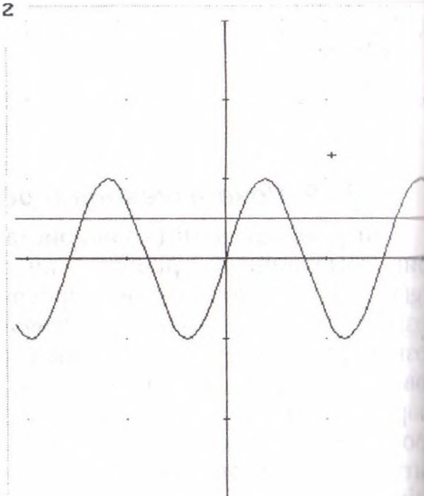
41: $x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{ASIN}\ (a)$

42: TAN (x) = a

43: x = ATAN (a)

44: COT (x) = a

45: $x = \mathrm{ATAN}\left[\frac{1}{a}\right]$



COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Compute time: 0.1 seconds
Solve(44) E:GOLD2.MTH Free:92% Derive Algebra

Рис. 2.17

1 2

47: SIN (x) + COS (x) = 1

48: x = 0

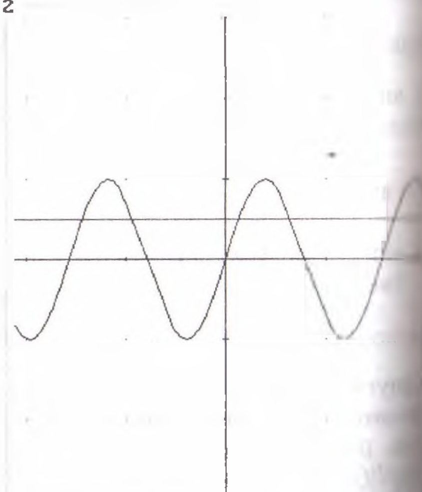
49: $\mathrm{SIN}\ (x) + \mathrm{COS}\ (x) = \frac{1}{2}$

50: $x = \mathrm{ATAN}\left[\frac{\sqrt{7}}{7}\right] - \frac{\pi}{4}$

51: SIN (x) + COS (2 x) = 1

52: $-2\ \mathrm{SIN}\ (x)^2 + \mathrm{SIN}\ (x) + 1 = 1$

53: $-2\ v^2 + v + 1 = 1$



COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Enter option
User E:GOLD2.MTH Free:92% Derive Algebra

Рис. 2.18

Розв'язуючи тригонометричні рівняння $\sin(x) = 0$ та $\sin(x) = 1/2$, одержимо розв'язки вихідного тригонометричного рівняння $\sin(x) + \cos(2x) = 1$.

У попередньому прикладі було виконано заміну $v = \sin(x)$ (після того, як $\cos(2x)$ було подано через $\sin x$: $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$).

Часто зручно тригонометричне рівняння звести до алгебраїчного, скориставшись заміною $v = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$.

Тоді

$$\cos(x) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1 - v^2}{1 + v^2},$$

$$\sin(x) = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2v}{1 + v^2}.$$

Розв'язавши (якщо вдається) отримане алгебраїчне рівняння відносно v і скориставшись оберненою заміною $x = 2\mathrm{arctg}(v)$, можна знайти розв'язок вихідного тригонометричного рівняння.

Приклади

1. Розв'язати рівняння $\sin(x) + \sin(x)\cos(x) + \cos(x) = 0$.

Безпосереднє звернення до послуги *soLve* не дає результатів.

Поклавши $v = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, одержимо

$$\frac{2v}{1+v^2} + \frac{2v(1-v^2)}{(1+v^2)^2} + \frac{1-v^2}{1+v^2} = 0,$$

$$2v(1+v^2) + 2v(1-v^2) + (1-v^2)(1+v^2) = 0,$$

$$2v(1+v^2+1-v^2) + (1-v^2)(1+v^2) = 0,$$

$$4v + 1 - v^4 = 0, \quad v^4 - 4v - 1 = 0.$$

Використання послуги *soLve* не дає бажаних результатів.

Побудувавши графік функції $y = v^4 - 4v - 1$, бачимо, що рівняння $v^4 - 4v - 1 = 0$ має два дійсні корені: $v_1 \approx -0.249$, $v_2 \approx 1.663$.

Враховуючи, що $x = 2\mathrm{arctg}v$, одержимо $x_1 \approx -0.488 \pm 2k\pi$, $x_2 \approx 3.088 \pm 2k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

2. Роз'язати рівняння

$$\operatorname{arctg}(x)+\operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\operatorname{arctg}(1)=0.$$

Безпосереднє звернення до послуги *soLve* не дає результату. Однак, враховуючи, що $\operatorname{arctg}(x)+\operatorname{arctg}(y)=\operatorname{arctg}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$, звідки $\operatorname{arctg}(x)+\operatorname{arctg}(1)=\operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, дане рівняння можна звести до $2\operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=0$.

Звернення до послуги *soLve* знову не дає результату. Разом з тим, з останнього рівняння слідує $\frac{1+x}{1-x}=0$. Звідки $x=-1$.

Застосування послуги *soLve* до рівняння $\frac{1+x}{1-x}=0$ дає: $x_1=-1$, $x_2=1/0$.

Запитання для самоконтролю

1. Загальний чи частинний розв'язок тригонометричного рівняння одержується при використанні послуги *soLve* для знаходження розв'язку?
2. Чи означає, що тригонометричне рівняння не має розв'язків, якщо звернення до послуги *soLve* не дає результату?
3. Як тригометричне рівняння можна звести до алгебраїчного?

Вправи для самостійного виконання

Розв'язати рівняння:

1. $\sin 2x-2\sin x-2\cos x+2=0$;
2. $\operatorname{tg}x+\cos x-\sin x=1$;
3. $2\sin^2 x+1=3\sin x$;
4. $\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin 2x=\sin x-\cos x$;
5. $2\sin^2 x-\sin 2x=\sqrt{3}(\sin 2x-2\cos x)$;
6. $\sin^2 x+1=\frac{5}{2}\sin x$;
7. $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}=1+\cos x$;
8. $\frac{\cos 4x+2\cos^2 x-1}{(\sin x+1)(\sin 3x-1)}=0$;
9. $\frac{8\sin x\cos x\sin 2x-1}{\sqrt{3}-2\sin 4x}=0$;
10. $2\sin x-\operatorname{tg}x+1=\frac{1}{\cos x}$;
11. $4\cos x-\operatorname{ctg}x-1=\frac{1}{\sin x}$;
12. $\sqrt{\operatorname{tg}x}=\sqrt{2\sin x}$;
13. $\sqrt{\operatorname{ctg}x}=\sqrt{3\cos x}$;
14. $\cos x+\sin x=\sqrt{1-2\cos^2 x}$;
15. $\sqrt{\cos 2x-\sin 4x}=\sin x-\cos x$;
16. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sin x\cos x)$;
17. $\frac{2\sin^3 x-\sin^2 x-\sin x}{\cos^2 x-\cos x}=0$;

18. $\cos 3x + \cos x = 2$;

19. $\sin 2x + \sin 4x = 2$;

20. $\sqrt{1-\cos x} = -\sin x$;

21. $\sqrt{1-\cos x} = -\cos x$;

22. $6\cos x + 4\sin x = \frac{1}{\cos x}$;

23. $3\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}$.

§ 30. Тотожні перетворення виразів

Використовуючи послуги програми *DERIVE*, можна перетворювати вирази від одного вигляду до іншого, подавати розв'язки рівнянь в різній послідовності та ін.

Коли необхідно вказати, в якому вигляді слід подавати вирази, розв'язки рівнянь тощо, використовується пункт *Manage*. Цей пункт містить у собі підпункти: *Branch*, *Exponential*, *Logarithm*, *Ordering*, *Substitute*, *Trigonometry*.

При зверненні до підпункту *Branch* з'являється додатковий запит у вигляді:

BRANCH: Principal Real Any
Select preffered Branch for roots.

Цим пропонується вибрати бажаний порядок подання коренів. У відповідь на запит слід встановити вказівник на потрібний підпункт і натиснути клавішу *Enter*. Вибраний підпункт запам'ятовується. В алгебраїчному вікні при цьому ніяких змін не відбувається. Далі при розв'язуванні рівнянь розв'язки будуть подаватися в послідовності, яка залежить від того, на який підпункт було вказано при зверненні до послуги *Branch*.

Приклад

Нехай в пункті *Branch* обрано підпункт *Principal*. Якщо далі до алгебраїчного вікна ввести вираз $x^5 + 1$ і звернутися до підпункту *Solve*, в алгебраїчному вікні одержимо інформацію, показану на рис. 2.19. Якщо ж в пункті *Branch* обрано підпункт *Real*, то при розв'язуванні того ж рівняння отримаємо інформацію, показану на рис. 2.20. Якщо обрати підпункт *Any*, результат буде той же, що і при виборі підпункту *Real*.

Якщо розв'язувати рівняння $x^3 + 1 = 0$, то при виборі підпунктів пункту *Branch* одержуємо відповідно

при *Principal:* $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ x_2 = -1,\ x_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$

при *Real:* $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ x_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$

при *Any:* $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ x_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

4: $x^5 + 1$

5: $x = \dfrac{\sqrt{5}}{4} + \dfrac{1}{4} + \hat{\imath}\ \mathrm{SIN}\left[\dfrac{\pi}{5}\right]$

6: $x = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{5}}{4} + \hat{\imath}\ \left[\left[\dfrac{\sqrt{5}}{4} + \dfrac{1}{4}\right] \mathrm{COS}\left[\dfrac{\pi}{10}\right] + \left[\dfrac{\sqrt{5}}{4} - \dfrac{1}{4}\right] \mathrm{SIN}\left[\dfrac{\pi}{5}\right]\right]$

7: $x = -1$

8: $x = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{5}}{4} + \hat{\imath}\ \left[-\dfrac{\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1}{2}\right] \mathrm{SIN}\left[\dfrac{\pi}{5}\right]$

9: $x = \dfrac{\sqrt{5}}{4} + \dfrac{1}{4} + \hat{\imath}\ \left[\left[-\dfrac{\sqrt{5}}{4} - \dfrac{1}{4}\right] \mathrm{COS}\left[\dfrac{\pi}{10}\right] + \left[\dfrac{\sqrt{5}}{4} - \dfrac{1}{4}\right] \mathrm{SIN}\left[\dfrac{\pi}{5}\right]\right]$

COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Compute time: 0.2 seconds
Solve(4) E:GOLD2.MTH Free:100% Derive Algebra

Рис. 2.19

1

1: $x^5 + 1$

2: $x = -1$

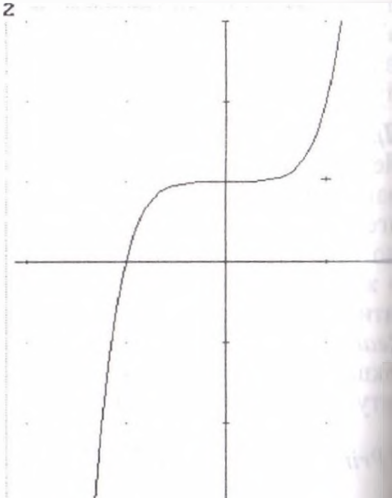
3: $x = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{5}}{4} - \hat{\imath}\ \mathrm{COS}\left[\dfrac{\pi}{10}\right]$

4: $x = \dfrac{\sqrt{5}}{4} + \dfrac{1}{4} - \hat{\imath}\ \mathrm{SIN}\left[\dfrac{\pi}{5}\right]$

5: $x = \dfrac{\sqrt{5}}{4} + \dfrac{1}{4} + \hat{\imath}\ \mathrm{SIN}\left[\dfrac{\pi}{5}\right]$

6: $x = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{5}}{4} + \hat{\imath}\ \mathrm{COS}\left[\dfrac{\pi}{10}\right]$

2



COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Compute time: 0.1 seconds
Solve(1) E:GOLD2.MTH Free:100% Derive Algebra

Рис. 2.20

В підпункті *Exponential* є три підпункти: *Collect*, *Auto*, *Expand*. В залежності від вибору підпункту степеневі і показникові функції подаються у різному вигляді.

Приклад

В залежності від того, на який із підпунктів вказано в підпункті *Exponential*, якщо ввести вираз exp(x*y)^2 і далі звернутися до послуги *Expand*, одержимо:
при *Collect*: e^{2xy},
при *Auto*: $(e^{xy})^2$,
при *Expand*: $(e^{xy})^2$.

Для виразу x^(a^2 + 2*b + c):
при *Collect*: x^{a^2+2b+c},
при *Auto*: x^{a^2+2b+c},
при *Expand*: $x^c\,(x^b)^2\,x^{a^2}$.

Послуга *Logarithm* використовується аналогічно. Наприклад, якщо ввести вираз log ($x^{2*}y$^8), то при зверненні до послуги *Expand* він подаватиметься у вигляді відповідно:
при *Collect*: $\ln(x^2y^8)$,
при *Expand*: $2\ln(-\mathrm{sign}(x)) + 8\ln(-\mathrm{sign}(y)) + 2\ln(-x) + 8\ln(-y)$,
при *Auto*: $\ln(x^2y^8)$.

Послуга *Ordering* використовується при необхідності вказати, за степенями яких змінних слід упорядковувати вираз. Наприклад, якщо при зверненні до послуги *Ordering* вказати змінні v, s, а потім ввести вираз v^2 + v*s + v^3 * s^2 + v^4 + s*v + s^3 + $s^{4*}c$ + s^2 і звернутися до послуги *Expand*, одержимо $v^4 + v^3s^2 + v^2 + 2vs + s^4c + s^3 + s^2$.

Послуга *Substitute* (підставити) пункту *Manage* використовується, якщо замість змінних, що входять до виразу, потрібно підставити деякі інші вирази (зокрема, сталі).

Наприклад, якщо в алгебраїчному вікні вказівник виразів встановити на вираз

#45: $x^2 - 5x + 7$

звернутися до послуги *Substitute* та у відповідь на запит *Substitute expression:#* вказати на вираз #45 і далі у відповідь на запит *Substitute value: x* ввести вираз vtan(v/2) +ln (v), в результаті отримаємо

#46: $(v\tan(v/2) + \ln(v))^2 - 5(v\tan(v/2) + \ln(v)) + 7$.

Якщо вказівник виразів встановити на вираз

#47: $v^2 + 2vs + s^2 - v - 2s + 5$

звернутися до послуги *Substitute* та у відповідь на запит *Substitute expression:#* вказати на вираз #47 і далі у відповідь на запити *Substitute value: s та Substitute value: v* відповідно на вирази

```
                3              2
3:   COS (2 x)   + SIN (2 x)

               6            4              2
4:   - 8 SIN (x)  + 8 SIN (x)  - 2 SIN (x)  + 1

               6             4              2
5:   8 COS (x)  - 16 COS (x)  + 10 COS (x)  - 1

       COS (6 x)       COS (4 x)       3 COS (2 x)       1
6:   ------------- - ------------- + --------------- + ---
           4               2                4            2

       COS (6 x)       COS (4 x)       3 COS (2 x)       1
7:   ------------- - ------------- + --------------- + ---
           4               2                4            2

               6             4            2         2             2
8:   8 COS (x)  - 12 COS (x)  + 4 SIN (x)  COS (x)  + 6 COS (x)  - 1

       COS (6 x)       COS (4 x)       3 COS (2 x)       1
9:   ------------- - ------------- + --------------- + ---
           4               2                4            2

COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
         Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Compute time: 0.0 seconds
Expd(3)                  E:GOLD2.MTH           Free:100%          Derive Algebra
```

Рис. 2.21

$\log(x, y) - xy$ та $\sin(xy) - \cos(x + y)$, в результаті отримаємо $(\sin(xy) - \cos(x + y))^2 + 2(\sin(xy) - \cos(x + y))(\log(x, y) - xy) +$ $+ (\log(xy) - xy)^2 - (\sin(xy) - \cos(x + y)) - 2(\log(x, y) - xy) + 5$.

Послуга *Trigonometry* використовується, якщо необхідно вказати як слід подавати тригонометричний вираз. При зверненні до послуги з'являється додатковий запит у вигляді

TRIGONOMETRY: DIRECTION: Auto Collect Expand
Toward: Auto Sines Cosines.

Щоб перейти від лівої групи підпунктів до правої чи навпаки, ми користується клавіша *Tab*.

Якщо, наприклад, встановити *Expand* і *Sines*, далі ввести вираз (cos(2*x))^3 + (sin(2*x))^2 і потім звернутися до послуги *Expand* чи *Simplify*, одержимо (рис. 2.21)

4: $-8\sin(x)^6 + 8\sin(x)^4 - 2\sin(x)^2 + 1$,

при *Expand* і *Cosines* той самий вираз $\cos(2x)^3 + \sin(2x)^2$ подається у вигляді

5: $8\cos(x)^6 - 16\cos(x)^4 + 10\cos(x)^2 - 1$ (запис $\cos(x)^6$ означає $\cos^6(x)$).

Якщо встановити *Collect* і *Cosines*, одержимо

6: $\dfrac{\cos(6x)}{4} - \dfrac{\cos(4x)}{2} + \dfrac{3\cos(2x)}{4} + \dfrac{1}{2}$, при *Collect* і *Sines* одержимо той же результат (див. рис. 2.21, вираз 7:).

При *Expand*, *Auto* одержуємо

8: $8\cos(x)^6 - 12\cos(x)^4 + 4\sin(x)^2\cos(x)^2 + 6\cos(x)^2 - 1$,

при *Collect*, *Auto*:

9: $\dfrac{\cos(6x)}{4} - \dfrac{\cos(4x)}{2} + \dfrac{3\cos(2x)}{4} + \dfrac{1}{2}$,

при *Auto*, *Sines*:

10: $-\sin(2x)^2\cos(2x) + \cos(2x) + \sin(2x)^2$,

при *Auto*, *Cosines*

11: $\cos(2x)^3 - \cos(2x)^2 + 1$.

Запитання для самоконтролю

1. Як з використанням послуг програми *DERIVE* можна виконувати тотожні перетворення виразів, до яких входять логарифмічні функції? показникові функції? степеневі функції? тригонометричні функції?
2. Як будуть подаватися вирази, що містять степеневі, показникові і логарифмічні функції, якщо в пункті *Manage* вказати на підпункти *Exponential* і *Collect*? *Exponential* і *Expand*? *Logarithm* і *Collect*? *Logarithm* і *Expand*?
3. Як будуть подаватися вирази, що містять тригонометричні функції, якщо в підпункті *Trigonometry* пункту *Manage* вказати на: *Collect, Toward Sines*? *Expand, Toward Sines*? *Collect, Toward Cosines*? *Expand, Toward Cosines*? *Auto, Auto*?
4. Для чого призначено послугу *Ordering*?
5. Для чого призначено послугу *Branch*?
6. Для чого призначено послугу *Substitute*?

Вправи для самостійного виконання

1. Використовуючи послуги пункту *Manage* програми *DERIVE*, виконати тотожні перетворення виразів:

$\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha} + \sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha} - \sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}$; $\cos 4x + 2\cos^2 x - 1$; $(\sin x + 1)(\sin 3x + 1)$; $\cos 4x + 2\sin^2 x - 1$; $(\cos x - 1)(\cos 3x + 1)$;

$\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha + \sin 8\alpha$; $\sin 5\alpha \sin 4\alpha$; $\cos 4x - \sin 4x \operatorname{tg} 8x$; $\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 8x$; $\dfrac{1}{8}\cos 4\alpha + \dfrac{1}{2}\cos 2\alpha + \dfrac{3}{8}$;

$\dfrac{1}{8}\cos 4\alpha - \dfrac{1}{2}\cos 2\alpha + \dfrac{3}{8}$; $\cos x - \sin x$; $1 + 2\cos 2\alpha + 2\cos 4\alpha + 2\cos 6\alpha$; $1 - 2\cos 2\alpha + 2\cos 4\alpha - 2\cos 6\alpha$.

2. З використанням послуг програми *DERIVE* перевірити, що мають місце рівності:

$\sin^2 2\alpha - \sin^2\alpha = \sin\alpha\sin 3\alpha$; $\cos^2 2\alpha - \sin^2\alpha = \cos\alpha\cos 3\alpha$;

$\cos^2(\alpha-\beta) - \sin^2(\alpha+\beta) = \cos 2\alpha\cos 2\beta$; $\sin^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) = 1 + \sin 2\alpha\sin 2\beta$;

$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta) = \sin^2(\alpha-\beta)$; $\dfrac{1}{16}\cos 5\alpha + \dfrac{5}{6}\cos 3\alpha + \dfrac{5}{8}\cos\alpha = \cos^5\alpha$;

$\dfrac{1}{16}\sin 5\alpha - \dfrac{5}{16}\sin 3\alpha + \dfrac{5}{8}\sin\alpha = \sin^5\alpha$; $\sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha-\beta) = \sin 2\alpha\sin^2\beta$;

$\cos^2(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = \sin 2\alpha\sin^2\beta$.

3. Використовуючи послугу *Orderind*, подати у зворотному порядку змінні у виразах: $abc + ab + ac + bc + a + b + c$; $x^2 + y^2 + x + y$; $svz + s^2 + vz + sz + z^2 + v^4$.

4. Використовуючи послугу *Substitute*, підставити вказані вирази замість змінних: 8 замість x у виразі log(x, 1/2); tg(x/2) замість t у виразі $t^2 - 2t + 1$; 2 та 3 замість a та b у виразі $\int_a^b x^2 dx$; π/4 замість x у виразі sin(x) + cos(x); cos(t), sin(t), tg(t) замість відповідно s, v, w у виразі $\int_{v-1}^{v+1} \log(w, s)dw$.

§ 31. Обчислення границь послідовностей і функцій

При обчисленні границь функцій слід спочатку сконструювати відповідний вираз, скориставшись послугою *Limit* пункту *Calculus*, вказавши при цьому значення, до якого спрямовується змінна, та тип границі – двостороння (*Both*), границя зліва (*Left*), границя справа (*Right*), або ж скористатися функцією *Lim* (див. §23), ввівши всі необхідні параметри цієї функції, після чого звернутися до послуги *Expand*.

Приклади

1. Обчислити границі:

$$\lim_{x \to 1-0} \left(\frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}} \right), \quad \lim_{x \to 1+0} \left(\frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}} \right).$$

Сконструювавши вираз (див. рис. 2.7):

$$\lim_{x \to 1-} \frac{1}{1 + \exp\left[\dfrac{1}{1-x}\right]}$$

і звернувшись до послуги *Expand*, одержимо значення границі 0.

Аналогічно для границі справа одержується значення 1. Таким чином, розглядувана функція в точці $x = 1$ має розрив 1-го роду (див. графік на рис. 2.7).

2. Для функції $\dfrac{1+x}{1+x^3}$ при $x \to -1 + 0$ та $x \to -1 - 0$ відповідно одержимо: $\lim\limits_{x \to -1-0} \dfrac{1+x}{1+x^3} = \dfrac{1}{3}$, $\lim\limits_{x \to -1+0} \dfrac{1+x}{1+x^3} = \dfrac{1}{3}$.

Таким чином, в точці $x = -1$ розглядувана функція має усувний розрив (рис. 2.22).

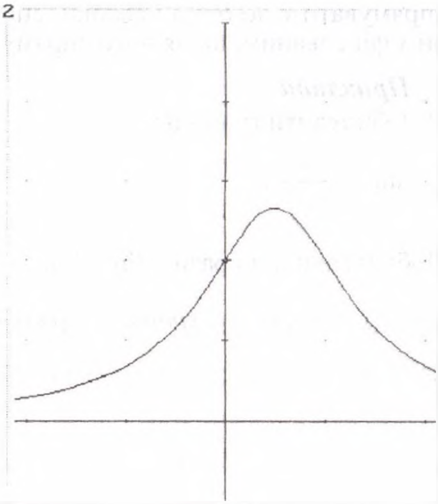
При обчисленні границь виду $\lim\limits_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y)$, якщо функція $f(x, y)$ неперервна, а значить має границю в точці (a, b), можна спрямовувати точку (x, y) до точки (a, b) по будь-якій траєкторії. Однак часто зручніше спочатку спрямувати x до a, залишаючи y фіксованим, після чого

14: $\dfrac{1 + x}{1 + x^3}$

15: $\lim\limits_{x \to -1-} \dfrac{1 + x}{1 + x^3}$

16: $\lim\limits_{x \to -1+} \dfrac{1 + x}{1 + x^3}$

17: $\dfrac{1}{3}$



COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Compute time: 0.0 seconds
Expd(15)   E:GOLDZ.MTH   Free:97%   Derive Algebra

Рис. 2.22

95: $\dfrac{1}{1 + 2^{1/(x y)}}$

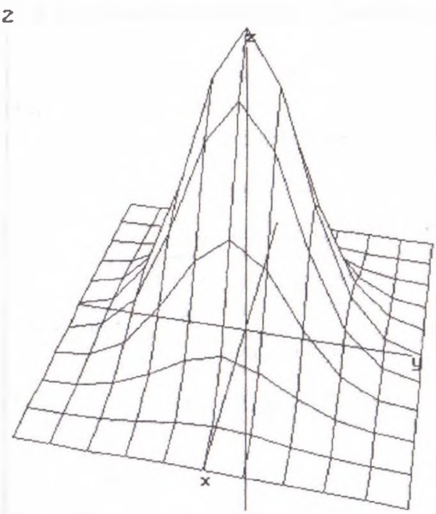
96: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{1 + 2^{1/(x y)}}$

97: $\lim\limits_{y \to 0-} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{1 + 2^{1/(x y)}}$

98: $\lim\limits_{y \to 0+} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{1 + 2^{1/(x y)}}$

99: 1

100: 0



COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Compute time: 0.0 seconds
Expd(98)   E:GOLDZ.MTH   Free:38%   Derive Algebra

Рис. 2.23

спрямувати y до b, чи навпаки, спочатку спрямувати y до b, залиши[illegible] чи x фіксованим, після чого спрямувати x до a.

Приклади

1. Обчислити границю

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2y^2}.$$

Побудувавши вирази $\lim\limits_{y\to 0-0}\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{x}{x^2y^2}$ і $\lim\limits_{y\to 0+0}\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{x}{x^2y^2}$ та зверну[illegible]шись до послуги *Expand*, одержимо відповідно $-\infty$ та $+\infty$. Таким чи[illegible]ном, при наближенні до точки (0, 0) границі функції $\frac{x}{x^2y^2}$ не існує.

2. Якщо задано функцію $f(x, y) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{xy}}}$, то при наближенні до точ[illegible] (1, 0) знизу одержуємо (рис. 2.23) $\lim\limits_{y\to 0-0}\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{xy}}} = 1$, а при набл[illegible]женні до тієї ж точки зверху – $\lim\limits_{y\to 0+0}\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{xy}}} = 0$.

Запитання для самоконтролю

1. Як, користуючись послугами програми *DERIVE*, сконструювати вираз виду $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$? $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$? $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$?
2. Чи можна, користуючись послугами програми *DERIVE*, обчислити границю виду $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$? $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$?

Вправи для самостійного виконання

Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$, $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-x}$;

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n)$; **3.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}\right)$; **4.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{tg}(kx)}{x}\right)$;

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arcsin(x)}{3x}$; **6.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}$; **7.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$; **8.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\sin(2x)}$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{\mathrm{tg}(x)}\right)$; **10.** $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\mathrm{tg}(\alpha+2h)-2\,\mathrm{tg}(\alpha+h)+\mathrm{tg}(\alpha)}{h^2}$.

11. $\lim\limits_{x \to 0} x\left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2}\right)$;

12. Знайти $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x)$ та з'ясувати, чи існує $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ для функції

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Знайти границі зліва і справа заданих функцій у вказаних точках:

1. $e^{x+1/x}$ в точці $x = 0$;   **2.** $\dfrac{2^{1/x} - 1}{2^{1/x} + 1}$ в точці $x = 0$;   **3.** e^{-1/x^2} в точці $x = 0$;

4. $\dfrac{\sqrt{7+x} - 3}{x^2 - 4}$ в точках $x = -2$, $x = 2$;   **5.** $e^{(1/x+1)}$ в точці $x = -1$;

6. $\ln\left(\dfrac{x^2}{(x+1)(x-3)}\right)$ в точках $x = -1$, $x = 3$;   7. $\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$ в точці $x = 0$;

8. $\dfrac{1 - \cos x}{\sin(\pi x)}$ в точках 0, 1, 2, 3, …

§ 32. Обчислення скінченних і нескінченних сум і добутків

При відшуканні значень сум і добутків деякої сукупності чисел чи виразів спочатку (з використанням послуги *Calculus* чи інших послуг) потрібно ввести відповідні вирази, після чого скористатися послугою *Expand*. При цьому межі зміни індексів доданків у сумі чи множників у добутку можуть бути як скінченні, так і нескінченні. При введенні символу ∞ слід набрати на клавіатурі слово *inf*.

Приклади

1. Знайти суму членів арифметичної прогресії $\sum\limits_{k=1}^{n} k$.

Ввівши спочатку до алгебраїчного вікна вираз k і звернувшись до підпункту *Sum* пункту *Calculus* та вказавши нижню межу (*Lower limit*) зміни індекса k рівною 1 та верхню межу (*Upper limit*) рівною n , одержимо вираз виду $\sum\limits_{k=1}^{n} k$ (рис. 2.24). Звернувшись далі до послуги *Expand* та вказавши на змінну n у відповідь на запит про те, за якою змінною слід розкривати вираз, одержимо (див. рис. 2.24): $\dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{2}$.

2. Знайти суму членів нескінченної спадної геометричної прогресії

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^k} + \ldots$$

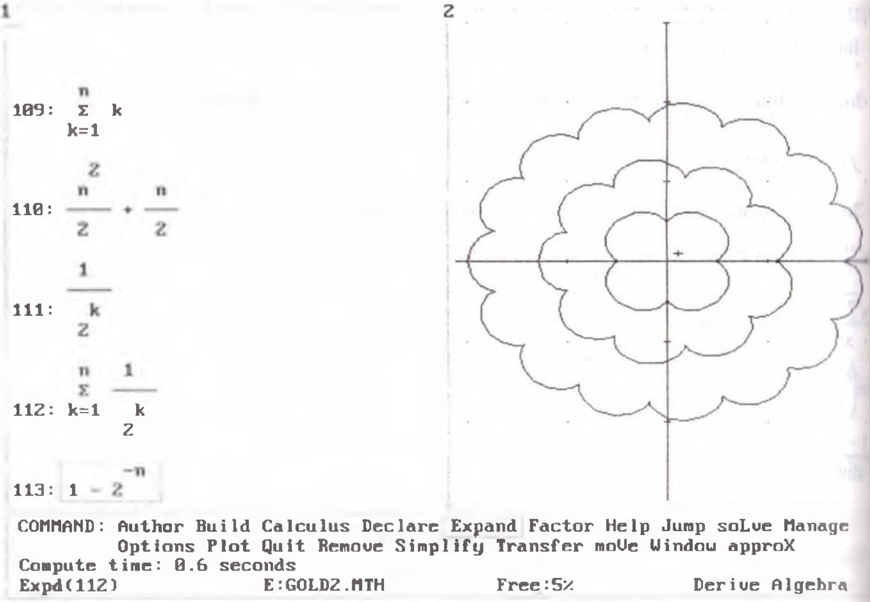


Рис. 2.24

Аналогічно до попереднього, сконструювавши вираз $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ та зв… рнувшись до послуги *Expand*, одержимо (див. рис. 2.24): $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1$.

3. Подати нескінченний періодичний десятковий дріб 0.77777... вигляді звичайного дробу.

Сконструювавши вираз $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{7}{10^k}$ та звернувшись до послуги *Expan…* одержимо шукане значення 7/9.

4. Обчислити добуток: $\prod_{k=2}^{25}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

Сконструювавши вираз $\prod_{k=2}^{25}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ та звернувшись до послу… *Expand*, одержимо 13/25.

5. Обчислюючи добуток $\prod_{k=1}^{20}\cos\frac{x}{2^k}$ для значення $x = 1.27$, одержи… (з використанням послуг *Product* пункту *Calculus* та *Substitute* пунк… *Manage*) $\prod_{k=1}^{20}\cos\frac{1.27}{2^k} = 0.752060$.

Запитання для самоконтролю

1. Як з використанням послуг програми *DERIVE* сконструювати вирази виду: $\sum_{k=1}^{n} f(k)$? $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$? $\prod_{k=1}^{n} f(k)$? $\prod_{k=1}^{\infty} f(k)$?

2. Як з використанням послуг програми *DERIVE* обчислити значення виразів виду: $\sum_{k=1}^{n} f(k)$? $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$? $\prod_{k=1}^{n} f(k)$? $\prod_{k=1}^{\infty} f(k)$?

3. Як з використанням послуг програми *DERIVE* обчислити границі виду: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(k)$? $\lim\limits_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} f(k)$?

Вправи для самостійного виконання

Обчислити вказані суми і добутки:

1. $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ для значень n, рівних 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, та значень x, рівних 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 1.43, 1.72;

2. $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$, $n \in \{ 15, 17, 19, 23, 27, 31, 37, 45 \}$, $x \in \{ 0.1, 0.25, 0.44, 1.23, 1.57 \}$;

3. $\sum_{k=1}^{n} \sin^2 kt$, $n \in \{ 1, 2, 3, \ldots, 30 \}$,

   $t \in \{ -1.5, -1.3, -1.1, -1, -0.75, -0.54, -0.37, -0.25, -0.17, -0.1, -0.03 \}$;

4. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $n \in \{ 1, 2, 3, \ldots, 100 \}$;

5. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $n \in \{ 1, 2, 3, \ldots, 100 \}$;

6. $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k^2}$, $n \in \{ 1, 2, 3, \ldots, 100 \}$;

7. $\sum_{k=1}^{n} k^2$; $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$; $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$; $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$; $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2k^2}\right)$, $n \in \{ 1, 2, \ldots, 50 \}$;

8. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $n \in \{ 1, 2, \ldots, 50 \}$, $p \in \{ 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 \}$;

9. $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$, $n = 2, 3, \ldots, 50$;

10. $\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$, $n = 2, 3, 4, 5, \ldots, 100$;

11. $\prod\limits_{k=0}^{n}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\right)$, $n = 1, 2, 3, ..., 50$;

12. $\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2^{k+1}}$, $n = 2, 4, 6, 8, ..., 100$;

13. $\prod\limits_{k=3}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)$, $n = 3, 5, ..., 101$;

14. $\prod\limits_{k=1}^{n}(1+x^{2k})$, $n = 1, 2, 3, ..., 100, x \in \{ 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 \}$;

15. $\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{3k}{3k-1}\cdot\frac{3k}{3k+1}$, $n = 1, 3, 5, ..., 101$;

16. $\prod\limits_{k=3}^{n}\frac{k^3-4}{k^2-1}$, $n = 3, 4, 5, ..., 100$;

17. $\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)$, $n = 1, 2, 3, ..., 100$;

18. $\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{(2k+1)\cdot(2k+7)}{(2k+3)\cdot(2k+5)}$, $n = 1, 2, 3, ..., 100$;

19. $\prod\limits_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$, $n = 2, 3, ..., 100$;

20. $\prod\limits_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{(2k-1)^2}\right)$, $n = 2, 3, 4, ..., 100$;

21. $\prod\limits_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{4}{k^2}\right)$, $m = 2, 3, 4, ..., 40, n = \mathrm{m} + 50$;

22. $\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$, $n = 2, 3, 4, ..., 100,\ x \in \left\{\frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right\}$;

23. $\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{e^{1/k}}{1+1/k}$, $n = 1, 2, 3, ..., 100$;

24. $x\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$, $n = 1, 2, 3, ..., 50,\ x \in \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$;

25. $x\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{\left(\frac{2k-1}{2}\right)^2\pi}\right)$, $n = 1, 2, 3, ..., 50,\ x \in \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$.

§ 33. Відшукання похідних і первісних в аналітичному поданні

Якщо потрібно знайти похідну деякого порядку від функції *f* ... слід спочатку ввести вираз, що визначає функцію *f*(*x*), після чого з... рнутися до підпункту *Differentiate* пункту *Calculus*, вказавши п...

цьому змінну, за якою необхідно виконати диференціювання, та порядок похідної. Цей же результат можна отримати і з використанням функції *Dif(u, x, n)*. Далі слід звернутися до послуги *Expand* (або *Simplify*). При цьому вирази у результаті можуть бути подані в різному вигляді залежно від того, які установки було вказано в пункті *Manage*.

Приклади

1. Знайти похідну від функції:

$$\frac{\sin x}{x}+\frac{x}{\sin x}.$$

Ввівши вираз $\frac{\sin x}{x}+\frac{x}{\sin x}$, звернемось до послуги *Differentiate* пункту *Calculus* та вкажемо змінну диференціювання x і порядок похідної 1. В результаті цього в алгебраїчному вікні з'явиться вираз $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{x}{\sin x}\right)$. Звернувшись далі до послуги *Expand*, одержимо похідну (рис. 2.25): $-\frac{x\cos x}{\sin^2 x}+\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}+\frac{1}{\sin x}$.

2. Знайти похідну першого порядку від функції $\frac{ax^2+bx}{av^2+bs}$ за змінною x.

Скориставшись послугами *Calculus* та *Expand* аналогічно до попереднього, одержимо (див. рис. 2.25):

$$-\frac{2xbs}{v^2(av^2+bs)}+\frac{2x}{v^2}+\frac{b}{av^2+bs}.$$

3. Знайти похідну другого порядку від функції $\ln(vx)$ за змінною x.

Скориставшись послугами *Calculus* та *Expand*, одержимо (рис. 2.26):

$$\frac{d^2}{dx^2}\ln(vx)=-\frac{1}{x^2}.$$

4. Знайти мішану похідну другого порядку спочатку за змінною x, а потім за змінною y від функції двох змінних

$$f(x,y)=xy\sin(x+y)\cos(x-y).$$

Скориставшись послугою *Calculus*, побудуємо вираз

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{d}{dx}(xy\sin(x+y)\cos(x-y))\right].$$

Звернувшись далі до послуги *Expand*, одержимо (див. рис. 2.26):

2: $\frac{d}{dx}\left[\frac{\mathrm{SIN}(x)}{x}+\frac{x}{\mathrm{SIN}(x)}\right]$

3: $-\frac{x\ \mathrm{COS}(x)}{\mathrm{SIN}(x)^2}+\frac{\mathrm{COS}(x)}{x}-\frac{\mathrm{SIN}(x)}{x^2}+\frac{1}{\mathrm{SIN}(x)}$

4: $\frac{a\ x^2+b\ x}{a\ v^2+b\ s}$

5: $\frac{d}{dx}\ \frac{a\ x^2+b\ x}{a\ v^2+b\ s}$

6: $-\frac{2\ x\ b\ s}{v^2\ (a\ v^2+b\ s)}+\frac{2\ x}{v^2}+\frac{b}{a\ v^2+b\ s}$

COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Compute time: 0.2 seconds
Expd(5) E:GOLD2.MTH Free:37% Derive Algebra

Рис. 2.25

7: $\mathrm{LN}\ (v\ x)$

8: $\left[\frac{d}{dx}\right]^2\ \mathrm{LN}\ (v\ x)$

9: $-\frac{1}{x^2}$

10: $x\ y\ \mathrm{SIN}\ (x+y)\ \mathrm{COS}\ (x-y)$

11: $\frac{d}{dx}\ x\ y\ \mathrm{SIN}\ (x+y)\ \mathrm{COS}\ (x-y)$

12: $\frac{d}{dy}\ \frac{d}{dx}\ x\ y\ \mathrm{SIN}\ (x+y)\ \mathrm{COS}\ (x-y)$

13: $x\ \mathrm{COS}\ (2\ x)+\frac{\mathrm{SIN}\ (2\ x)}{2}+y\ \mathrm{COS}\ (2\ y)+\frac{\mathrm{SIN}\ (2\ y)}{2}$

COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Compute time: 0.1 seconds
Expd(12) E:GOLD2.MTH Free:37% Derive Algebra

Рис. 2.26

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{d}{dx}(xy\sin(x+y)\cos(x-y))\right] = x\cos 2x + \frac{\sin 2x}{2} + y\cos y + \frac{\sin 2y}{2}.$$

Якщо необхідно обчислити значення похідної $f'(x)$ в точці $x = a$, ід після відшукання виразу для похідної $f'(x)$ скористатися послу-ю *Substitute* пункту *Manage* і вказати вираз (зокрема, числове зна-ння), який необхідно підставити замість тієї змінної, що входить до разу похідної від функції $f(x)$. Якщо підставляються числові значен-я, то для отримання результуючого значення слід далі звернутися до слуги *approX*.

Приклад

Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = \frac{x+3}{x-2}$ в чці $x = 1$.

Знайшовши вираз для похідної та підставивши значення 1 замість мінної x (з використанням послуги *Substitute* пункту *Manage*), і ско-иставшись послугою *approX*, одержимо (рис. 2.27)

$$\left.\frac{d}{dx}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)\right|_{x=1} = -5.$$

При необхідності знайти первісну до функції $f(x)$ слід ввести вираз ля $f(x)$ і далі звернутися до послуги *Integrate* пункту *Calculus*, вказав-и (у відповідь на запит програми) змінну, за якою необхідно викона-и інтегрування, та не вказуючи ніяких меж інтегрування у відповідь а запити *Lower limit* (нижня межа) та *Upper limit* (верхня межа). В зультаті цього в алгебраїчному вікні з'явиться вираз виду $\int f(x)dx$.

Цей же результат можна отримати і з використанням функції Int(u, x) ив. §23). Після звернення до послуги *Expand* в алгебраїчному вікні явиться вираз для первісної від функції $f(x)$.

Якщо при цьому первісної в скінченних виразах не існує або відпо-ідний вираз занадто складний і засобів програми виявляється недо-атньо, щоб знайти вираз для первісної від функції $f(x)$, до алгебраїч-го вікна виводиться вираз виду $\int f(x)dx$.

Приклади

Знайти первісну до функції $f(x) = \frac{1-x^2}{x\sqrt{x}}$.

1

14: $\dfrac{x + 3}{x - 2}$

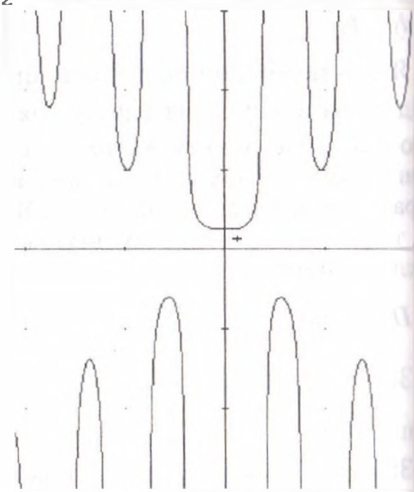
15: $\dfrac{d}{dx}\ \dfrac{x + 3}{x - 2}$

16: $-\dfrac{5}{(x - 2)^{2}}$

17: $-\dfrac{5}{(1 - 2)^{2}}$

18: -5

2



COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Compute time: 0.0 seconds
Approx(17)   E:GOLD2.MTH   Free:100%   Derive Algebra

Рис. 2.27

1

1: $\dfrac{1 - x^{2}}{x\ \sqrt{x}}$

2: $\displaystyle\int \dfrac{1 - x^{2}}{x\ \sqrt{x}}\ dx$

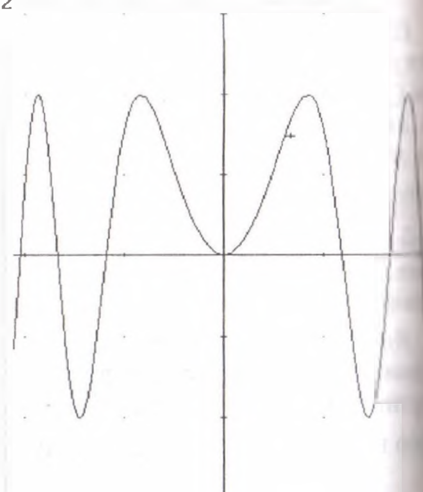
3: $-\dfrac{2\ x^{3/2}}{3} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

4: $\mathrm{SIN}\ (x^{2})$

5: $\displaystyle\int \mathrm{SIN}\ (x^{2})\ dx$

6: $\displaystyle\int \mathrm{SIN}\ (x^{2})\ dx$

2



COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Compute time: 0.0 seconds
Expd(5)   E:GOLD2.MTH   Free:100%   Derive Algebra

Рис. 2.28

Ввівши вираз $\frac{1-x^2}{x\sqrt{x}}$ та звернувшись до послуги *Integrate* пункту *Calculus*, вказавши при цьому на змінну інтегрування x та не вказуючи ніякі межі інтегрування, одержимо вираз виду $\int \frac{1-x^2}{x\sqrt{x}} dx$.

Звернувшись далі до послуги *Expand*, одержимо (рис. 2.28) $-\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{2}{\sqrt{x}}$.

2. При спробі знайти первісну до функції $\sin(x^2)$ після побудови виразу $\int \sin(x^2)dx$ і звернення до пункту *Expand* знову одержуємо $\int \sin(x^2)dx$ (див. рис. 2.28). В даному випадку, як відомо, первісної до функції $\sin(x^2)$ в скінченних виразах не існує. Наближений вираз для такої первісної можна було б знайти, розклавши функцію $\sin(x^2)$ в ряд Тейлора в околі точки $x = 0$ чи замінивши її на деякому відрізку $[a, b]$ поліномом, який найменше відхиляється від функції $\sin(x^2)$ на відрізку $[a, b]$.

Запитання для самоконтролю

Як з використанням послуг програми *DERIVE* сконструювати вирази виду: $\frac{d^m}{dx^m} f(x)$? $\int f(x)dx$? $\frac{d}{dx}[f(x,y)]$? $\frac{d^2}{dxdy} f(x,y)$? $\frac{d^2}{dx^2} f(x,y)$? $\frac{d^2}{dy^2} f(x,y)$? $\iint f(x,y)dxdy$?

Як з використанням послуг програми *DERIVE* обчислити значення похідних $f'(x)$, $f''(x)$ в точці $x = a$? $\frac{d}{dx} f(x,y)$, $\frac{d^2}{dx^2} f(x,y)$, $\frac{d^2}{dxdy} f(x,y)$, $\frac{d^2}{dy^2} f(x,y)$ в точці (a, b)?

Як з використанням послуг програми *DERIVE* знайти невизначені інтеграли виду $\int f(x)dx$? $\int f(x,y)dx$? $\int f(x,y)dy$? $\iint f(x,y)dxdy$?

Вправи для самостійного виконання

З використанням послуг програми *DERIVE* знайти похідні першого та другого порядків від функцій:

$2\ln^2(x+1)e^x$; $\ln^2(1-x)e^{3x}$; $\frac{\sqrt{x-1}}{\ln(4-x)}$; $\frac{\sqrt{4-x}}{\ln(x+1)}$; $3\sin^2 x\cos x + \cos^3 x$; $\frac{\sqrt{x+1}}{\arcsin 2x}$; $(x^2 - x)\cos^2 x$; $(x^3 + x)\sin^2 x$; $\cos^2(x^2)$; $\sin^2(x^2)$.

Знайти рівняння дотичних до графіків вказаних функцій у заданих точках:

$y = \frac{x^2+1}{x^2-2x+3}$, $x = 1$; $y = 2^{2x+1}$, $x = -\frac{1}{2}$; $y = \log_2(2-2x)$, $x = -3$;

$y = (x-2)^2(x+1)$, $x = 1$; $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, $x = 2$; $y = \frac{\sqrt{2-x^2}}{x}$, $x = 1$; $y = x^2 2^x$, $x = 1$.

1. З використанням послуг програми *DERIVE* знайти первісні для функцій:

$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{3}{x+1}$; $\frac{1}{2\sqrt{x-1}}+\frac{2}{x-1}$; $4x-x+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\sqrt{a^2-x^2}$; $\cos 3x\cos x$;

$\sin 3x \sin x$; $x\sin x$; $x^2\cos x$; $\cos^2 x$; $\mathrm{tg}^2 x$; $x^2\sqrt{1-x^2}$.

§ 34. Розклад функції в ряд Тейлора

При необхідності отримати кілька перших членів розкладу деяк функції $f(x)$ в ряд Тейлора за степенями змінної x чи за степенями рі ниці $(x - a)$ слід звернутися до послуги *Taylor* пункту *Calculus*, вка вши при цьому, як звичайно, вираз для функції, розклад якої необхі но отримати, змінну, за якою необхідно отримати розклад (у відпові на запит *Taylor variable:*), найвищий бажаний степінь членів у розкл ді та значення змінної x (0 чи a), в околі якого бажано отримати ро клад. В результаті цього в алгебраїчному вікні з'являється вираз вид *TAYLOR* ($f(x)$, x, a, m). Той же результат отримується і з використа ням функції *TAYLOR* (u, x, a, n) (див. § 23). Після звернення до посл ги *Expand* в алгебраїчному вікні з'являється вираз виду

$$a_0 + a_1(x-a)^1 + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_m(x-a)^m,$$

яким наближено можна замінити функцію $f(x)$ в деякому околі точк $x = a$.

Як відомо, коефіцієнти $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$ можна отримати, вих дячи з формули

$$f(x) \approx a_0 + a_1(x-a)^1 + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_m(x-a)^m,$$

звідки

$$a_0 = f(a),\ a_1 = f'(a),\ a_2 = \frac{f''(a)}{2!},\ \ldots,\ a_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}.$$

Приклади

1. Знайти розклад в ряд Тейлора функції $f(x) = \sin x$ в околі точ $x = 0$.

Ввівши вираз $\sin(x)$ і встановивши на нього вказівник виразів, з рнемось до послуги *Taylor* пункту *Calculus* та вкажемо на змінну відповідь на запит *TAYLOR: variable*, а також степінь 7 та значення рівне 0, у відповідь на запит *TAYLOR: Degree: Point:*. В результ цього в алгебраїчному вікні з'являється вираз (рис. 2.29): *TAYL* ($\sin(x)$, x, 0, 7).

Після звернення до послуги *Expand* одержуємо

$$-\frac{x^7}{5040}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^3}{6}+x.$$

2. Для функції $\cos x$ аналогічно до попереднього одержимо (ди рис. 2.29):

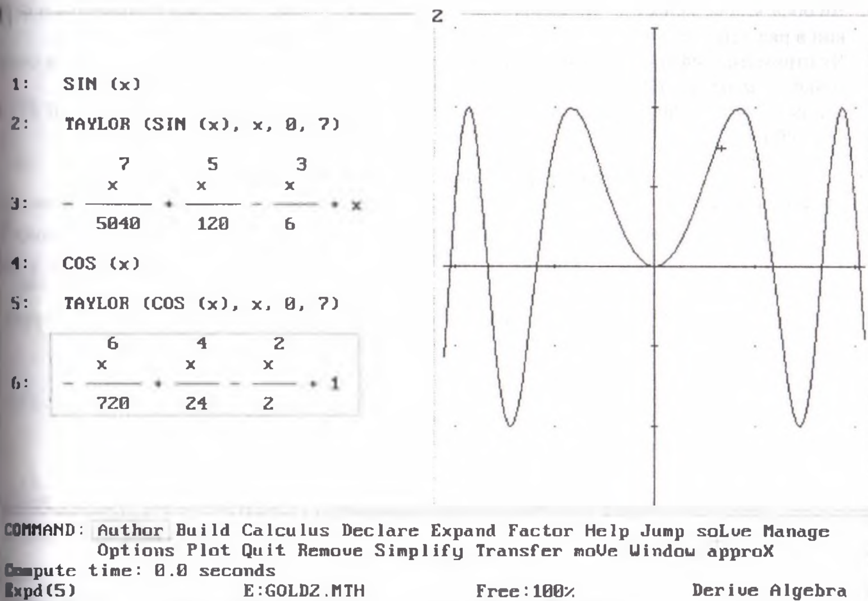


Рис. 2.29

$$\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}.$$

3. Для функції $\sin x^2$ отримаємо

$$\sin(x^2) \approx x^2-\frac{x^6}{6}+\frac{x^{10}}{120}-\frac{x^{14}}{5040}.$$

Таким чином, якщо, наприклад, на проміжку $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ функцію $\sin(x^2)$ замінити функцією x^2, то похибка від такої заміни не перевищуватиме $\frac{(1/2)^6}{6}=\frac{1}{384}\approx 0.003.$ Як відомо, сума членів знакозмінного числового ряду не перевищує першого члена такого ряду, а тому сума членів ряду, які відкидаються, не перевищує за абсолютною величиною першого відкинутого члена ряду.

Запитання для самоконтролю

1. Як з використанням послуг програми *DERIVE* отримати кілька перших членів розкладу функції $f(x)$ в ряд Тейлора?
2. Як вказати кількість членів в розкладі функції $f(x)$ в ряд Тейлора, які потрібно отримати з використанням послуги *Taylor*?

3. Чи обов'язково кількість одержаних з використанням послуги *Taylor* членів в розкладі функції в ряд Тейлора в околі точки $x = a$ дорівнює степеню двочлена $(x - a)$?
4. Як отримати коефіцієнти кількох перших членів розкладу функції $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки $x = a$, не звертаючись до послуги *Taylor*?
5. Як визначають кількість перших членів, які необхідно отримати в розкладі функції $f(x)$ в ряд Тейлора?

Вправи для самостійного виконання

1. Скориставшись послугою *Taylor* програми *DERIVE*, визначити сім перших членів розкладу в ряд Тейлора заданої функції в околі вказаної точки: $\sin(x-1)$, $x = 1$; e^{-x}, $x = 0$; $\cos(x^2)$, $x = 0$; $\mathrm{tg}x$, $x = 0$; $\lg x$, $x = 1$; 2^x, $x = 0$; $\sin(\sin(x))$, $x = 0$; $\sin(\cos(x))$, $x = 0$; $\cos(\sin(x))$, $x = 0$; $\cos(\cos(x))$, $x = 0$; $\sin(\sin(\sin(x)))$, $x = 0$; $\cos(\cos(\cos(x)))$, $x = 0$; $\log_2(\,|\,\mathrm{tg}(x)\,|\,)$, $x = 1$.
2. Використовуючи кілька перших членів розкладу функції в ряд Тейлора, обчислити з точністю до 0,001:
$$\int_0^1 \sin(x^2)dx; \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-x^2}dx; \quad \int_{-1}^1 \lg(1+x^2)dx; \quad \int_0^2 \sin(\sin(x))dx; \quad \int_1^2 \sin(\cos(x))dx;$$
$$\int_0^4 \log_2(2+|\sin(x)|)dx; \quad \int_0^1 \sqrt{1+x+x^2+x^3+x^4}\,dx.$$
3. Використовуючи два перші члени розкладу вказаних функцій $f(x)$ в ряд Тейлора, знайти наближені розв'язки рівнянь:
$$\log_2 x = \sin x; \quad \sin(x^2) = 1 - x^2; \quad \mathrm{tg}x = \log_2(2-x); \quad 2 - x^2 + \sin(8x) = \sqrt{1+x^2};$$
$$\sqrt{1+x+x^2+x^3+x^4} = \frac{1}{\log_{1/2} x}.$$

§ 35. Обчислення визначених інтегралів

При обчисленні визначеного інтеграла виду $\int_a^b f(x)dx$ використовується послуга *Integrate* пункту *Calculus* аналогічно, як і при відшуканні первісної до функції $f(x)$, з тією лише різницею, що у відповідь на запити *Lower limit* та *Upper limit* слід ввести відповідні вирази (зокрема сталі), що визначають нижню та верхню межі інтегрування. В результаті цього в алгебраїчному вікні з'являється вираз виду $\int_a^b f(x)dx$. Той же результат отримується і при використанні функції виду Int(f, x, a, b) (див. §23). Після звернення до послуги *Expand* вираз розкривається з використанням формули Ньютона-Лейбніца, тобто подається у вигляді $F(b) - F(a)$, де $F(x)$ – первісна до функції $f(x)$. Якщо вираз $F(b) - F(a)$ числовий, тобто не містить змінних, то, використовуючи послугу *approX*, можна одержати числове значення виразу $F(b) - F(a)$.

Приклади

Обчислити:

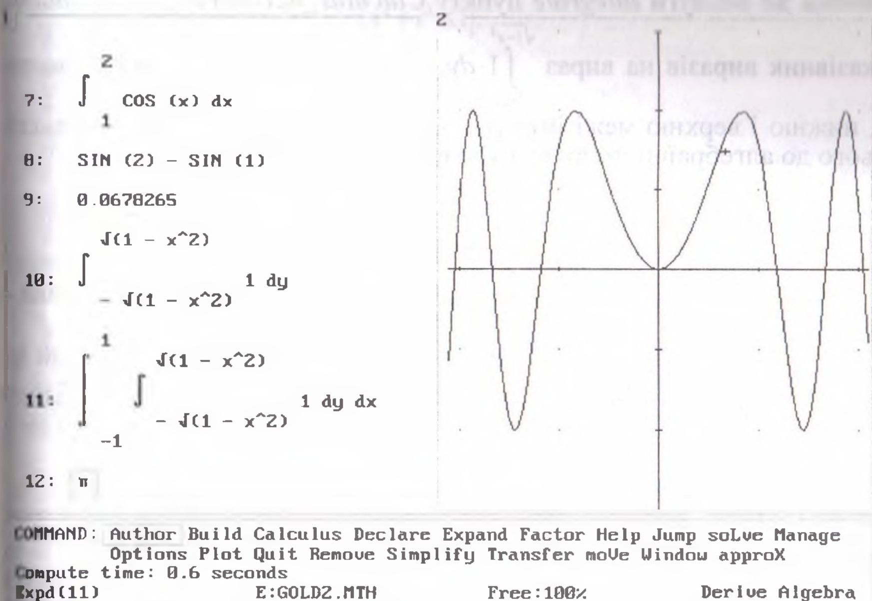


Рис. 2.30

1. $\int_{1}^{2} \cos x dx.$

Ввівши вираз cos(x) і звернувшись далі до послуги *Integrate* пункту *Calculus* та вказавши змінну інтегрування x та нижню і верхню межі інтегрування відповідно 1 і 2 , одержимо вираз (рис. 2.30)

$$\int_{1}^{2} \cos x dx.$$

Після звернення до послуги *Expand* отримаємо sin(2) – sin(1) і після наступного звернення до послуги *approX* матимемо числове значення 0.0678265 (див. рис. 2.30).

2. $\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \cdot dy\right) dx.$

Сконструювавши з використанням послуги *Integrate* пункту *Calculus* вираз $\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \cdot dy$ і вказавши при цьому змінну інтегрування y та нижню $\left(-\sqrt{1-x^2}\right)$ і верхню $\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ межі інтегрування, знову звернемось до послуги *Integrate* пункту *Calculus*, встановивши при цьому вказівник виразів на вираз $\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1\cdot dy$, та вказуючи змінну інтегрування x, нижню і верхню межі інтегрування відповідно –1 і 1. В результаті цього до алгебраїчного вікна буде виведено вираз

$$\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1\cdot dy\right)dx.$$

Після звернення до послуги *Expand* одержуємо шукане значення – число π (див. рис. 2.30).

Тут фактично обчислювався зведений до повторного подвійний інтеграл $\iint f(x,y)dxdy$ від функції $f(x, y) = 1$ по області $Q = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.

3. Обчислити $\iint\limits_Q xydxdy$, де $Q = \{(x, y) \mid \text{abs}(x) + \text{abs}(y) \le 1\}$.

Сконструювавши вираз $\int\limits_{-1}^{1}\left\{\int\limits_{-1+|x|}^{1-|x|} xydy\right\}dx$ та звернувшись до послуги *Expand*, одержимо шукане значення – 0.

Запитання для самоконтролю

1. Як з використанням послуг програми *DERIVE* можна обчислити значення визначеного інтеграла виду $\int\limits_a^b f(x)dx$?
2. Як можна знайти значення визначеного інтеграла виду $\int\limits_a^b f(x)dx$, якщо при використанні послуги *Integrate* не вказати межі інтегрування a і b?
3. Як з використанням послуг програми *DERIVE* обчислити подвійний інтеграл виду $\iint\limits_Q f(x,y)dxdy$?

Вправи для самостійного виконання

1. Обчислити площу області, обмеженої лініями:
   $y = 0$, $y = ((x-1)^2/5) + 7$, $x = 0$, $x = 2$; $y = 3 - x^2$, $y = x - 1$; $y = \log_{1/2}x$, $y = 5 - x$;
   $y = 8\cos(x/10)$, $y = x^2/6$; $y = 2^x$, $y = 5 - (x-9)^2$; $y = x/5$, $y = 3x$, $y = 9 - x/3$.

   При необхідності скористатися кількома першими членами розкладу функції в ряд Тейлора.
2. З використанням послуг програми *DERIVE* обчислити подвійні інтеграли:
   $\iint\limits_Q (1-x-y)dxdy,\quad Q = \{(x,y): x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 1\}$;

$$\iint_Q \left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy, \quad Q=\left\{(x,y): x^2+y^2 \le 1\right\};$$

$$\iint_Q (9-x^2-y^2)dxdy, \quad Q=\left\{(x,y): x^2+y^2 \le 4\right\};$$

$$\iint_Q (7-\mathrm{abs}(x)-\mathrm{abs}(y))dxdy, \quad Q=\left\{(x,y): \mathrm{abs}(x)+\mathrm{abs}(y) \le 5\right\};$$

$$\iint_Q dxdy, \quad Q=\left\{(x,y): \sqrt{\mathrm{abs}(x)}+\sqrt{\mathrm{abs}(y)} \le 1\right\}.$$

При необхідності перейти від декартових координат до полярних.
Дати геометричне тлумачення знайдених результатів.

§ 36. Обчислення довжини дуги кривої

При необхідності обчислити довжину дуги кривої між точками A і B на ній використовується формула

$$L=\int_{(A)}^{(B)} dl,$$

де dl – диференціал дуги даної кривої.

Якщо криву задано параметрично у вигляді $x=\varphi(t)$, $y=\phi(t)$, то формула набуває вигляду

$$L=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{dx^2+dy^2}=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\phi'(t)]^2}\,dt,$$

де t_0, t_1 – значення параметра t, що відповідають точкам A і B.

Якщо залежність між змінними x і y задано явно у вигляді $y=f(x)$, то формула набуває вигляду

$$L=\int_a^b\sqrt{dx^2+dy^2}=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Приклад

Обчислити довжину дуги параболи $y=x^2$ між точками (0, 0) і (2, 4).

Скориставшись послугою *Integrate*, одержимо

$$L=\int_0^2\sqrt{1+4x^2}\,dx=\frac{\ln\left(\sqrt{17}+4\right)}{4}+\sqrt{14}=4.64678.$$

Запитання для самоконтролю

1. Чи передбачено в програмі *DERIVE* послугу безпосередньо для обчислення довжини дуги кривої?
2. Як з використанням послуг програми *DERIVE* обчислити довжину дуги заданої кривої між вказаними точками?

3. За якою формулою можна обчислити довжину дуги кривої між точками A і B, якщо: рівняння кривої задано через явно виражену залежність між змінними x і y у вигляді $y = f(x)$? рівняння кривої задано параметрично у вигляді $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$?

Вправи для самостійного виконання

1. Використовуючи послуги програми *DERIVE*, обчислити довжини дуг кривих між вказаними точками:

а) $y = \sin(x)$, $A(0, 0)$, $B\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$; б) $y = 2^x$, $A(0, 1)$, $B(2, 4)$; в) $y = \lg_2 x$, $A(1, 0)$, $B(4, 2)$;

г) $y = \sqrt{1-x^2}$, $A(0, 1)$, $B(1, 0)$; д) $y = \left(1-\sqrt{x}\right)^2$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$;

е) $y = \sqrt[3]{1-x^3}$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$; є) $y = \sqrt[4]{1-x^4}$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$;

ж) $x = \cos t$, $y = 2\sin t$, $A(1, 0)$, $B(0, 2)$; з) $x = t$, $y = t^3$, $A(0, 0)$, $B(2, 8)$;

и) $x = t$, $y = \sqrt{t}$, $A(0, 0)$, $B(4, 2)$.

2. Обчислити довжину траєкторії, яку описує снаряд, кинутий із точки $x = 0$ під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0 при:

а) $v_0 = 10$ і $\alpha = 0$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$; б) $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $v_0 = 10, 20, 30, 40, 50$.

Визначити кут, при якому точка падіння снаряда буде найбільш віддаленою від точки старту при заданій початковій швидкості.

3. Визначити швидкість, з якою необхідно кинути снаряд, щоб точка його падіння була віддалена від точки старту на задану відстань d, якщо задано кут α:

а) $d = 20$, $\alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$; б) $d = 30$, $\alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$; в) $d = 40$, $\alpha = \frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{6}$.

4. Визначити кут, під яким необхідно кинути снаряд, щоб точка його падіння була віддалена від точки старту на відстань d, якщо задано початкову швидкість снаряда v_0:

а) $d = 10$, $v_0 = 40$; б) $d = 20$, $v_0 = 80$; в) $d = 30$, $v_0 = 80$; г) $d = 40$, $v_0 = 100$.

§ 37. Обчислення об'ємів і площ поверхонь тіл обертання

Якщо потрібно обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнею, що утворюється обертанням навколо осі Ox кривої $y = f(x)$ та прямих $x = a$, $x = b$, використовують формулу

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2 dx.$$

У випадку, якщо крива задана параметрично у вигляді $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, формула набуває вигляду

$$V = \int_{t_0}^{t_1} \pi\left[\phi(t)\right]^2 \varphi'(t)dt,$$

де t_0, t_1 – значення параметра t, що відповідають кінцевим точкам A і B кривої.

При цьому площа поперечного перерізу такого тіла площиною, що утворюється обертанням навколо осі Ox прямої $x = x_0$, дорівнює $s(x_0) = \pi[f(x_0)]^2$.

При необхідності обчислити площу бічної поверхні тіла обертання використовують формулу

$$S = \int_{(A)}^{(B)} 2\pi y\,ds,$$

де A і B – кінцеві точки дуги, що обертається, $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ – диференціал дуги даної кривої.

Якщо криву задано параметрично у вигляді $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, тоді формула набуває вигляду

$$S = \int_\alpha^\beta 2\pi\phi(t)\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\phi'(t)\right]^2}\,dt,$$

де α, β – значення параметра t, що відповідають точкам A і B на дузі.

У випадку, коли криву задано явною залежністю $y = f(x)$, тоді

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\cdot\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx.$$

Приклади

1. Обчислити об'єм конуса, утвореного обертанням навколо осі Ox прямої $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ (прямий круговий конус з радіусом основи 2 і висотою 3, рис. 2.31).

Ввівши вираз $\pi\left(2\left(1-\frac{x}{3}\right)\right)^2$ та звернувшись до послуги *Integrate* і вказавши змінну інтегрування x та нижню і верхню межі відповідно 0 і 3, одержимо вираз

$$\int_0^3 \pi\left(2\left(1-\frac{x}{3}\right)\right)^2 dx.$$

Звернувшись далі до послуги *Expand*, одержимо шукане значення 4π.

2. Обчислити площу бічної поверхні зрізаного конуса, радіуси основ якого дорівнюють 2 і 4, а висота конуса 2.

Очевидно, бічну поверхню такого конуса можна утворити, обертаючи навколо осі Ox пряму, рівняння якої $y = x + 2$, коли x змінюється в межах від 0 до 2 (рис. 2.32).

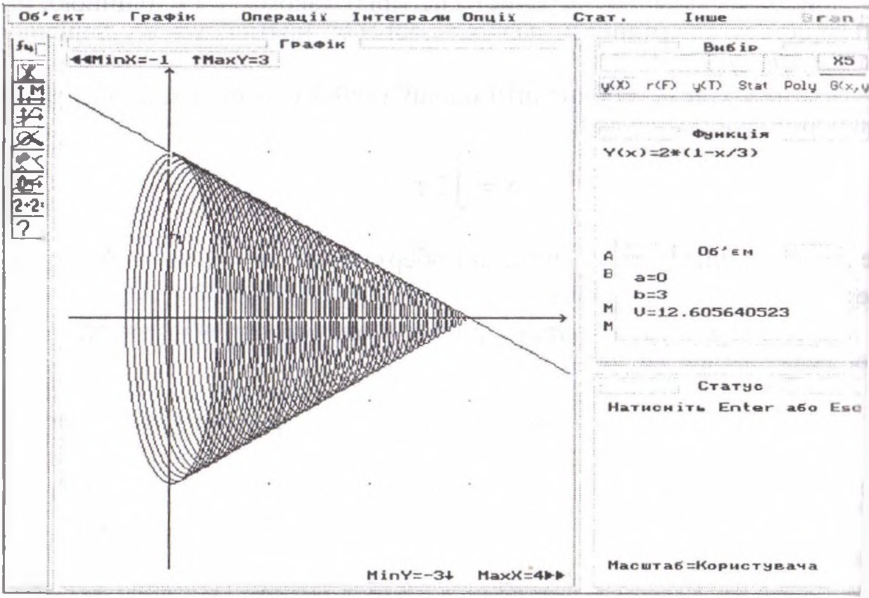


Рис. 2.31

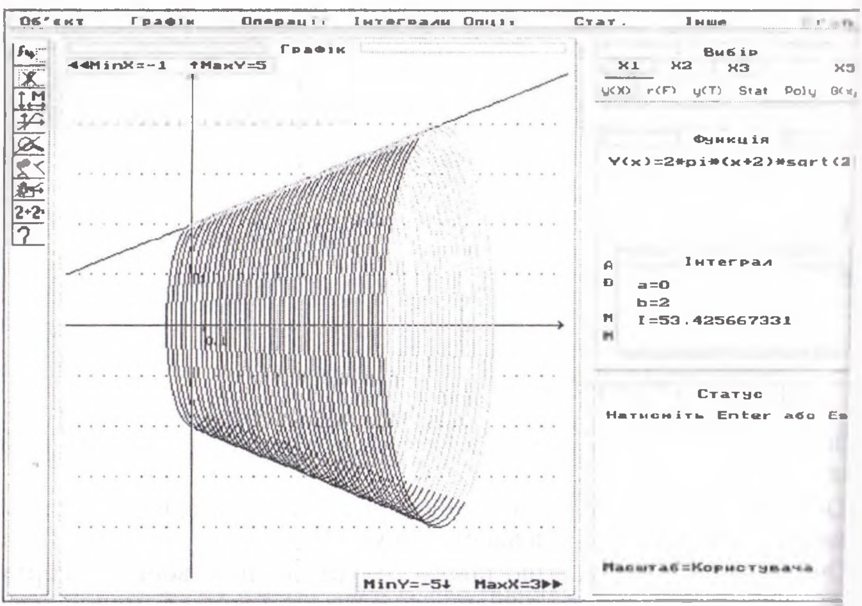


Рис. 2.32

Тому

$$S_\sigma = \int_0^2 2\pi(x+2)\sqrt{1+\left(\left(x+2\right)'\right)^2}\,dx = \int_0^2 2\pi(x+2)\sqrt{2}dx.$$

Скориставшись послугами *Integrate*, *Expand* та *approX*, одержимо $S_\sigma = 53.3145$.

3. Обчислити об'єм тіла, що утворюється обертанням півкруга, обмеженого кривою $y=\sqrt{r^2-x^2}$, навколо осі Ox.

Скориставшись послугами програми *DERIVE*, одержимо

$$V = \int_{-r}^{r} \pi(r^2-x^2)dx = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Запитання для самоконтролю

1. За якими формулами обчислюється об'єм тіла, обмеженого поверхнею, що утворюється обертанням навколо осі Ox кривої, заданої залежністю між змінними y і x: явно у вигляді $y=f(x)$? у параметричній формі у вигляді $x=\varphi(t)$, $y=\phi(t)$?
2. За якими формулами обчислюється площа поверхні, що утворюється обертанням навколо осі Ox деякої кривої, заданої залежністю між змінними y і x: явно у вигляді $y=f(x)$? у параметричній формі у вигляді $x=\varphi(t)$, $y=\phi(t)$?
3. Як з використанням послуг програми *DERIVE* обчислити: об'єм тіла, обмеженого поверхнею, що утворюється обертанням кривої навколо осі Ox? площу поверхні, що утворюється обертанням кривої навколо осі Ox?

Вправи для самостійного виконання

1. Вивести формулу для обчислення об'єму, обмеженого поверхнею, що утворюється обертанням кривої навколо осі Oy, якщо залежність між змінними x і y задано: явно у вигляді $y=f(x)$; у параметричній формі у вигляді $x=\varphi(t)$, $y=\phi(t)$.
2. Вивести формулу для обчислення площі поверхні, що утворюється обертанням кривої навколо осі Oy, якщо залежність між змінними x і y задано: явно у вигляді $y=f(x)$; у параметричній формі у вигляді $x=\varphi(t)$, $y=\phi(t)$.
3. Обчислити об'єм і площу бічної поверхні конуса, що утворюється обертанням навколо осі Ox відрізка прямої $\frac{x}{5}+y=1$ між точками (0, 1), (5, 0).
4. Обчислити об'єм і площу поверхні кулі радіуса 2, утвореної обертанням навколо осі Ox півкруга, обмеженого півколом, рівняння якого $y=\sqrt{4-x^2}$, $x\in[-2, 2]$.
5. Обчислити об'єми і площі поверхонь тіл, що утворюються обертанням навколо осі Ox фігур, обмежених лініями:

а) $y=x^2$, $y=x+3$; б) $y=\frac{x}{4}$, $y=4x$, $y=4-x$;

в) $y=2+\sin x$, $y=0$, $x=-5$; г) $y=2+x$, $y=0$, $x=0$, $x=6$.

§ 38. Операції над векторами

Перш ніж виконувати будь-які операції над векторами, необхідно ввести вирази, що визначають елементи цих векторів.

Перед введенням таких виразів слід звернутися до підпункту *vectoR* пункту *Declare* і вказати розмірність вектора (у відповідь на запит *DECLARE VECTOR: Dimension:*) і далі один за одним ввести вирази, кількість яких повинна дорівнювати розмірності вектора. При цьому програма щоразу запитує наступний елемент доти, поки всі не будуть введені. Інший спосіб введення вектора – звернутися до послуги *Author* основного меню і у відповідь на запит *AUTHOR expression* ввести потрібні вирази в квадратних дужках, відокремлені один від одного комами, у вигляді $[V_1, V_2, \ldots, V_m]$.

Вектор можна задати також з використанням векторної функції *Vector*(u, k, m, n, s), де u – вираз, k – індекс, що визначає k-й елемент вектора, m і n – відповідно початкове і кінцеве значення індекса k, s – крок зміни індекса k.

До виразів, що визначають елементи вектора, можуть бути застосовані різні операції, зокрема операція *Factor*, за допомогою якої кожен елемент вектора розкладається на множники, *Expand* – за допомогою якої вирази, що визначають елементи вектора, можна подати через інші вирази тощо.

Операції додавання і віднімання двох векторів однакової розмірності виконуються поелементно:

$$[V_1, V_2, \ldots, V_m] \pm [S_1, S_2, \ldots, S_m] = [V_1 \pm S_1, V_2 \pm S_2, \ldots, V_m \pm S_m].$$

Скалярний добуток векторів $[V_1, V_2, \ldots, V_m]$ і $[S_1, S_2, \ldots, S_m]$ визначає число, що одержується за формулою $V_1S_1 + V_2S_2 + \ldots + V_mS_m$. Відповідний вираз може бути побудований за допомогою послуги *Build* з використанням операції • (позначення операції скалярного добутку).

Векторний добуток *Cross* двох тривимірних векторів визначає вектор:

$$\text{Cross}([a,b,c],[e,f,g]) = [a,b,c] \times [e,f,g] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ e & f & g \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(bg - cf) - \vec{j}(ag - ce) + \vec{k}(af - be) = [bg - cf, ce - ag, af - be],$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти: $\vec{i} = [1,0,0]$, $\vec{j} = [0,1,0]$, $\vec{k} = [0,0,1]$.

Як відомо, модуль (довжина) векторного добутку $\vec{a} \times \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$, тобто чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$. При цьому вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ утворюють праву трійку векторів.

Мішаний добуток трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ визначається як $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$.

Очевидно, що абсолютна величина мішаного добутку $(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})$ трьох векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ чисельно дорівнює об'ємові паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, оскільки

$$\left|\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right)\right| = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot\cos\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right),$$

тобто $\dfrac{\left|\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right)\right|}{\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right|}$ є висотою паралелепіпеда (проекція вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{a}\times\vec{b}$), а $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ чисельно дорівнює площі основи паралелепіпеда (паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$).

Операція *Dimension*(v) визначає число – кількість елементів вектора v.

Результатом операції *element*(v, k) є вираз, що визначає k-й елемент вектора v.

Приклади

1. Знайти площу поверхні і об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах

$$\vec{a}=[1,0,1],\ \vec{b}=[0,1,1],\ \vec{c}=[1,1,0].$$

Обчислюючи векторні добутки $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{b}\times\vec{c}$, $\vec{a}\times\vec{c}$, одержимо відповідно (рис. 2.33):

$$\vec{a}\times\vec{b}=[-1,-1,1];\ \vec{b}\times\vec{c}=[-1,1,-1];\ \vec{a}\times\vec{c}=[-1,1,1].$$

Таким чином, площа поверхні даного паралелепіпеда дорівнює $6\sqrt{3}$.

Об'єм паралелепіпеда чисельно дорівнює абсолютній величині мішаного добутку векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, тобто $\left|\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right)\right| = |-2| = 2$.

2. Дано три вершини паралелограма $A(1, 4)$, $B(5, 1)$, $C(5, 10)$. Знайти висоту паралелограма, опущену з вершини C на сторону AB.

Оскільки вектор $\vec{AB}$ має проекції на осі Ox та Oy відповідно 4 та –3, а вектор $\vec{AC}$ – 4 та 6, то, обчислюючи векторний добуток векторів [4, –3, 0] та [4, 6, 0], одержимо (див. рис. 2.33):

$$[4, -3, 0] \times [4, 6, 0] = [0, 0, 36].$$

Отже, площа даного паралелограма дорівнює 36. Оскільки $|\vec{AB}| = \sqrt{16+9} = 5$, то шукана висота дорівнює 7.2.

```
1:   CROSS ([1, 0, 1], [0, 1, 1])

2:   CROSS ([0, 1, 1], [1, 1, 0])

3:   CROSS ([1, 0, 1], [1, 1, 0])

4:   [-1, -1, 1]

5:   [-1, 1, -1]

6:   [-1, 1, 1]

7:   CROSS ([1, 0, 1], [0, 1, 1]) · [1, 1, 0]

8:   -2

9:   CROSS ([4, -3, 0], [4, 6, 0])

10:  [0, 0, 36]


COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
         Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Compute time: 0.0 seconds
Expd(9)                E:GOLD2.MTH            Free:100%          Derive Algebra
```

Рис. 2.33

Запитання для самоконтролю

1. Як вводяться вектори до алгебраїчного вікна при роботі з програмою *DERIVE*?
2. Чи можуть компонентами вектора бути вирази, що містять змінні?
3. Виконання яких операцій над компонентами вектора передбачено в програмі *DERIVE*?
4. Як з використанням послуг програми *DERIVE* знайти:
   - Скалярний добуток двох векторів довільної розмірності?
   - Векторний добуток двох 3-вимірних векторів?
   - Мішаний добуток трьох 3-вимірних векторів?
   - Довжину вектора?
   - Кут між двома векторами?
   - Суму довільної кількості векторів?
   - Різницю двох векторів?
   - Розмірність вектора?
   - k-й елемент вектора?

Вправи для самостійного виконання

Використовуючи послуги програми *DERIVE*, розв'язати задачі.

1. Задано три вершини паралелограма: $A(1, 0)$, $B(2, 4)$, $C(4, 6)$. Знайти: довжину його сторі діагоналей, площу, кути при вершинах A і B, висоту, опущену з вершини C на сторону AB
2. Задано вектор $\vec{a} = [2, 4]$ і вектор $\vec{b} = [4, 1]$. Визначити кут, на який слід повернути про годинникової стрілки вектор $\vec{a}$, щоб він збігся за напрямком з вектором $\vec{b}$.
3. На векторах $\vec{a} = [1, 1, 0]$, $\vec{b} = [2, 1, 0]$, $\vec{c} = [4, 4, 1]$ побудовано паралелепіпед. Зна площу основи паралелепіпеда, що лежить в площині векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$; об'єм паралелепі площу повної поверхні паралелепіпеда; довжини ребер; висоту паралелепіпеда, опущену вказану основу; довжини діагоналей.

4. Задано вектор $\bar{a} = [2, 4]$ і точку $A(0, 1)$. Знайти відстань від точки A до прямої, що проходить через точку $B(2, 5)$ і паралельна вектору $\bar{a}$.
5. Через точки $A(2, 1, 4)$, $B(3, 7, 1)$, $C(6, 4, 2)$ проходить площина, а через точку $D(0, 1, 0)$ пряма, паралельна вектору $(2, 1, 3)$. Знайти довжину відрізка прямої між точкою D і точкою перетину прямої з вказаною площиною.

§ 39. Операції над матрицями

Перш ніж виконувати операції над матрицями, слід ввести вирази, що визначають елементи цих матриць. Таке введення можна здійснити кількома способами:

1. Звернутися до підпункту *Author* і подати матрицю як вектор деякої розмірності, всі елементи якого в свою чергу є векторами однієї розмірності, тобто у вигляді $\left[\left[a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}\right], \left[a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}\right], \ldots, \left[a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}\right]\right]$.

2. Скориставшись послугою *DECLARE: MATRIX:*, оголосити розмірність матриці (кількість рядків (*Rows*) і кількість стовпчиків (*Columns*)) і далі один за одним ввести $m \times n$ виразів, що визначають елементи матриці. При цьому програма запитує наступний елемент доти, поки не будуть введені всі елементи матриці (в рядку введення подається запит *MATRIX element:* та підказка *Enter matrix element (i,j)*).

Операції додавання і віднімання двох матриць однакової розмірності виконуються поелементно:

$$\left[a_{ij}\right] \pm \left[b_{ij}\right] = \left[a_{ij} \pm b_{ij}\right], \quad \left(i = \overline{1,m}, \ \ j = \overline{1,n}\right).$$

Операція множення (*) матриці на число також виконується поелементно:

$$c * \left[a_{ij}\right] = \left[c * a_{ij}\right], \quad \left(i = \overline{1,m}, \ \ j = \overline{1,n}\right).$$

В результаті транспонування матриці (′) одержуємо матрицю, в якої рядки і стовпчики міняються ролями:

$$\left[a_{ij}\right]' = \left[a_{ji}\right], \quad \left(i = \overline{1,m}, \ \ j = \overline{1,n}\right).$$

Добуток $(\cdot)$ матриць $\left[a_{ij}\right]$ і $\left[b_{jl}\right]$, $\left(i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}, \ l = \overline{1,s}\right)$ визначає нову матрицю $\left[c_{il}\right]$, кожен елемент якої є скалярним добутком i-го рядка матриці $\left[a_{ij}\right]$ на l-й стовпчик матриці $\left[b_{jl}\right]$, тобто $c_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl}$. При цьому в кожному рядку матриці $\left[a_{ij}\right]$ має бути стільки ж елементів, скільки і в кожному стовпчику матриці $\left[b_{jl}\right]$. В результуючій

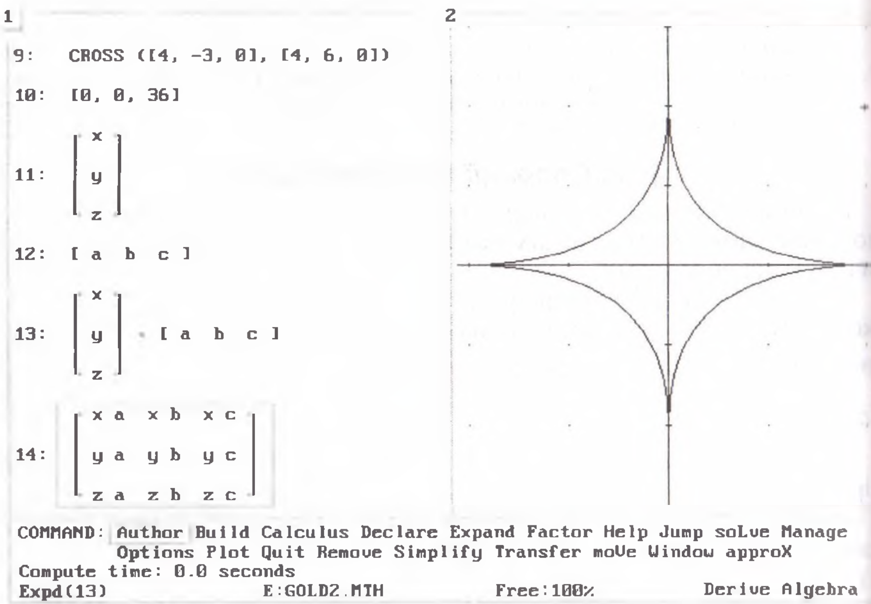


Рис. 2.34

матриці $\left[c_{il}\right]$ таким чином буде стільки рядків, скільки їх в матриці $\left[a_{ij}\right]$, тобто m, і стільки стовпчиків, скільки їх в матриці $\left[b_{jl}\right]$, тобто s.

Матриця $\left[b_{jl}\right]$ може складатися з одного стовпчика, тобто бути вектором-стовпчиком. Тоді добуток матриці $\left[a_{ij}\right]$ на матрицю $\left[b_{jl}\right]$ переходить в добуток матриці $\left[a_{ij}\right]$ на вектор $\left[b_j\right]$, в результаті чого отримується вектор з координатами $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j$, $\left(i=\overline{1,m}\right)$.

Зокрема, якщо в матриці $\left[a_{ij}\right]$ один рядок з елементами $a_1, a_2, \ldots, a_n$, тоді добуток матриці-рядка $a=\left[a_1, a_2 \ldots, a_n\right]$ на матрицю-стовпчик $b=\left[b_1, b_2, \ldots, b_n\right]$ буде скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, рівним $\sum_{j=1}^{n} a_j b_j$.

Якщо ж вектор-стовпчик $a=\left[a_1, a_2 \ldots, a_n\right]$ помножити на вектор-рядок $b=\left[b_1, b_2, \ldots, b_n\right]$, утворюється квадратна матриця виду $\left[a_i b_j\right]$.

$i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,m}.$

Якщо необхідно отримати вираз, що визначає елемент a_{ij} матриці $\left[a_{ij}\right]$, який знаходиться в i-му рядку та j-му стовпчику, використовується функція *Element*(A, i, j) з подальшим зверненням до послуги *Expand*.

Використання функції *Det*(A) дозволяє знайти визначник матриці A.

Використовуючи послуги *Build* чи послуги *Author*, можна ввести вираз виду A^{-1}, що означає матрицю, обернену до матриці A. Після звернення до послуги *Expand* до алгебраїчного вікна виводиться матриця, обернена до матриці A.

Приклади

1. Нехай задано матрицю-стовпчик $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ і матрицю-рядок $[a,b,c]$.

Побудувавши за допомогою оператора *Build* вираз $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot [a,b,c]$ і звернувшись до послуги *Expand*, одержимо (рис. 2.34):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot [a,b,c] = \begin{bmatrix} xa & xb & xc \\ ya & yb & yc \\ za & zb & zc \end{bmatrix}.$$

2. Обчислити визначник матриці $\begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ v & s & w \end{bmatrix}$.

Ввівши вираз $\det([[a,b,c],[e,f,g],[v,s,w]])$ та звернувшись до послуги *Expand*, одержимо $afw - ags - bew + bgv + ces - cfv$ (рис. 2.35).

Якщо замість змінних a, b, c, e, f, g, v, s, w підставити числа, наприклад, $-3, 2, 5, 4, -1, 0, 3, 6, -5$ (скориставшись послугою *Substitute* пункту *Manage* і далі послугою *Expand*), одержимо значення визначника – 160 (див. рис. 2.35).

Якщо ввести матрицю $\begin{bmatrix} a & b \\ e & f \end{bmatrix}$ і, скориставшись послугою

12: $[a \;\; b \;\; c]$

13: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot [a \;\; b \;\; c]$

14: $\begin{bmatrix} x\,a & x\,b & x\,c \\ y\,a & y\,b & y\,c \\ z\,a & z\,b & z\,c \end{bmatrix}$

15: $\mathrm{DET} \begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ u & s & w \end{bmatrix}$

16: $a\,f\,w - a\,g\,s - b\,e\,w + b\,g\,u + c\,e\,s - c\,f\,u$

17: $(-3)\,(-1)\,(-5) - (-3)\,0\,6 - 2\,4\,(-5) + 2\,0\,3 + 5\,4\,6 - 5\,(-1)\,3$

18: 160

```
COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
         Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Compute time: 0.0 seconds
Expd(17)              E:GOLDZ.MTH            Free:100%          Derive Algebra
```

Рис. 2.35

20: $\begin{bmatrix} a & b \\ e & f \end{bmatrix}^{-1}$

21: $\begin{bmatrix} \dfrac{f}{a\,f - b\,e} & -\dfrac{b}{a\,f - b\,e} \\ -\dfrac{e}{a\,f - b\,e} & \dfrac{b\,e}{f\,(a\,f - b\,e)} + \dfrac{1}{f} \end{bmatrix}$

22: $\begin{bmatrix} a & b \\ e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{f}{a\,f - b\,e} & -\dfrac{b}{a\,f - b\,e} \\ -\dfrac{e}{a\,f - b\,e} & \dfrac{b\,e}{f\,(a\,f - b\,e)} + \dfrac{1}{f} \end{bmatrix}$

23: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

```
COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
         Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Compute time: 0.1 seconds
Expd(22)              E:GOLDZ.MTH            Free:100%          Derive Algebra
```

Рис. 2.36

Build, сконструювати вираз $\begin{bmatrix} a & b \\ e & f \end{bmatrix}^{-1}$, а далі звернутися до послуги *Expand*, одержимо

$$\begin{bmatrix} a & b \\ e & f \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{f}{af-be} & -\dfrac{b}{af-be} \\ -\dfrac{e}{af-be} & \dfrac{be}{f(af-be)}+\dfrac{1}{f} \end{bmatrix}.$$

Якщо далі, скориставшись послугою *Build*, сконструювати вираз

$$\begin{bmatrix} a & b \\ e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{f}{af-be} & -\dfrac{b}{af-be} \\ -\dfrac{e}{af-be} & \dfrac{be}{f(af-be)}+\dfrac{1}{f} \end{bmatrix}$$

і звернутися до послуги *Expand*, одержимо одиничну матрицю $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (рис. 2.36).

Запитання для самоконтролю

1. Як вводяться матриці при роботі з програмою *DERIVE*? Чи можуть елементами матриці бути вирази, що містять змінні?
2. Які операції над матрицями можна виконати з використанням послуг програми *DERIVE*?
3. Як з використанням послуг програми *DERIVE* отримати суму і різницю двох матриць однакової розмірності? матрицю, всі елементи якої є елементами заданої матриці, помноженими на одне і те ж число c? добуток матриць A і B розмірності відповідно $m \times n$ і $n \times l$?
4. Чи завжди визначений добуток двох матриць, якщо визначена їх сума і різниця?
5. Чи завжди визначена сума і різниця матриць, якщо визначений їх добуток?
6. Як з використанням послуг програми *DERIVE* отримати матрицю, обернену до даної?
7. Як отримати матрицю, транспоновану до даної?
8. Як з використанням операцій над матрицями отримати: скалярний добуток двох векторів? суму і різницю двох векторів? суму кількох векторів?
9. Як з використанням послуг програми *DERIVE* обчислити визначник квадратної матриці?
10. Як отримати елемент матриці, що належить i-му рядку та j-му стовпчику?

Вправи для самостійного виконання

Використовуючи послуги програми *DERIVE*, знайти:

1. Суму, різницю і добуток матриць:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \text{ і } \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ і } \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Суму і різницю матриць

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ і } \begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ -3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ і } \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \\ 4 & 1 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

3. Добуток матриць

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & -5 & 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ і } \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & 5 \\ 0 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 8 & 1 \\ 4 & 4 \\ -2 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \text{ і } \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 4 \\ -5 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

4. Матриці, транспоновані до матриць, поданих у вправах 1, 2, 3.
5. Матриці, обернені до матриць

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. Добутки матриць, поданих у вправі 5, на матриці, обернені до них.
7. Визначники матриць, поданих у вправах 1, 5.
8. Визначники матриць

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

§ 40. Розв'язування систем лінійних рівнянь

Використовуючи послуги програми *DERIVE*, можна знаходити в аналітичному поданні розв'язки системи лінійних рівнянь виду $Ax = b$, де A – квадратна матриця розмірності $n \times n$, $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ – n-вимірний вектор-стовпчик, елементами якого є невідомі змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $b = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$ – n-вимірний вектор-стовпчик вільних членів. Розв'язок такої системи рівнянь може бути визначений за формулою $x = A^{-1}b$.

Приклади

1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} ax + by = v, \\ cx + dy = s \end{cases}$$

або у матрично-векторному поданні

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ s \end{bmatrix}.$$

25: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}$

26: $\begin{bmatrix} \dfrac{d}{a\,d - b\,c} & -\dfrac{b}{a\,d - b\,c} \\ -\dfrac{c}{a\,d - b\,c} & \dfrac{b\,c}{d\,(a\,d - b\,c)} + \dfrac{1}{d} \end{bmatrix}$

27: $\begin{bmatrix} \dfrac{d}{a\,d - b\,c} & -\dfrac{b}{a\,d - b\,c} \\ -\dfrac{c}{a\,d - b\,c} & \dfrac{b\,c}{d\,(a\,d - b\,c)} + \dfrac{1}{d} \end{bmatrix} \cdot [v,\ s]$

28: $\left[\dfrac{d\,v}{a\,d - b\,c} - \dfrac{b\,s}{a\,d - b\,c},\ \dfrac{b\,c\,s}{d\,(a\,d - b\,c)} - \dfrac{c\,v}{a\,d - b\,c} + \dfrac{s}{d}\right]$

COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Compute time: 0.2 seconds
Expd(27)   E:GOLD2.MTH   Free:100%   Derive Algebra

Рис. 2.37

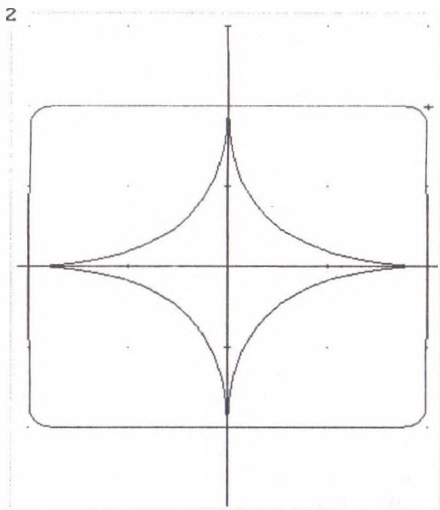
36: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

37: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}^{-1}$

38: $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$

39: $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot [3,\ 5]$

40: $\left[4,\ -\dfrac{1}{2}\right]$



COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
Options Plot Quit Remove Simplify Transfer moVe Window approX
Compute time: 0.0 seconds
Expd(39)   E:GOLD2.MTH   Free:97%   Derive Algebra

Рис. 2.38

Визначивши матрицю, обернену до матриці $[[a,b],[c,d]]'$ та пом

ноживши її на вектор $[v, s]'$, отримаємо добуток матриці

$\left([[a,b],[c,d]]'\right)^{-1}$ на вектор $[v, s]'$.

Скориставшись послугою *Expand*, одержимо результати, подані на рис. 2.37.

2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 1x+2y=3, \\ 2x+6y=5. \end{cases}$$

Знайшовши матрицю, обернену до матриці $[[1,2],[2,6]]'$, та пом

ноживши її на вектор $[3, 5]'$, одержимо вектор-розв'язок $[x, y]$ = [4, –1/2] (рис. 2.38).

Слід зауважити, що якщо сконструювати вираз виду

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix},$$

то звернення до послуги *soLve* не дає результату.

Необхідно також окремо аналізувати випадки, коли система рівнянь несумісна чи має безліч розв'язків.

Запитання для самоконтролю

1. Як за допомогою програми *DERIVE* можна знайти розв'язок системи лінійних рівнянь виду $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$?
2. Чи можна скористатися послугою *soLve* для відшукання розв'язку системи лінійних рівнянь виду
$$\begin{cases} ax+by=c, \\ ex+fy=g? \end{cases}$$
3. Як з використанням послуг програми *DERIVE* з'ясувати, сумісна чи ні система двох лінійних рівнянь з двома невідомими? трьох лінійних рівнянь з двома невідомими?
4. Якщо система двох лінійних рівнянь з двома невідомими має безліч розв'язків, як за допомогою програми *DERIVE* знайти: окремий частинний розв'язок системи? Загальний розв'язок системи?
5. Чому дорівнює визначник матриці, якщо відповідна система трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими має: єдиний розв'язок? безліч розв'язків? несумісна?

Вправи для самостійного виконання

Знайти розв'язки вказаних систем лінійних рівнянь або встановити їх несумісність:

$$\begin{cases} 2x-y=7, \\ x+y=4; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=5, \\ -x+y=3; \end{cases} \quad \begin{cases} 7x-2y=14, \\ 2x+7y=5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1, \\ 3x+y=7; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-y+3z=1, \\ x-2y+z=2, \\ x+y-2z=4; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=3, \\ y+z=5, \\ x+z=2. \end{cases}$$

§ 41. Декартові прямокутні і полярні координати. Побудова графіків функцій

При необхідності побудувати графік функціональної залежності між двома змінними (типу $y = f(x)$ чи $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$) або поверхню, що описується функцією двох змінних (типу $z = \Phi(x, y)$), використовується послуга *Plot*.

При зверненні до пункту *Plot* алгебраїчне вікно замінюється графічним вікном (рис. 2.39) і крім того з'являється додаткове меню у вигляді

COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Scale Ticks Window Zoom

в разі побудови графіків функцій однієї незалежної змінної та у вигляді

COMMAND: Algebra Center Eye Focal Grids Hide Length Options Plot Quit Window Zoom

в разі побудови графіків (поверхонь) функцій двох незалежних змінних. Вираз функції при цьому відмічається вказівником виразів в алгебраїчному вікні.

Підпункт *Algebra* використовується, якщо необхідно перейти до алгебраїчного вікна та основного меню.

При зверненні до підпункту *Plot* у графічному вікні будується графік функції $y = \Phi(x)$ чи поверхня $z = \Phi1(x, y)$, де Φ чи $\Phi1$ – вираз, на який встановлено вказівник виразів в алгебраїчному вікні. Якщо при цьому до виразу входить одна незалежна змінна, то будується графік у двовимірному просторі, причому, вздовж горизонтальної осі відкладається значення незалежної змінної, якою б літерою вона не була позначена, а вздовж вертикальної осі – значення залежної змінної (див. рис. 2.39). Якщо перейти до алгебраїчного вікна (звернувшись до підпункту *Algebra*) і вказівник виразів встановити на інший вираз (від однієї змінної), а потім звернутися до підпункту *Plot* головного меню, то алгебраїчне вікно знову замінюється графічним, в якому зберігаються всі раніше побудовані графіки. Якщо далі звернутися до підпункту *Plot*, то додатково буде побудовано графік щойно відміченого виразу (див. рис. 2.40, де подано графіки функцій $\sin\left(\frac{x^2}{4}\right)$ і $\int_{-2}^{x} t\,dt$).

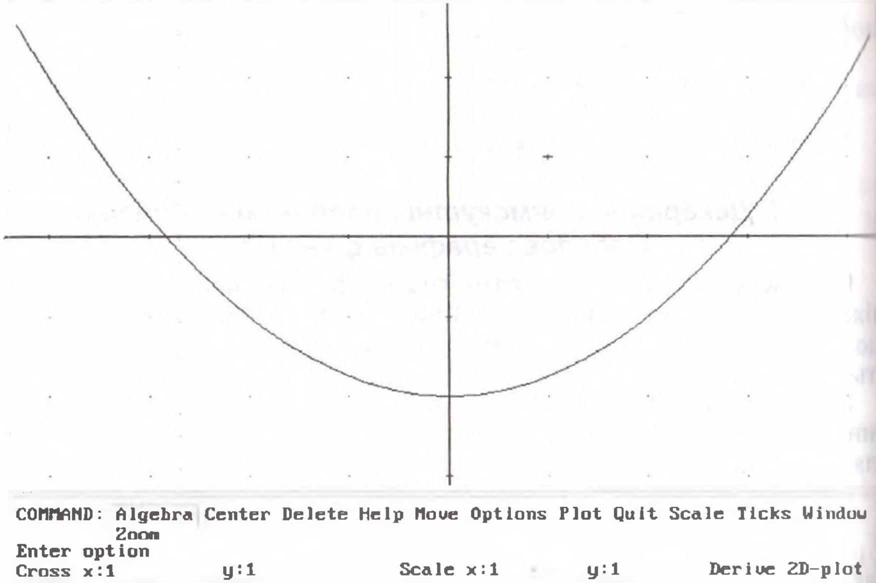


Рис. 2.39

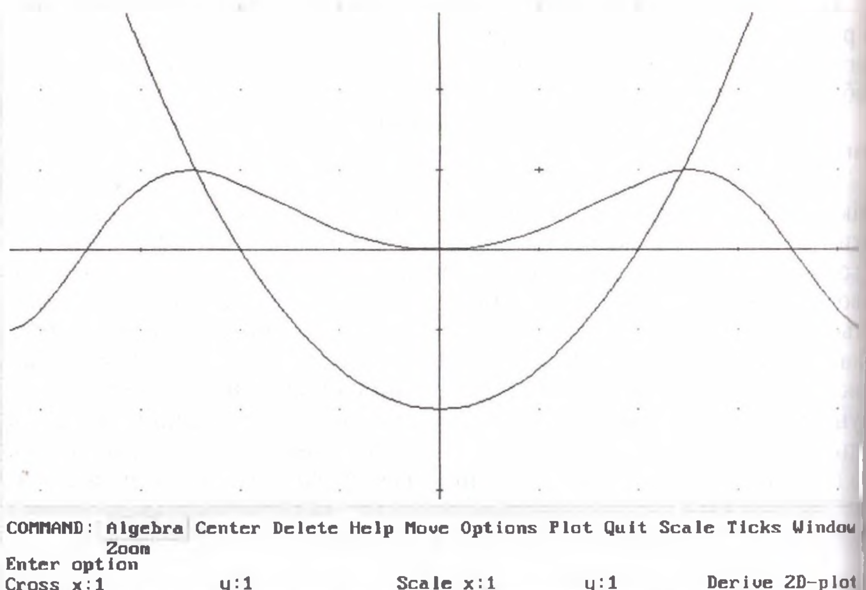


Рис. 2.40

В такий спосіб на екрані можна одержувати одразу графіки кількох функцій.

За допомогою клавіш управління курсором можна переміщувати в (двовимірному) графічному вікні координатний курсор (хрестик), координати якого відображаються в найнижчому рядку на екрані. Це дає можливість визначати координати будь-якої точки на координатній площині, зокрема за відповідними графіками знаходити наближені розв'язки рівнянь і систем рівнянь, найбільші і найменші значення функцій тощо.

При зверненні до підпункту *Center* центр графічного вікна переміщується в точку, в яку встановлено курсор, чи в точку з наперед вказаними координатами (за допомогою послуги *Move* при зображенні графіків на площині).

При зверненні до підпункту *Delete* (в разі побудови графіків в двовимірному просторі) з'являється додатковий запит у вигляді

DELETE: All Butlast First Last.

При вказуванні на *All* з графічного вікна вилучаються всі раніше побудовані графіки, *Butlast* – вилучаються всі графіки, за винятком останнього (в тому порядку, як вони були побудовані), *First* – вилучається графік, який було побудовано першим, *Last* – вилучається графік, який було побудовано останнім.

При зверненні до підпункту *Help* програма реагує цілком аналогічно до того, як і при зверненні до пункту *Help* основного меню.

Підпункт *Move* використовується при необхідності вказати координати точки, в яку необхідно перемістити координатний курсор у графічному вікні (без застосування клавіш управління курсором).

Підпункт *Type* (тип) підпункту *Options* пункту *Plot* (з додатковим запитом у вигляді: *TYPE: Coordinates: (Rectangular Polar); "Select coordinate type"*) використовується в разі необхідності вказати бажаний тип координатної системи (прямокутна чи полярна), в якій подаватимуться графіки вказуваних виразів.

Якщо вибрано полярну систему координат, то у рядку стану програми виводяться полярні координати координатного курсора – його віддаль від початку координат та полярний кут, що утворюється радіусом-вектором точки курсора з додатним напрямком полярної осі і змінюється в межах від $-\pi$ до π.

Нехай до алгебраїчного вікна введено вирази 15: $2.8\cos(9t)$ та 16: 3. Звернувшись до пункту *Plot* і вказавши в підпункті *Options* цього пункту на тип координат, наприклад полярні, і далі, після звернення до підпункту *Plot* пункту *Plot*, вказавши межі зміни полярного кута від –3.14 до 3.14 та на неперервний тип графіка, одержимо зображення, показане на рис. 2.41.

При зверненні до підпункту *Plot*, якщо було обрано прямокутну систему координат, у графічному вікні подається зображення графіка

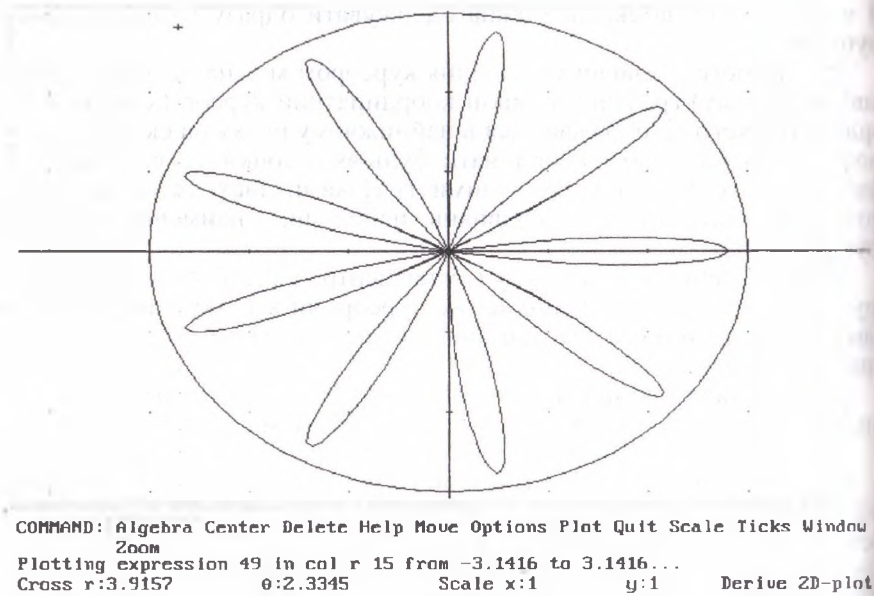


Рис. 2.41

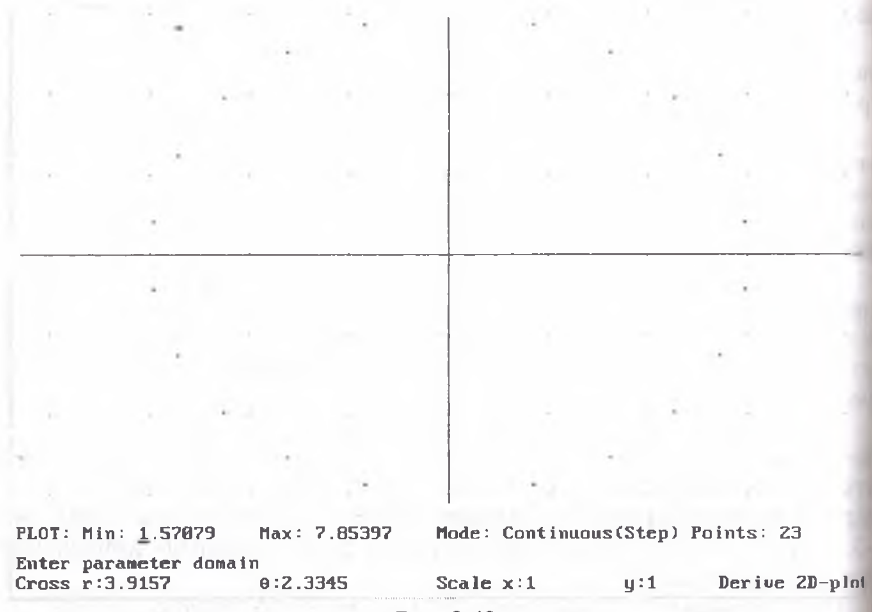


Рис. 2.42

функції однієї змінної, на вираз якої було встановлено вказівник в алгебраїчному вікні. При цьому значення x змінюється вздовж осі Ox в межах графічного вікна.

Якщо ж було обрано полярну систему координат, то з'являється додатковий запит у вигляді

PLOT: Min: Max: Mode: Continuous Step Points:
Enter parameter domain,

у відповідь на який слід ввести бажані мінімальне та максимальне значення полярного кута. Далі, використовуючи клавішу *Tab*, слід перейти до підпункту *Mode*, вказати бажаний тип зображення графіка (неперервний чи через певний крок) і, якщо графік будується не неперервний, вказати також кількість зображуваних на екрані точок, для чого необхідно, використовуючи клавішу *Tab*, перейти до підпункту *Points* і ввести бажану кількість точок (рис. 2.42).

При зверненні до підпункту *Scale* з'являється додатковий запит у вигляді

SCALE: x scale:# y scale:#
Enter units per tick mark,

у відповідь на який слід вказати, скільки одиниць вздовж осей Ox та Oy повинно вміщатися на відрізку, поміченому на екрані міткою. Після введення нових масштабів вздовж осей Ox та Oy графічний курсор автоматично переміщується в точку з новими координатами $x = 1$, $y = 1$. Перехід від підпункту *x-scale* до *y-scale* і навпаки здійснюється за допомогою клавіші *Tab*.

На рис. 2.42 подано зображення 23 точок на колі, рівняння якого $r = 3$, при цьому вказано параметри $\min\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\max\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi$, вид графіка – точковий, кількість точок – 23, x = scale:1.3, y = scale:1.3.

При зверненні до підпункту *Ticks* з'являється додатковий запит у вигляді

TICKS: Rows:# Columns: #

і підказка *"Enter Rows per tick mark"* (чи *"Enter columns per tick mark"*). У відповідь на цей запит слід вказати, скільки рядків і стовпчиків повинно бути між помітками вздовж осей Oy та Ox, у відповідності до чого змінюються також і масштаби вздовж осей Ox та Oy. Перехід від підпункту *Rows* до підпункту *Columns* і навпаки здійснюється за допомогою клавіші Tab.

При необхідності побудувати графік функції, заданої параметрично, слід ввести вектор виду $[x(t), y(t)]$ і далі звернутися до послуги *Plot*. Межі зміни параметра t та тип графіка вказуються так само, як при побудові графіків функцій, заданих в полярних координатах.

Наприклад, нехай в алгебраїчному вікні є вирази 14: [x, x^3/8], 15: [t, t^2–2]. Встановивши вказівник виразів по черзі на кожен з них

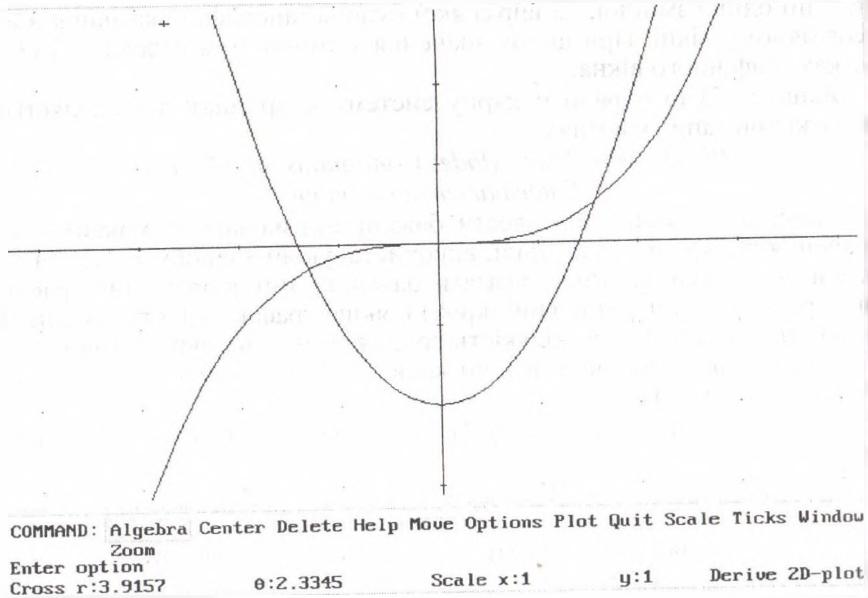


Рис. 2.43

та звернувшись до пункту *Plot* і вказавши всі необхідні параметри, одержимо графіки, подані на рис. 2.43.

Запитання для самоконтролю

Як з використанням програми *DERIVE*:

1. Побудувати графік функціональної залежності між змінними *x* та *y*, заданої явно у вигляді $y = f(x)$?
2. Побудувати поверхню, що описується виразом $\Phi(x, y)$?
3. Вилучити з графічного вікна типу *2D-Plot* всі раніше побудовані графіки? графік, побудований останнім? всі графіки, за винятком останнього?
4. Вказати колір графіка, що буде будуватися?
5. З використанням графічного курсора визначити координати точок перетину графіка з координатними осями на заданому проміжку? координати точок перетину двох графіків?
6. Перейти від полярних координат до декартових і навпаки?
7. Чи можна в прямокутній системі координат побудувати не неперервний графік функції виду $y = f(x)$?
8. Як змінити масштаби вздовж осей *Ox* та *Oy*?
9. Для чого використовується послуга *Move*?
10. Для чого використовується послуга *Ticks*?
11. Для чого використовується послуга *Center*?
12. Як побудувати графік залежності, заданої параметрично?
13. Чи зміниться вид графіка параметрично заданої залежності, якщо змінити тип координат (перейти від прямокутних до полярних координат чи навпаки)?

Вправи для самостійного виконання

1. Побудувати графіки залежностей, заданих явно у вигляді $y = f(x)$:

$y = x^3 - x^2 + x - 1$ на проміжку $[-10, 10]$; $y = \log_{1/2}|x + 0{,}1| + \frac{1}{4}\sin(8x)$ на проміжку $[-7, 7]$;

$y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{5}\cos(5x)$ на проміжку $[-3, 3]$; $y = \sqrt{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}$ на проміжку $[-8, 8]$;

$y = \mathrm{arctg}(x) - \frac{x^2}{\mathrm{tg}(1/x)}$ на проміжку $[-5, 5]$; $y = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$ на проміжку $[1, 10]$;

$y = \frac{1}{\log_{1/2}(-x)}$ на проміжку $[-7, 1]$; $y = \log_2(|1/x|)$ на проміжку $[-5, 5]$.

2. Побудувати графіки залежностей, заданих в полярних координатах:

$\rho = \varphi\sin\varphi,\ \varphi \in [-\pi, \pi]$; $\rho = \frac{\sin\varphi}{\varphi},\ \varphi \in [0.1, 8]$; $\rho = 3$; $\rho = 2(1 - \cos\varphi),\ \varphi \in [0, 2\pi]$;

$\rho = 2a\cos\varphi + h,\ \varphi \in [0, 2\pi]$, для значень $a \in \{1, 2, 3, 4\}$, $h \in \{0.5, 1, 1.5, 2\}$;

$\rho = a\varphi,\ \varphi \in [0, 4\pi]$, для значень $a \in \{0.1, 0.2, 0.5, 1, 1.5, 2\}$;

$\rho = 2a^2\cos 2\varphi$ для значень $a \in \{0.5, 1, 1.5, 2\}$.

3. Побудувати графіки параметрично заданих функціональних залежностей:

$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ t \in [0, 2\pi]$ для значень $a \in \{0.5, 1, 1.5, 2\}$;

$x = at - h\sin t,\ y = a - h\cos t,\ t \in [0, 8\pi]$ для значень $a \in \{0.5, 1, 1.5, 2, 2.5\}$, $h \in \{0.1, 0.3, 0.8, 1.2, 1.8, 2, 2.3, 2.7\}$;

$x = 2\cos t - \cos 2t,\ y = 2\sin t - \sin 2t,\ t \in [0, 8\pi]$;

$x = k\cos t - \cos kt,\ y = k\sin t - \sin kt,\ t \in [0, 8\pi]$ для значень $k \in \{3, 4, 5, 6\}$;

$x = k\cos t + \cos kt,\ y = k\sin t - \sin kt,\ t \in [0, 8\pi]$ для значень $k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$;

$x = 2a\cos t - a\cos 2t,\ y = 2a\sin t - a\sin 2t,\ t \in [0, 2\pi]$, $a \in \{0.5, 1, 1.5, 2, 3, 4, 5\}$;

$x = 2a\cos t,\ y = 0,\ t \in [0, 8\pi]$ для значень $a \in \{0.2, 0.4, 0.8, 1, 1.5, 2\}$;

$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ t \in [0, 8\pi]$ для значень $a \in \{1, 1.5, 2, 3, 4, 5\}$;

$x = a\cos t + at\sin t,\ y = a\sin t - at\cos t,\ t \in [0, 4\pi]$ для значень $a \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2, 3, 4\}$.

§ 42. Побудова зображень поверхонь, описаних рівняннями виду z = f(x, y)

При побудові поверхонь у вікні типу *3D-Plot* при зверненні до пункту *Plot* в нижній частині екрана з'являється додаткове меню у вигляді

COMMAND: Algebra Center Eye Focal Grids Hide Length Options Plot Quit Window Zoom.

Призначення підпункту *Algebra* таке ж, як і при роботі з вікнами типу *2D-Plot*.

При зверненні до підпункту *Center* з'являється додатковий запит у вигляді

CENTER: x: y: z:

Auto: (Yes) No

Enter coordinates,

у відповідь на який слід ввести бажані координати центра *x*, *y*, *z* та вказати режим *Auto* (*Yes* чи *No*). Якщо вказано *Auto No*, може трапитись, що зображення поверхні не вдасться побудувати. В цьому випадку в рядку підказок видається повідомлення *"Too few real sample points in box"* (надто мало точок у вікні). Якщо вказано *Auto Yes*, програма автоматично коригує координати центра так, щоб відповідну частину зображення поверхні можна було побудувати. Тому в переважній більшості випадків краще обирати режим *Auto Yes*.

При зверненні до підпункту *Eye* з'являється додатковий запит у вигляді

EYE: x: y: z: Auto:(Yes) No

Enter coordinates.

У відповідь на нього слід ввести координати точки, з якої бажано оглядати поверхню, що вивчається. Призначення режиму *Auto* аналогічне до його призначення в підпункті *Center*. Режим *Auto* автоматично переходить до стану *No*, якщо з клавіатури вводяться координати центра, відмінні від визначених за програмою.

При зверненні до підпункту *Focal* з'являється додатковий запит у вигляді

FOCAL: x: y: z: Auto:(Yes) No

Enter coordinates.

Використання цієї послуги дозволяє по-різному розташовувати систему координат, в якій зображується поверхня.

При зверненні до підпункту *Grids* з'являється додатковий запит у вигляді

GRIDS: x: y:

Enter grid panels,

у відповідь на який слід ввести густину сітки – кількість ліній вздовж осей *Ox* та *Oy* при вимальовуванні поверхонь.

При зверненні до підпункту *Hide* з'являється додатковий запит у вигляді

HIDE: Remove: Yes No

Hidden line removal.

У відповідь на нього слід вказати на *Yes* або *No*. Якщо вказати на *Yes*, невидимі лінії при побудові поверхонь будуть сховані, якщо вказати *No*, то лінії будуть видимі, як через сітку.

При зверненні до підпункту *Length* з'являється додатковий запит у вигляді

LENGTH: x: y: z: Auto:(Yes) No

Enter interval length.

У відповідь необхідно вказати видиму довжину осей *Ox*, *Oy* та *Oz*. Призначення режиму *Auto* аналогічне до вказаного раніше. Режим

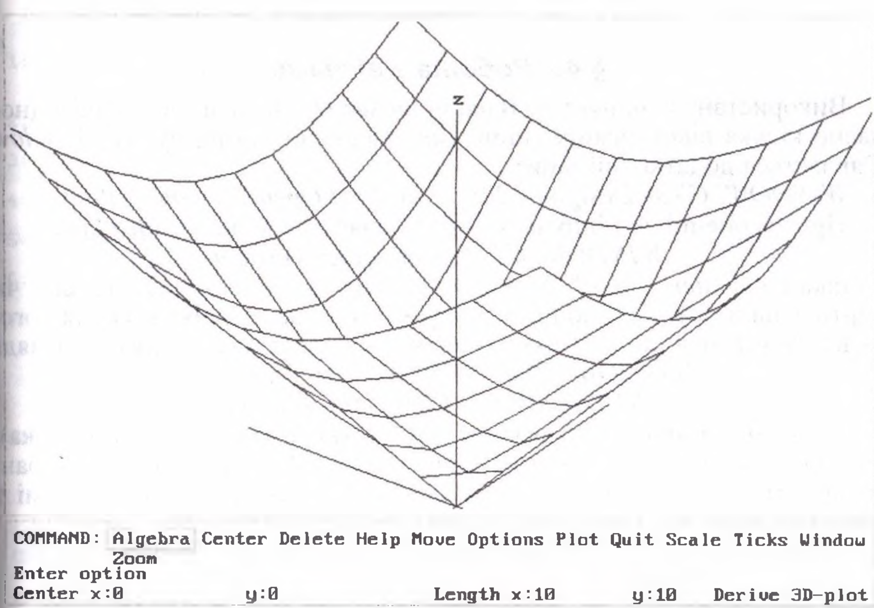


Рис. 2.44

Auto автоматично переходить до стану *No*, якщо з клавіатури вводяться значення, відмінні від визначених за програмою.

Приклад

Нехай потрібно побудувати зображення поверхні конуса, що описується рівнянням $Z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ввівши до алгебраїчного вікна вираз *SQRT*(x^2 + y^2) і скориставшись послугою *Plot*, отримаємо зображення, подане на рис. 2.44.

Запитання для самоконтролю

1. Як, використовуючи послуги програми *DERIVE*, можна отримати 3-вимірне зображення поверхні, що описується рівнянням виду $z = f(x, y)$?
2. Як вказати координати центра зображення?
3. Як вказати координати точки, з якої бажано оглядати поверхню?
4. Як вказати густину сітки, за допомогою якої подається зображення поверхні?
5. Якою послугою програми *DERIVE* слід скористатись в разі необхідності подати зображення поверхні так, щоб невидимі лінії при побудові поверхонь стали видимі як через сітку?
6. Як вказати видиму довжину осей *Ox*, *Oy*, *Oz*?

Вправи для самостійного виконання

Скориставшись послугами програми *DERIVE*, побудувати зображення поверхонь, що описуються залежностями:

$z = x^2 - y^2$; $z = x^2 + y^2$; $z = xy$; $z = |xy|$; $z = x + y$; $z = |x + y|$; $z = |x| + |y|$.

§ 43. Робота з вікнами

Використання підпункту *Window* дозволяє подати на екрані одночасно кілька вікон різних типів. При зверненні до підпункту *Window* з'являється додатковий запит

WINDOW: Close Designate Flip Goto Next Open Previous Split.

При зверненні до підпункту *Split* з'являється додатковий запит

WINDOW SPLIT: Horisontal Vertical

і підказка *"Enter option"*. У відповідь слід вказати, горизонтально чи вертикально потрібно поділити наявне вікно на два вікна. Після того, як вказано спосіб поділу вікна, з'являється додатковий запит у вигляді

WINDOW SPLIT HORISONTAL: At line: #

(чи WINDOW SPLIT VERTICAL: At column: #),

у відповідь на який слід вказати номер рядка (чи номер стовпчика), вздовж якого бажано поділити наявне вікно. В такий спосіб на екрані можна створити досить велику кількість вікон, поділяючи окремі з них на два.

При зверненні до підпункту *Open* з'являється додатковий запит

WINDOW OPEN: Type: Algebra 2D-Plot 3D-Plot

Enter window Type.

У відповідь на нього необхідно вказати тип кожного з наявних вікон: для виведення алгебраїчних виразів, для виведення двовимірних зображень графіків функцій, для виведення тривимірних зображень поверхонь, що описуються функціями двох змінних. Коли вказівник встановлено на вираз, до якого входить лише одна змінна, то у вікні типу *3D-Plot* будується відповідна циліндрична поверхня, а у вікні типу *2D-Plot* – графік функції однієї незалежної змінної (рис. 2.45).

При зверненні до підпункту *Next* відбувається перехід до вікна, номер якого на 1 більший, ніж наявного, *Previous* – до вікна, номер якого на 1 менший, ніж наявного. Номер активного вікна при цьому відмічено спеціальним вказівником номерів вікон (підсвічений прямокутничок). Всі номери вікон розташовуються в кільцевому порядку, так що наступним після найбільшого номера буде номер 1, попереднім до вікна з номером 1 вважається вікно з найбільшим номером.

При зверненні до підпункту *Goto* з'являється додатковий запит у вигляді

WINDOW GOTO: Window: #

Enter windov number.

У відповідь на нього слід вказати номер вікна, до якого бажано перейти, не перебираючи підряд в прямій чи зворотній послідовності інші вікна.

В одному і тому ж місці (вікні) на екрані можна відкрити кілька сторінок (вікон) різних типів. Тип вікна оголошується при його від-

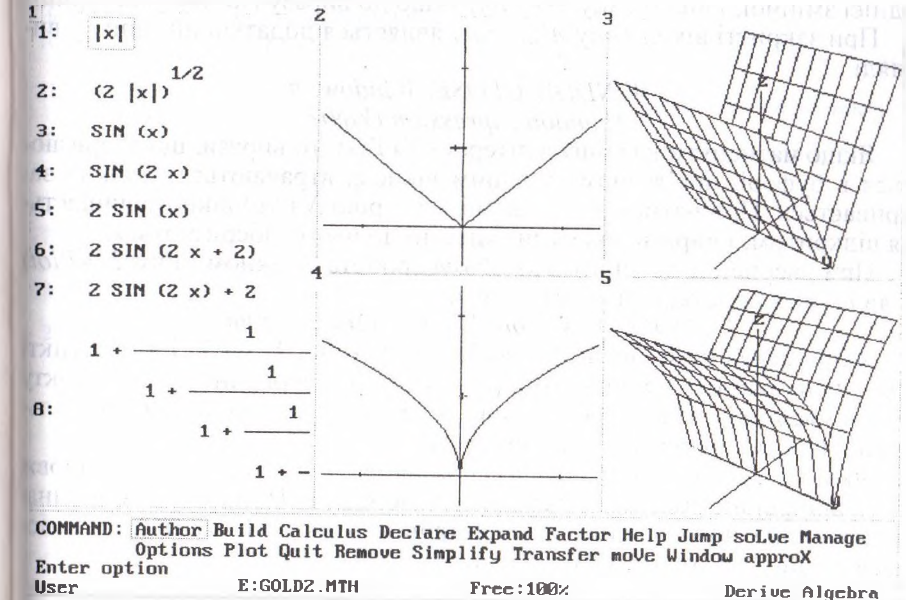


Рис. 2.45

критті. За допомогою підпункту *Flip* можна «перелистувати» різні вікна (сторінки) на одному і тому ж місці екрана (в одному і тому ж вікні). При зверненні до підпункту *Flip* вікна типу *3D-Plot* залишаються порожніми. Сторінки інших типів (*Algebra* і *2D-Plot*) почергово з'являються в активному вікні екрана. Використання підпункту *Designate* дозволяє змінити тип вікна, відкритого раніше. При зверненні до цього підпункту з'являється додатковий запит у вигляді

WINDOW DESIGNATE: Type: Algebra 2D-Plot 3D-Plot

Enter window type,

у відповідь на який слід вказати бажаний тип раніше відкритого активного вікна.

При зверненні до підпункту *Close* наявна сторінка в активному вікні вилучається. Якщо при цьому всі раніше відкриті сторінки у даному вікні закриті, то і саме вікно закривається, а його поле на екрані поєднується з полем деякого іншого вікна, яке залишилось незакритим. Якщо всі вікна закрито, то залишається єдине вікно типу *Algebra*, *2D-Plot* або *3D-Plot*, поле якого займає весь екран, за винятком нижніх чотирьох рядків.

На початку роботи з програмою завжди відкрите вікно типу *Algebra*. Якщо звернутися до пункту *Plot* основного меню, то автоматично відкривається вікно типу *2D-Plot*, якщо до виразу, на який у вікні типу *Algebra* встановлено вказівник виразів, входить не більше однієї змінної, і вікно типу *3D-Plot*, якщо до виразу входять дві змінні.

При закритті вікон типу *Algebra* з'являється додатковий запит у вигляді

WINDOW CLOSE: Window: #
Abandon expression (Y/N)?

Якщо натиснути клавішу з літерою *Y* (*Yes*), то вирази, що зберігаються в буфері, пов'язаному з даним вікном, втрачаються, а вікно закривається. При натисканні клавіші з літерою *N* (*No*) вікно залишається відкритим, і вирази, які були занесені до нього, зберігаються.

При зверненні до підпункту *Zoom* (робота з вікном типу *2D-Plot*) з'являється додатковий запит у вигляді

ZOOM: Axis: Both X Y Direction: In Out.

Якщо серед підпунктів *Axis* вибрати *Both* (чи *X*, чи *Y*) і в підпункті *Direction* вказати на *Out*, то при кожному зверненні до підпункту *Zoom* масштаби вздовж обох осей *Ox* та *Oy* (чи тільки осі *Ox*, чи тільки осі *Oy*) зменшуються приблизно вдвічі.

Якщо ж серед підпунктів *Direction* вибрати *In*, то масштаби вздовж осей відповідно збільшуються приблизно вдвічі. При цьому координати координатного курсора та масштаби вздовж осей *Ox* та *Oy* подаються в найнижчому рядку на екрані.

Приклади

Побудувати графіки залежностей $z = |x|$ та $z = (2|x|)^{1/2}$ в двовимірному та тривимірному просторах і подати їх на одному екрані.

Поділивши екран на 5 вікон, як показано на рис. 2.45, вкажемо типи вікон: вікно 1 – алгебраїчне, вікно 2 – *2D-Plot*, вікно 3 – *3D-Plot*, вікно 4 – *2D-Plot*, вікно 5 – *3D-Plot*.

Перейдемо тепер до вікна 1 і встановимо вказівник виразів на вираз 1: $|x|$ (рис. 2.45). Далі перейдемо до вікна 2 і звернемось до послуги *Plot*. В результаті цього одержимо графік функції $z = |x|$. Перейшовши до вікна 3 і звернувшись до послуги *Plot*, одержимо зображення поверхні $z = |x|$ (див. рис. 2.45). Аналогічно, перейшовши до вікна 1 і встановивши вказівник виразів на вираз 2: $(2|x|)^{1/2}$, і далі перейшовши до вікна 4 і звернувшись до послуги *Plot*, а потім до вікна 5 і звернувшись до послуги *Plot*, одержимо зображення, подані у вікнах 4 і 5 на рис. 2.45.

Запитання для самоконтролю

Як з використанням послуг програми *DERIVE*:

1. Поділити екран на кілька вікон?
2. Вказати потрібний тип вікна з певним номером?
3. Перейти від одного вікна до іншого?
4. Перегортати сторінки в одному і тому ж вікні?
5. Змінити раніше вказаний тип вікна?
6. Вилучити сторінку з вікна?
7. Закрити вікно?

8. Закрити алгебраїчне вікно?
9. У вікні типу *2D-Plot* змінити масштаби вздовж осі *Ox*? осі *Oy*? вздовж обох осей?
10. Побудувати графік функції, що визначається наперед вказаним виразом, у вікні з наперед заданим номером?
11. У графічному вікні якого типу можна будувати зображення функціональної залежності, що визначається виразом, до якого входять дві змінні? одна змінна?
12. Як із вікна з наперед вказаним номером вилучити побудоване там зображення?

Вправи для самостійного виконання

1. Побудувати графіки функцій:
   $y = \sin(x)$, $y = \sin(2x)$, $y = 2\sin(x)$, $y = 2\sin(2x + 2)$, $y = 2\sin(2x - 2)$
   а) в одному і тому ж вікні,
   б) в п'яти різних вікнах,
   зберігаючи алгебраїчне вікно.
2. Побудувати в одному вікні типу *2D-Plot*, зберігши на екрані алгебраїчне вікно, графіки функцій:

   а) x^2, 2^x, 2^{-x}, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$;

   б) $\log_2 x$, $\log_{1/2} x$, $\log_{1/2}(-x)$, $\log_{1/2}(2-|x|)$, $\frac{1}{\log_{1/2} x}$, $\frac{1}{\log_2 x}$.
3. Побудувати на одному і тому самому екрані графіки і відповідні циліндричні поверхні для залежностей, що визначаються виразами:

   а) $\sin(x)$; б) $\log_2(x)$; в) 2^x; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^x$; д) 1; є) x; ж) $\frac{x^3}{10}$; з) $\sqrt[3]{x}$.

§ 44. Операції над файлами (Load, Merge, Save)

Якщо необхідно зберегти інформацію, наявну в буфері, зв'язаному з алгебраїчним вікном, використовується послуга *Transfer* (*transfer* – переносити, переміщати, передавати).

При зверненні до пункту *Transfer* з'являється додатковий запит у вигляді

TRANSFER: Merge Clear Demo Load Save Print State.

Якщо звернутися до підпункту *Merge*, з'являється додатковий запит у вигляді

TRANSFER MERGE file:
Enter file name.

У відповідь на нього слід вказати ім'я файлу, інформацію з якого бажано приєднати до інформації, що вже є в буфері, зв'язаному з активним вікном типу *Algebra*.

При зверненні до підпункту *Clear* з'являється додатковий запит *Abandon expression (Y/N)?*. Якщо відповісти *Yes* (натиснувши клавішу з літерою *Y*), вся інформація, що є в буфері, зв'язаному з даним активним вікном, вилучається. Якщо ж відповісти *No* (натиснувши клавішу з літерою *N*), інформація зберігається і програма повертається до підпункту *Merge*.

В разі введення всієї інформації до буфера, зв'язаного з активним вікном, з файлів (за допомогою операцій *Merge* чи *Load*), інформація вилучається без додаткового запиту *Abandon expression (Y/N)?*.

При зверненні до підпункту *Demo* з'являється додатковий запит у вигляді

TRANSFER DEMO file:
Enter file name.

У відповідь на нього слід вказати ім'я файлу, який необхідно продемонструвати. Програма виводить на екран текст із вказаного файлу рядок за рядком, що дає можливість переглянути рядок. Після натискання довільної клавіші вводиться наступний запис. В такий спосіб можна переглянути весь файл, ім'я якого вказано у відповідь на запит *TRANSFER DEMO file:*.

При зверненні до підпункту *Load* з'являється додатковий запит у вигляді

TRANSFER LOAD file:
Enter file name,

у відповідь на який слід вказати ім'я файлу, інформацію з якого необхідно завантажити до буфера даного вікна типу *Algebra* замість наявної інформації. Після того як введено ім'я файлу, з'являється запит *Abandon expression (Y/N)?*. Якщо відповісти *Yes*, наявна інформація з активного вікна типу *Algebra* вилучається і на її місце завантажується інформація з вказаного файлу. Якщо ж відповісти *No*, то операція завантаження (*Load*) нової інформації не виконується і програма повертається до підпункту *Merge* пункту *Transfer*.

При зверненні до підпункту *Save* з'являється додатковий запит у вигляді

TRANSFER SAVE file: Type: Derive Fortran Pascal Basic Length:79
Select file type,

у відповідь на який слід вказати бажаний тип файлу, після чого з'являється ще один запит у вигляді

TRANSFER SAVE file:
Enter file name.

У відповідь на нього слід ввести бажане ім'я файлу, в якому необхідно зберегти інформацію, наявну в буфері активного алгебраїчного вікна, після чого файл з вказаним іменем буде записано до піддиректорію *DERIVE*. При цьому імена файлів типу *DERIVE* (тобто створених в середовищі *DERIVE*) отримують розширення *MTH*, а імена файлів типу *FORTRAN*, *PASCAL*, *BASIC* отримують розширення відповідно *FOR*, *PAS*, *BAS*.

При зверненні до підпункту *Print* з'являється додатковий запит у вигляді

PRINT: Printer File Layout Options
Enter option.

При зверненні до підпункту *Printer* вміст активного вікна типу *Algebra* виводиться на папір через друкуючий пристрій (*Printer*), наперед підготовлений до друкування.

При зверненні до підпункту *File* з'являється додатковий запит у вигляді

PRINT to file:
Enter file name,

у відповідь на який слід вказати бажане ім'я файлу, після чого інформацію із буфера активного вікна типу *Algebra* буде виведено до файлу з вказаним іменем. При цьому ім'я файлу отримує розширення *PRT* і файл розташовується в піддиректорії *DERIVE*.

При зверненні до підпункту *Layout* з'являється додатковий запит

PRINT OPTIONS: Length:66 Width:80 Top:0 Bottom:0 Left:8 Rigth:3
Enter page lines,

у відповідь на який слід ввести бажані параметри розташування тексту: *Length* – кількість рядків на сторінці, *Width* – кількість стовпчиків (позицій) в рядку, *Top* – кількість рядків, що залишаються вільними від друку зверху сторінки, *Bottom* – кількість вільних рядків внизу сторінки, *Left* – кількість стовпчиків, що залишаються вільними ліворуч, *Rigth* – кількість стовпчиків, що залишаються праворуч.

При зверненні до підпункту *State* з'являється додатковий запит у вигляді

STATE: Load Save.

Якщо бажано запам'ятати даний стан установок програми (кольори графіків, меню, підказок та інших), слід звернутися до підпункту *Save* і у відповідь на запит

TRANSFER SAVE file:

вказати бажане ім'я файлу. Цей файл із розширенням імені *INI* поміщається в піддиректорій *DERIVE*. В майбутньому цей файл може бути використаний для відновлення установок програми, запам'ятованих у вказаному файлі, для чого досить у підпункті *State* вказати на опцію *Load* і у відповідь на наступний запит

TRANSFER LOAD file:

ввести ім'я файлу, в якому зберігаються установки різних параметрів програмі.

Запитання для самоконтролю

Як з використанням послуг програми *DERIVE*:

Зберегти інформацію, що є в буфері, пов'язаному з активним вікном типу *Algebra*, в деякому файлі на дискові?

Приєднати до інформації, що є в буфері, пов'язаному з активним вікном типу *Algebra*, інформацію з деякого файлу на дискові?

Очистити буфер, зв'язаний з активним вікном?

Переглянути рядки деякого файлу, що зберігається на дискові?

Завантажити інформацію з деякого файлу до буфера, пов'язаного з активним вікном типу *Algebra*, з одночасним вилученням наявної в ньому інформації?

6. Вивести інформацію на принтер?
7. Запам`ятати установки, здійснені під час роботи з програмою?
8. Зберегти у файлах на дискові інформацію, що зберігається в буферах, пов'язаних з вікнами типу *2D-Plot* чи *3D-Plot*.

§ 45. Деякі допоміжні послуги програми DERIVE

Коротко розглянемо деякі допоміжні послуги програми *DERIVE*, що використовуються при необхідності встановити потрібні кольори зображень, точність обчислень, тип координат (полярні чи декартові), основу системи числення і ін.

При зверненні до пункту *Options* основного меню з'являється додатковий запит

OPTIONS: Color Display Execute Input Mute Notation Precision Radix.

У відповідь слід вказати потрібний підпункт.

У разі звернення до підпункту *Color* з'являється додатковий запит у вигляді

COLOR: Menu Work.

Якщо вказати на підпункт *Menu*, з'являється ще один додатковий запит

COLOR MENU: Frame: n Option: n1 Prompt: n2 Status: n3 Background: n4 Border: n5

і підказка

Enter color number: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15,

причому кожен із 15 номерів подано в кольорі, що має цей номер.

У відповідь на запит слід ввести бажані кольори для рамок вікон (*Frame*), назв пунктів меню (*Option*), підказок (*Prompt*), стану програми (*Status*, висвітлюється в найнижчому рядкові на екрані), фону вікна спілкування (*Background*), бордюру (*Border*).

Якщо вказати на підпункт *Work*, з'являється додатковий запит

COLOR WORK: Foreground: Background: ,

у відповідь на який слід ввести бажані кольори переднього плану та фону зображень.

При зверненні до підпункту *Execute* з'являється додатковий запит

D:\ DERIVE >

і підказка *Enter DOS command*. У відповідь на запит потрібно ввести команду *DOS* (наприклад, *Dir*, *Copy* і т.д.). Після виконання вказаної команди *DOS* управління знову передається до програми *DERIVE* (до головного меню).

При зверненні до підпункту *Input* з'являється додатковий запит

INPUT: Mode: Character Word

і підказка *Select input mode*. У відповідь на цей запит слід вказати на один із двох режимів введення – посимвольний (*Character*) чи пословесний (*Word*).

Наприклад, якщо встановити режим *Word*, то при зверненні до пункту *Author* головного меню і введенні виразу *x*2 його буде подано у вікні виведення у вигляді *x*2, якщо ж встановлено режим *Character*, то у вигляді $x \cdot 2$. У разі подальшого звернення до підпункту *Substitute* пункту *Manage* і підстановки 5 замість *x* при режимі *Word* одержимо число 52, при режимі *Character* вираз $5 \cdot 2$. Якщо далі звернутися до підпункту *Expand* і вказати на вираз 52, отриманий при режимі введення *Word*, число 52 залишиться без змін, якщо ж символи *x* і 2 були введені в режимі *Character*, то після підстановки замість *x* цифри 5 і наступного звернення до підпункту *Expand* одержимо число 10.

При введенні в режимі *Word* спочатку числа, а потім букви, число виступає як коефіцієнт. Якщо вводяться спочатку букви, а далі цифри, то букви і цифри виступають як символи зображення імені деякого числа.

При зверненні до підпункту *Mute* з'являється додатковий запит

MUTE: Active: Yes No

і підказка: *Mute warning messages.* Якщо вибрати підпункт *Yes*, то комп'ютер працюватиме без звукових реакцій на помилкові дії (*mute* – німий), якщо ж обрати підпункт *No*, то в разі помилкових дій користувача чи аварійних ситуацій при виконанні програми видається звуковий сигнал.

При зверненні до підпункту *Notation* з'являється додатковий запит

NOTATION: Style: Decimal Mixed Rational Scientific Digit: 6

і підказка: *Enter numerical Output style*, у відповідь на який слід вказати бажаний тип подання результатів обчислень та кількість цифр у поданні чисел (щоб перейти до підпункту *Digit* і навпаки, слід скористатися клавішою *Tab*).

При зверненні до підпункту *Precision* пункту *Options* з'являється додатковий запит

PRECISION: Mode:Approximate Exact Mixed Digits: 6
"Select arithmetic mode".

У відповідь на нього слід вказати бажану точність обчислень та кількість цифр у поданні їх результатів. Слід мати на увазі, що чим більше цифр замовляється у поданні результатів обчислень, тим більше часу вимагається на їх отримання.

При зверненні до підпункту *Radix* пункту *Options* з'являється додатковий запит

RADIX: Input: 10 Output: 10
Enter base between 2 and 36.

У відповідь слід ввести основи систем числення, в яких подаватимуться числа, що вводяться, та числа, що виводяться (до алгебраїчного вікна, тобто на екран).

Наприклад, якщо вказати

RADIX: Input: 10 Output: 2

і далі вводити (скориставшись послугою *Author*) вираз cos(8*x*), в алгебраїчному вікні з'явиться cos(1000*x*).

Якщо вказати

RADIX: Input: 2 Output: 2,

то при введенні чисел їх зображення можуть подаватися лише за допомогою цифр 0 і 1. При спробі ввести іншу цифру видається повідомлення про помилку.

Якщо вказати

RADIX: Input: 2 Output: 10,

то при виведенні двійкових чисел вони подаються в алгебраїчному вікні в десятковій системі числення.

При зверненні до підпункту *Quit* з'являється запит

Abandon expression (Y/N)?

Якщо у відповідь натиснути клавішу з літерою *Y*, всі введені вирази втрачаються і відбувається вихід із програми до середовища використовуваної оболонки операційної системи. Якщо ж натиснути клавішу з літерою *N*, програма залишається в стані, з якого було здійснено звернення до підпункту *Quit*.

Деякі додаткові відомості стосовно послуг програми *DERIVE* можна отримати, проаналізувавши інформацію, що надається при зверненні до послуги *Help* та інших послуг.

Розділ 3
Програма EUREKA

§ 46. Початок роботи з програмою. Допустимі операції і функції. Введення інформації

Програма *EUREKA* призначена для розв'язування досить широкого кола математичних задач, дослідження функцій, побудови їхніх графіків, розв'язування рівнянь та систем рівнянь, відшукання оптимальних розв'язків задач лінійного і нелінійного програмування та ін.

Для роботи програми *EUREKA* потрібен комп'ютер типу IBM PC з не менш ніж 384K оперативної пам'яті. Графічний монітор не є обов'язковим, проте, якщо використовуються адаптери CGA, EGA, Hercules чи вище, графіки подаються в графічному режимі (при зверненні до послуги *Zoom*).

Щоб розпочати роботу з програмою, слід запустити на виконання файл *EUREKA.EXE*.

Після входження до середовища *EUREKA* на екрані дисплея з'являються кілька вікон у вигляді, поданому на рис. 3.1.

У верхній частині екрана подано головне меню програми, в нижній – призначення функціональних клавіш. Призначення функціональних клавіш може змінюватися залежно від того, який із пунктів програми є активним.

Головне меню складається із пунктів:

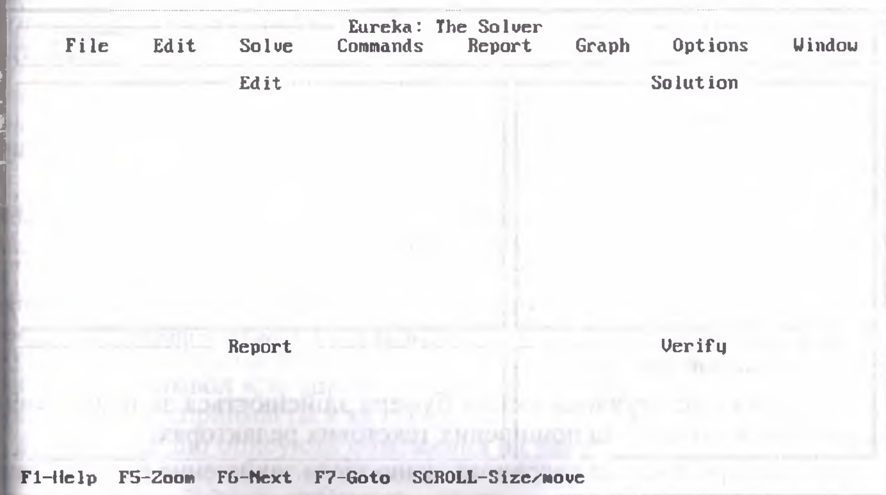


Рис. 3.1

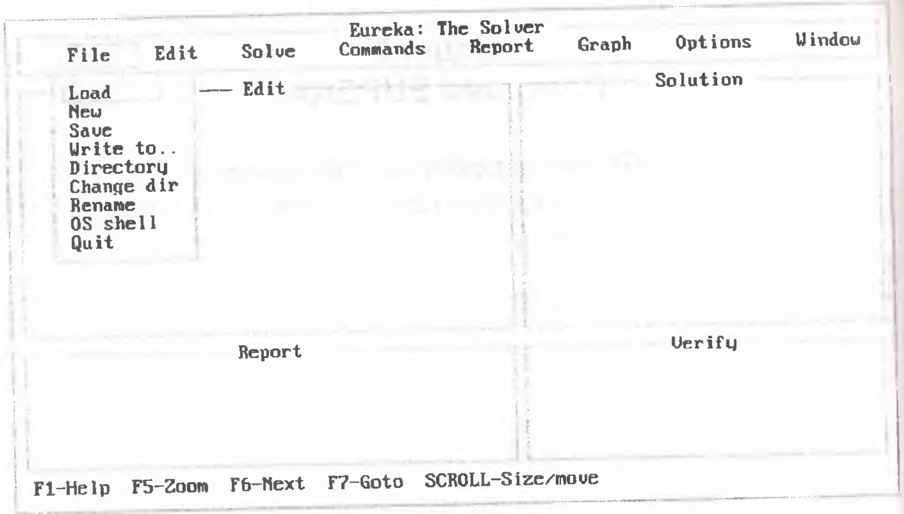


Рис. 3.2

File Edit Solve Commands Report Graph Options Window.

Щоб звернутися до деякого пункту головного меню, слід, послідовно натискуючи клавішу *Space Bar* чи клавіші управління курсором ←, →, встановити вказівник пунктів (підсвічений прямокутник) на потрібний пункт і натиснути клавішу *Enter* (Ввести). Той же результат досягається, якщо натиснути клавішу з літерою, яка в назві пункту меню вказана великою. Окремі пункти головного меню поділяються на підпункти, перелік яких з'являється при зверненні до відповідного пункту головного меню (рис. 3.2). Звернення до таких підпунктів здійснюється аналогічно до попереднього.

Щоб відмовитись від виконання послуги і повернутися до стану, в якому було здійснено звернення до послуги, слід натиснути клавішу *Esc* (якщо виконання послуги ще не завершено).

Для введення потрібної інформації (з клавіатури) використовується пункт головного меню *Edit*. Після звернення до цієї послуги вікно *Edit* стає активним (активне вікно позначається подвійною рамкою), і в ньому з'являється миготливий курсор. Це означає, що далі до буфера, зв'язаного з вікном *Edit*, можна вводити нові тексти і формули чи редагувати раніше введені.

Введення і редагування вмісту буфера здійснюється за правилами, прийнятими в найбільш поширених текстових редакторах.

Щоб повернутися до головного меню після закінчення редагування раніше введеного чи введення нового вмісту, необхідно натиснути клавішу *Esc* або клавішу F10.

Вирази у вікні *Edit* подаються за правилами, прийнятими в найбільш поширених мовах програмування (*Basic*, *Pascal* тощо). Доступними є операції + (додавання), - (віднімання), * (множення), / (ділення), ^ (піднесення до степеня).

У виразах можуть бути використані вбудовані функції

abs(x) абсолютне значення x,

atan2(y,x) арктангенс $\frac{y}{x}$,

cos(x) косинус x,

cosh(x) косинус гіперболічний x,

deriv(f(x),x) похідна від $f(x)$ за змінною x,

exp(x) експоненціальна (показникова) функція (e^x),

fact(n) n-факторіал,

floor(x) найбільше ціле число, яке не перевищує x,

im(x) уявна частина x,

integ(f(x),x, a, b) визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$,

ln(x) натуральний логарифм x,

log10(x) десятковий логарифм x,

msqrt(x) мінус квадратний корінь,

ncum(x) нормальний кумулятивний розподіл ймовірностей,

polar(x,y) перетворення до полярних координат,

poly(x, a_n, …, a_1, a_0) поліном $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$,

pos(x) додатна частина x,

re(x) дійсна частина x,

sgn(x) знак x,

sin(x) синус x,

sinh(x) синус гіперболічний x,

sqrt(x) корінь квадратний з x,

sum(f(k),k, m,n) сума $\sum_{k=m}^{n} f(k)$,

tan(x) тангенс x,

tanh(x) тангенс гіперболічний x.

При необхідності додати до умов задачі рядок коментарів на початку такого рядка слід поставити символ «;». Будь-який рядок, перед яким стоїть символ «;», сприймається як коментар. Рядок у фігурних дужках також сприймається як коментар.

До виразів, що описують обмеження на значення змінних чи функціональні залежності, можуть входити стандартні функції та функції, визначені користувачем. При цьому функція, визначена користувачем, описується за правилами:

ім'я_функції(ім'я_аргументу) := вираз
або
ім'я_функції(ім'я_аргументу) = вираз,
де вираз описує правило, за яким кожному значенню аргументу ставиться у відповідність певне значення функції.

Запитання для самоконтролю

1. Як розпочати роботу з програмою *EUREKA*?
2. Як визначити призначення функціональних клавіш?
3. Як звернутися до потрібного пункту меню?
4. Як звернутися до деякого підпункту деякого пункту меню?
5. Як відмовитись від виконання послуги, до якої здійснювалось звертання?
6. Яке з вікон використовується для введення і редагування інформації?
7. Як позначається активне вікно?
8. Якого роду інформацію можна вводити до вікна *EDIT*?
9. Як повернутись до головного меню програми?
10. Які операції і функції допустимі при коригуванні виразів?
11. Що є ознакою коментаря?
12. Як описуються функції, визначені користувачем?

Вправи для самостійного виконання

Користуючись послугою *Edit* програми *EUREKA*, ввести до запам'ятовуючих пристроїв комп'ютера вирази, що в загальноприйнятому запису мають вигляд:

1) $\mathrm{arctg}(3)$;
2) $\int_a^b \sin(x^2+x+1)dx$;
3) $\frac{d}{dx}(\cos^2 x)$;
4) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$;
5) $\sum_{k=1}^{100} k(k+1)$.

Ввести функції, визначені користувачем:

1) $f(x) := x^2 + \cos^2 x - \lg(3-x)$;
2) $v(x) := \frac{e^x}{\ln(x+5)} + 3\,\mathrm{ctg}\,x$;
3) $s(x) := \frac{v(x)}{f(x)} + x^2 - 5x$;
4) $w(x) := \sum_{k=1}^{n} v\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$;
5) $\mathrm{norma}(x) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$;
6) $\rho(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$.

§ 47. Обчислення значень виразів і функцій. Побудова таблиць значень функцій

При необхідності обчислити значення деякого виразу слід звернутися до підпункту *Calculator* пункту *Commands* (рис. 3.3). При цьому з'являється додаткове вікно із позначенням *Calculator* (рис. 3.4), після чого можна вводити вирази, значення яких потрібно обчислити. До виразів можуть входити стандартні функції та функції, визначені користувачем, в довільному поєднанні. Значення аргументів при цьому

мають бути заздалегідь визначені або вказані безпосередньо у виразі. Після введення виразу відповідне значення одразу подається в тому ж додатковому вікні *Calculator* (див. рис. 3.4).

Якщо потрібно отримати таблицю значень деякої функції, слід звернутися до підпункту *Function* пункту *Graph* і у відповідь на запит *Enter function* ввести позначення функції, наприклад $f(x)$, $v(x)$, w тощо,

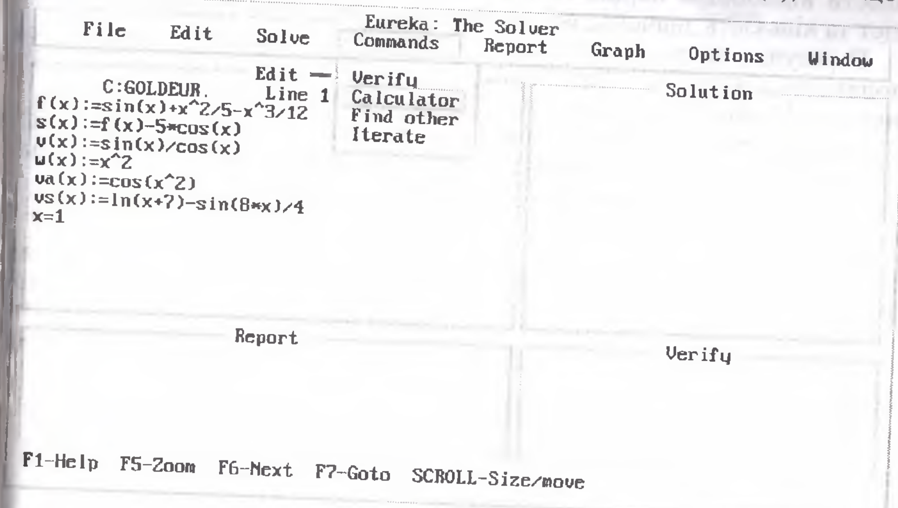


Рис. 3.3

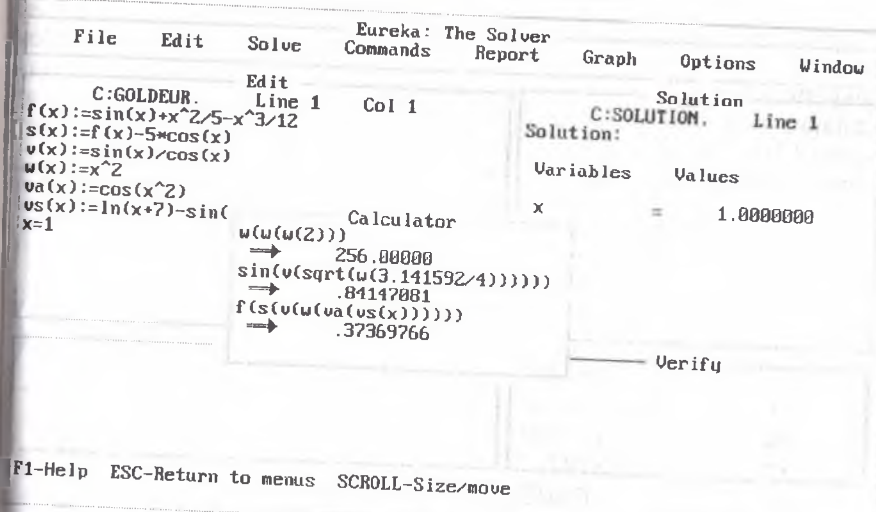


Рис. 3.4

і далі у відповідь на запит *Enter function definition* ввести вираз, який визначає правило обчислення значень функції. Далі слід звернутися до підпункту *List* пункту *Graph*.

При зверненні до підпункту *List* з'являються по черзі додаткові запити *First point*, *Increment*, *Number of values*, у відповідь на які слід ввести відповідно перше (початкове) значення аргументу, його приріст та кількість значень, які необхідно включити до таблиці.

В результаті цього в нижній частині екрана праворуч з'являється додаткове вікно *List* з таблицею значень аргументів і відповідних їм значень функції (рис. 3.5).

Інший шлях – скориставшись послугою *Edit*, ввести до вікна *Edit* визначення потрібної функції, а також вирази, в яких замість позначення аргументу вводяться його конкретні значення.

Приклади

Нехай потрібно обчислити значення функції $f(x) = \sin(x) + x^2$ для значень аргументу 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5 та значення функції $s(x) = f(x) - 5\cos(x)$ для значень аргументу 1, 2, 3.

Скориставшись послугою *Edit*, введемо визначення функцій $f(x)$ та $s(x)$:

*f(x):=sin(x)+x^2 : s(x):=f(x)–5*cos(x),*

а також вказівки (рис. 3.6):

f1 = f(0.5) : f2 = f(1) : f3 = f(1.5) : f4 = f(2)

f5 = f(2.5) : f6 = f(3) : f7 = f(3.5)

S1=S(1) : S2=S(2) : S3=S(3).

При цьому якщо дві чи більше вказівок або визначень функцій необхідно записати в один рядок, вони відокремлюються між собою двокрапкою. Після того, як визначено функції та введено всі необхідні вказівки, слід припинити роботу з послугою *Edit*, натиснувши клавішу *Esc* чи F10, і звернутися до послуги *Solve*. В результаті цього у вікні *Solve* з'явиться повідомлення (рис. 3.6)

Solution:

Variables	*Values*
f1	*= .72942554*
f2	*= 1.8414710*
f3	*= 3.2474950*
f4	*= 4.9092974*
f5	*= 6.8484721*
f6	*= 9.1411200*
f7	*= 11.899217*
s1	*= –.86004054*
s2	*= 6.9900316*
s3	*= 14.091082*

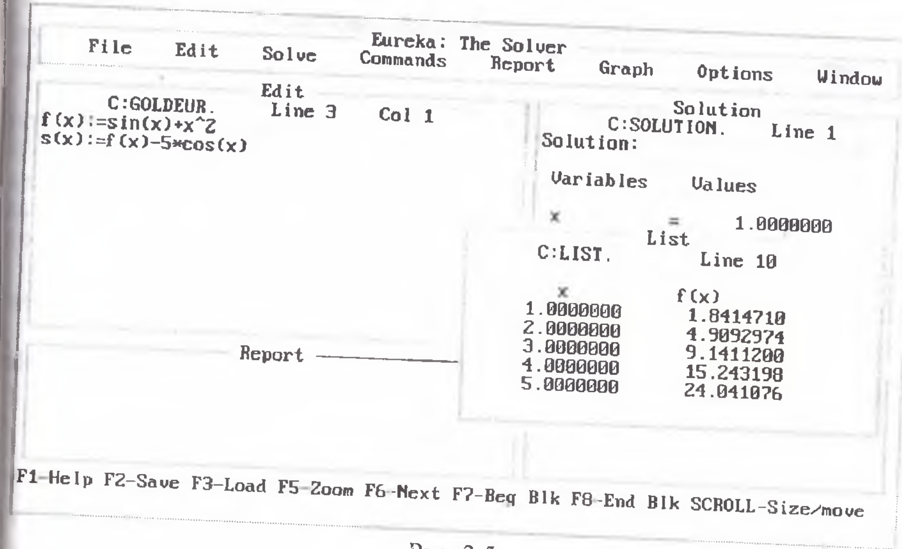


Рис. 3.5

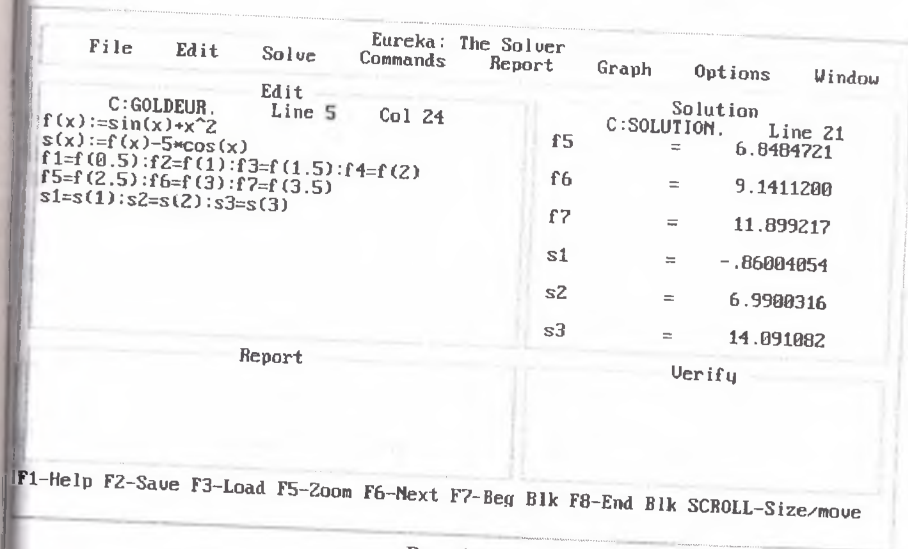


Рис. 3.6

Запитання для самоконтролю

1. Як з використанням послуг програми *EUREKA* обчислити значення деякого виразу?
2. Як з використанням послуг програми *EUREKA* отримати таблицю значень функції?
3. Як можна використати послугу *Solve* для обчислення значень функції у вказаних точках?

Вправи для самостійного виконання

Скориставшись послугами програми *EUREKA*,

а) обчислити значення виразів:

1. sin(1.2) – cos(2); sin(cos(2)); cos(sin(2)); cos(cos(cos(cos(cos(1.3)))));
2. arctg(1.5); arctg(arctg(arctg(3)));
3. arcsin(0.2); sin(arctg(4)); cos(arctg(2));
4. arccos(0.3); arccos(arcsin(0.2)); tg(arccos(–0.4));
5. $\log_{10}(2.75)$; $2^{3.7}$; $\log_2(\log_2(\log_2(143.79)))$;

б) побудувати таблиці значень функцій:

1. $y = \sin(x^2)$ на проміжку [0, 1] з кроком 0.1;
2. $y = \log_2(x^2 + x + 1)$ на проміжку [0, 20] з кроком 1;
3. $y = \sin x - x$ на проміжку [0, 0.2] з кроком 0.01;
4. $y = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$ на проміжку [0, 0.2] з кроком 0.01;
5. $y = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}\right)$ на проміжку [0, 0.5] з кроком 0.01;
6. $y = \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{7200}\right)$ на проміжку [0, 0.5] з кроком 0.01;
7. $y = \log_2(1 + x)$ на проміжку [0, 0.5] з кроком 0.01.

§ 48. Розв'язування рівнянь і систем рівнянь

При необхідності розв'язати деяке рівняння чи систему рівнянь з використанням послуг програми *EUREKA* слід звернутися до послуги *Edit* і ввести відповідне рівняння чи систему рівнянь, після чого звернутися до послуги *Solve*. В результаті цього у вікні *Solution* отримаємо один із розв'язків задачі, описаної у вікні *Edit*.

Якщо задача не має точного розв'язку або його не знайдено, подається наближений розв'язок та найменше відхилення (нев'язка) від рівностей, вказаних у задачі, яке отримується при підставлянні такого наближеного розв'язку до розглядуваних рівнянь.

Для перевірки розв'язку, поданого у вікні *Solution*, використовується послуга *Verify* пункту *Commands*.

При зверненні до цієї послуги всі знайдені значення змінних підставляються у рівняння і нерівності, подані у вікні *Edit*, після чого виводяться різниці (нев'язки) між лівими та правими частинами рівнянь і нерівностей.

Результати перевірки подаються у вікні *Verify*.

При зверненні до підпункту *Find other* пункту *Commands* відшукується розв'язок, відмінний від поданого у вікні *Solution*, і якщо він є, подається в цьому ж вікні *Solution*. Одночасно подається один розв'язок.

При зверненні до підпункту *Iterate* пункту *Commands* продовжується пошук розв'язку, починаючи від точки, в якій було припинено попередній пошук.

При формулюванні задач локально (лише на час розв'язування даної задачі) можуть бути встановлені деякі установки (параметри, вказувані у підпункті *Settings* пункту *Options*). В такому випадку перед введенням рівнянь, нерівностей та інших обмежень на значення шуканих величин слід також ввести директиви відносно установок, що подаються у вигляді, наприклад

$ complex = yes

чи

$ complex = no

або у вигляді

$ settings
accuracy = .00000000001
digits = 9
$ end

і т.п. (див. підпункт *Settings* пункту *Options*, а також *Help*).

Приклади

1. Якщо, скориставшись послугою *Edit*, ввести рівняння *x^2 – 5 * x + 6 = 0*, після чого звернутися до послуги *Solve*, у вікні *Solution* з'являється повідомлення

Solution
Variables *Values*
x *= 3.0000000.*

Якщо далі звернутися до послуги *Find other* (знайти інший розв'язок), з'являється повідомлення (рис. 3.7):

Solution
Variables *Values*
x *= 2.0000000.*

Слід мати на увазі, що не всяке рівняння *Eureka* розв'язує коректно, якщо не вказати деякі додаткові умови.

2. Якщо, скориставшись послугою *Edit*, ввести рівняння *exp(x) – x^3 – 2 = 0* і потім звернутися до послуги *Solve*, з'являється повідомлення

Solution
Variables *Values*
x *= 38448.098,*

хоч наведене значення змінної *x* не є розв'язком вказаного рівняння, в чому можна пересвідчитись, звернувшись до підпункту *Verify* (перевірити) пункту *Commands*. В результаті цього у вікні *Verify* з'являється повідомлення (рис. 3.8):

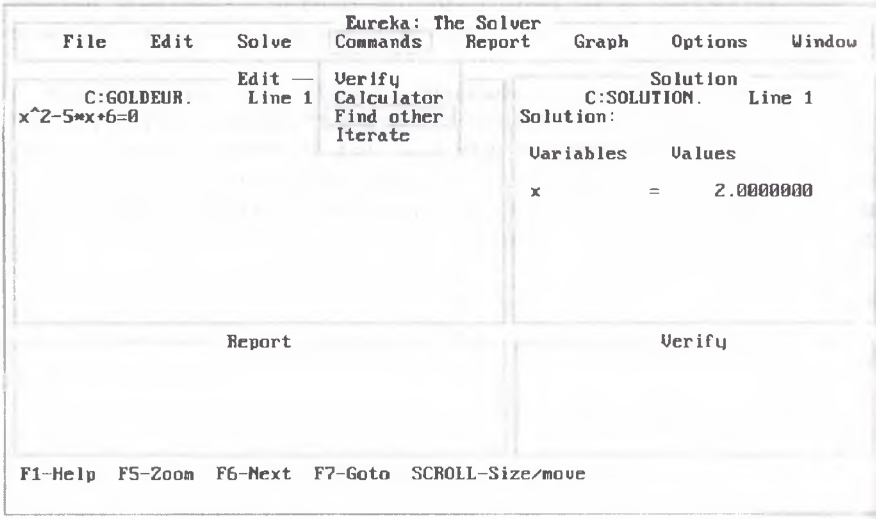


Рис. 3.7

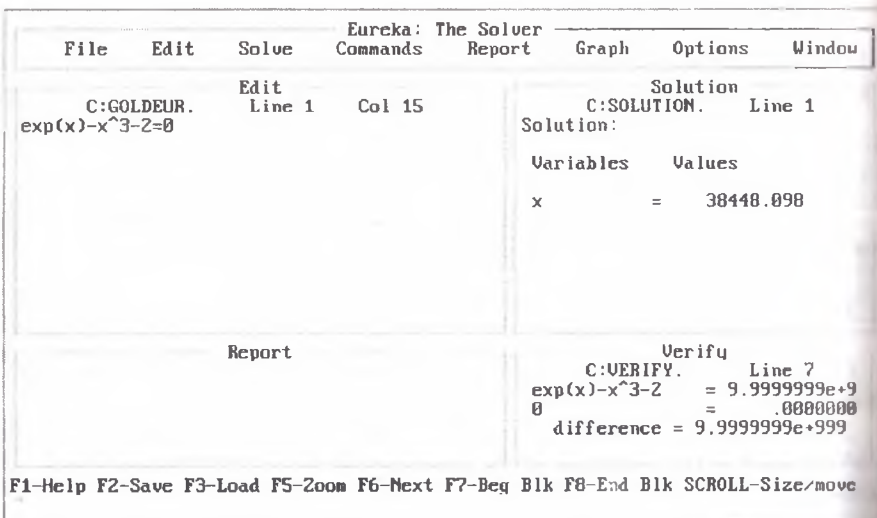


Рис. 3.8

Evaluation of formulas:

Formulas	*Values*
exp(x)-x^3-2	*= 9.9999999e+999*
0	*= .0000000*
difference	*= 9.9999999e+999.*

Разом з тим графічне дослідження показує (рис. 3.9), що вказане рівняння має два дійсні розв'язки: $x_1 \approx -1.2$, $x_2 \approx 4.6$. Щоб отримати ці розв'язки за допомогою програми *EUREKA*, слід вказати початкове наближення, з якого програма продовжить уточнювати розв'язок. Для цього слід до вікна *Edit* ввести додаткову інформацію у вигляді *x:= a*, де *a* – початкове наближення розв'язку.

Наприклад, якщо до вікна *Edit* введено *exp(x) – x^3 – 2 = 0 : x:= –2*, то за командою *Solve* отримується *x*= –1.1926858. Перевірка за допомогою послуги *Verify* при цьому дає (рис. 3.10):

Evaluation of formulas:

Formulas	*Values*
exp(x) – x^3 – 2	*= .0000000*
0	*= .0000000*
difference	*= .0000000*
x	*=–1.1926858.*

Той же розв'язок отримаємо і у випадку, коли за початкове наближення взяти –1.

Якщо ж за початкове наближення вибрати 0, то при зверненні до послуги *Solve* отримаємо *x*= –102819.62. Перевірка з використанням послуги *Verify* показує, що останнє значення змінної *x* не є розв'язком досліджуваного рівняння.

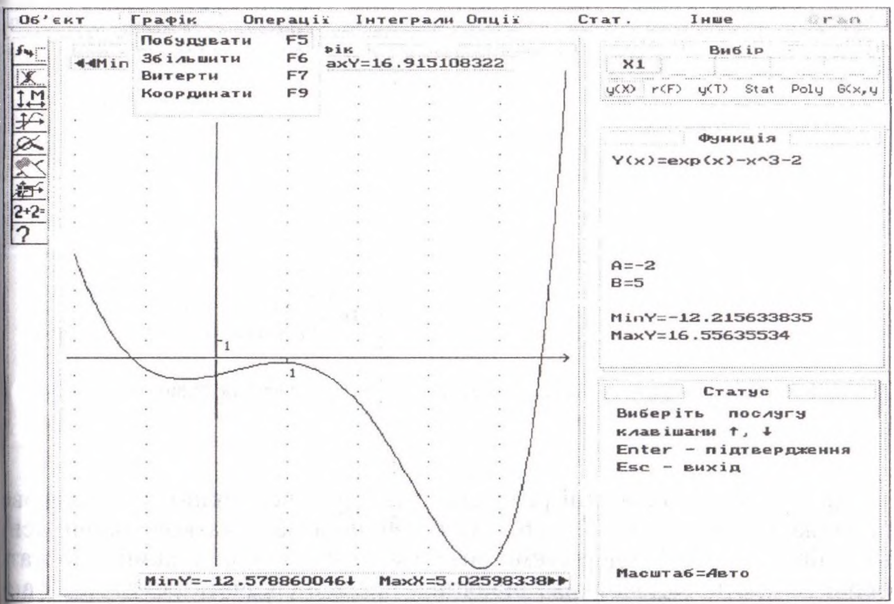


Рис. 3.9

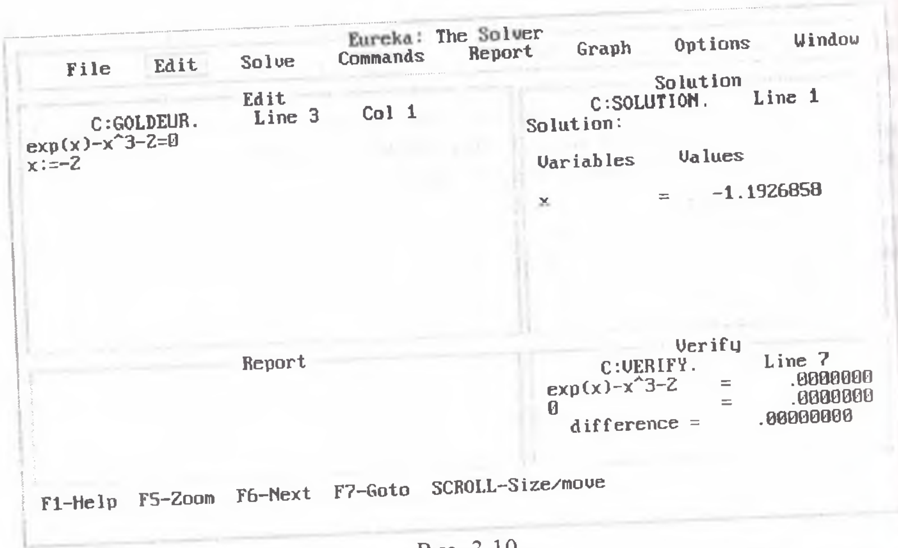


Рис. 3.10

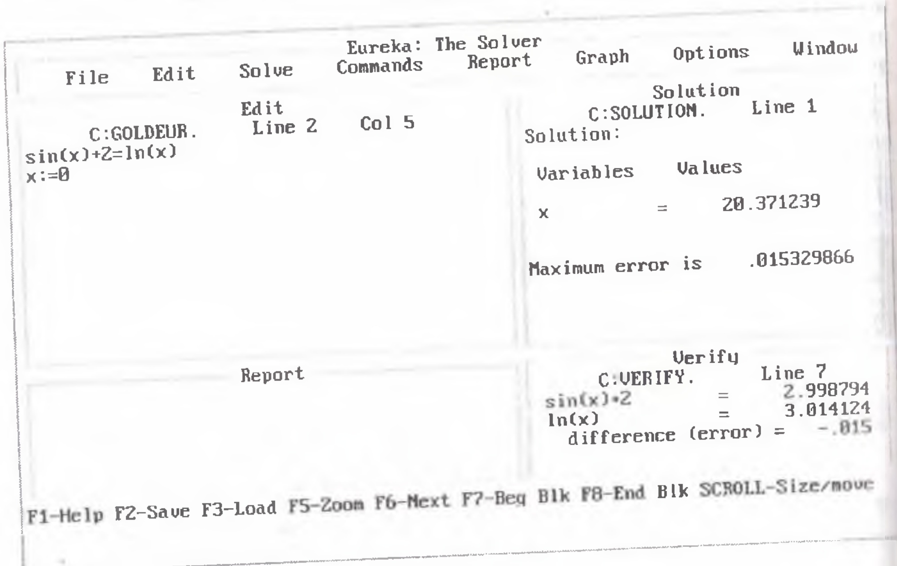


Рис. 3.11

Аналогічно некоректні розв'язки отримуються, якщо за початкове наближення вибрати 1, 2, 3, 6, 7 та ін. Якщо ж за початкове наближення вибрати 4 або 5, одержуємо розв'язок $x = 4.5958636$, який з достатньою точністю задовольняє рівняння, про що свідчать результати виконання послуги *Verify*.

3. Нехай потрібно розв'язати рівняння $\sin(x) + 2 = \ln(x)$. Надаючи початковому наближенню x значень 0, 1, 2, 3,…, 43 одержимо різні наближені розв'язки з похибками від 10^{-16} до 0.8 (рис. 3.11).

Аналіз графіка функції $f(x) = \sin(x) + 2 - \ln(x)$ показує, що рівняння $\sin(x) + 2 - \ln(x) = 0$ має 5 розв'язків (рис. 3.12):

$x_1 \approx 3.85,\ x_2 \approx 6.08,\ x_3 \approx 9.20,\ x_4 \approx 13.18,\ x_5 \approx 14.93.$

Інших дійсних розв'язків не існує, хоч графік функції $f(x) = \sin(x) + 2 - \ln(x)$ при $x_6 = 20.37$ досить близько проходить біля осі Ox і розглядувана функція в цій точці набуває значення $f(x_6) = -0.015$, близького до нуля. Тому якщо точність обчислень невелика, може здатися, що точка $x_6 = 20.37$ також є розв'язком розглядуваного рівняння.

Аналізуючи результати, отримані за допомогою програми *EUREKA*, можна з'ясувати роль, яку відіграє початкове наближення для отримання того чи іншого розв'язку рівняння, а також роль графічних побудов для отримання чітких висновків про розв'язки задачі.

4. Нехай потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = \dfrac{1}{5x}. \end{cases}$$

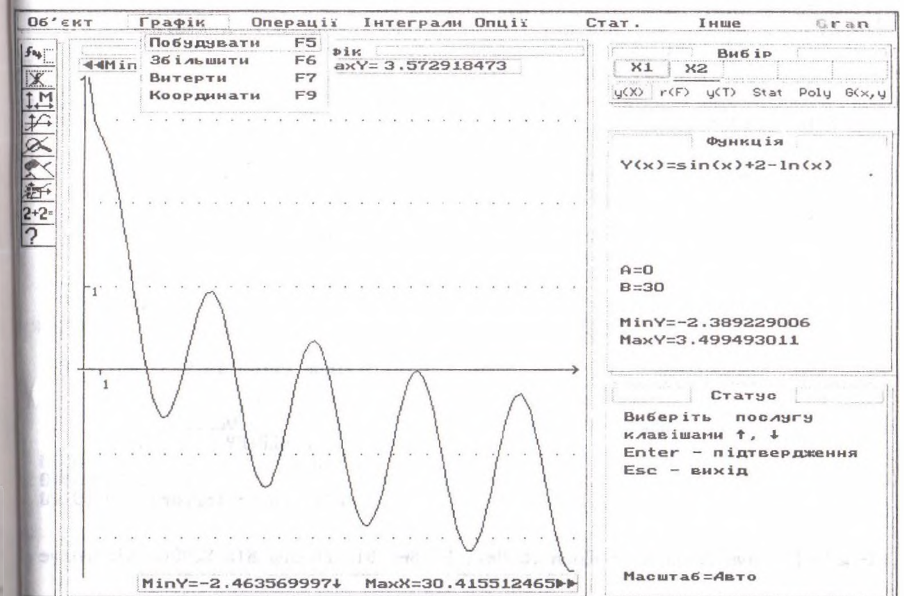


Рис. 3.12

Графічний аналіз показує, що вказана система рівнянь має чотири розв'язки

$x_1 = 0.97,\quad y_1 = 0.20;\qquad x_2 = 0.20,\quad y_2 = 0.97;$

$x_3 = -0.97,\quad y_3 = -0.20;\qquad x_4 = -0.20,\quad y_4 = -0.97.$

Якщо ввести до вікна *Edit* вказані рівняння і далі скористатися послугою *Solve*, не вказавши ніякого початкового наближення до розв'язку, у вікні *Solution* з'явиться повідомлення

Solution:

Variables *Values*

x = *.97890631*

y = *.20430964*

maximum error is 7.6383344e–14,

тобто програма знаходить один із можливих розв'язків вказаної системи рівнянь (рис. 3.13). Звернення до послуги *Find other* не дає нових результатів.

Якщо ж вказати початкове наближення $x:= 0$, $y:= 1$, одержуємо: $x = 0.20430964$, $y = 0.97890631$.

Якщо вказати початкове наближення $x:= -1$, $y:= 0$, одержимо: $x = -0.97890631$, $y = -0.20430964$.

Якщо вказати $x:= -0.1$, $y:= -1$, то $x = -0.20430964$, $y = -0.97890631$.

5. Розв'язати систему рівнянь

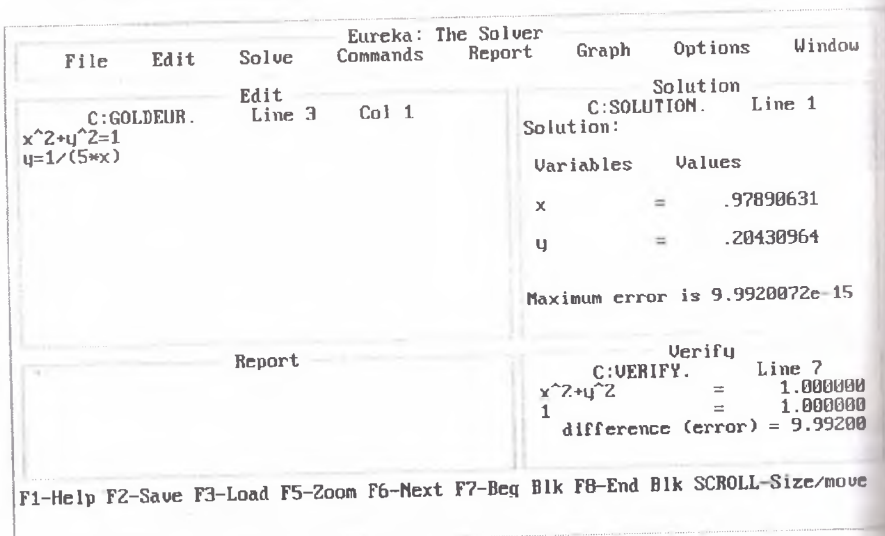


Рис. 3.13

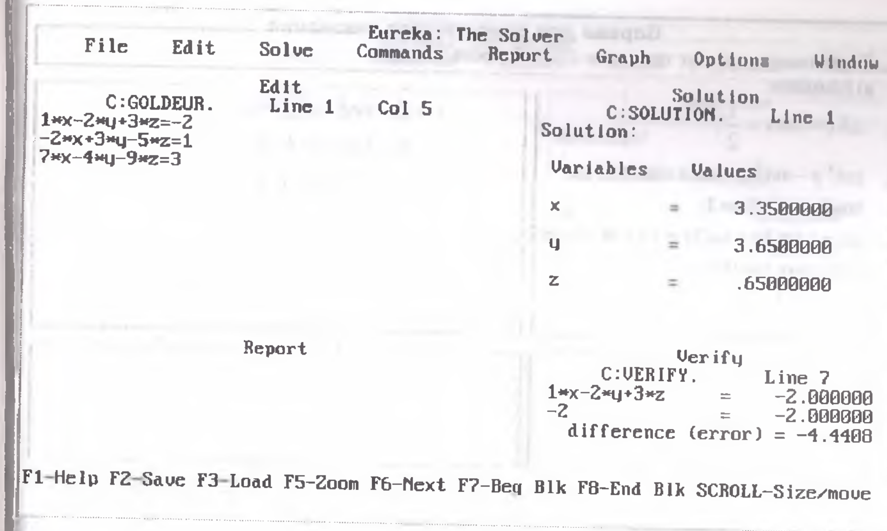


Рис. 3.14

$$\begin{cases} 1x - 2y + 3z = -2, \\ -2x + 3y - 5z = 1, \\ 7x - 4y - 9z = 3. \end{cases}$$

Скориставшись послугою *Edit*, введемо вказані рівняння до вікна *Edit*, і далі звернемось до послуги *Solve*. В результаті цього до вікна *Solution* виводяться:

Solution

Variables *Values*

x = *3.3500000*

y = *3.6500000*

z = *0.65000000*.

Як показує перевірка, наведені значення змінних *x*, *y*, *z* задовольняють всі рівняння вказаної системи рівнянь (рис. 3.14).

Запитання для самоконтролю

1. Як з використанням послуг програми *EUREKA* розв'язати: рівняння виду $f(x) = 0$? $f_1(x) = f_2(x)$? Систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими? Систему двох нелінійних рівнянь з двома невідомими?
2. Як перевірити, задовольняє чи ні знайдений наближений розв'язок задані рівняння?
3. Скільки розв'язків одночасно виводиться до вікна *Solution*, якщо їх кілька?
4. Для чого використовується послуга *Iterate* пункту *Commands*?
5. Як встановити деякі обмеження на параметри задачі на час її розв'язування?
6. Чи всяке рівняння *EUREKA* розв'язує коректно?
7. Як вказати початкове наближення, в околі якого слід шукати розв'язок задачі?

Вправи для самостійного виконання

За допомогою послуг програми *EUREKA* розв'язати

а) рівняння:

1. $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$;
2. $\cos^4 x - \sin^4 x = \sin x \cos x$;
3. $\cos 2x + \sin 2x = 1$;
4. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$;
5. $\sin^2 x + 3 = 4\sin x$;
6. $\log_2 x = 4 - x^2$;
7. $2^x = \sin(x^2)$.

б) систему рівнянь:

1. $\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 3; \end{cases}$
2. $\begin{cases} x - y = 2, \\ -x + y = 7; \end{cases}$
3. $\begin{cases} x^2 + y = 4, \\ \ln|xy| = 1; \end{cases}$
4. $\begin{cases} \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 4, \\ 2^x - y = 0; \end{cases}$
5. $\begin{cases} x + y = 3, \\ -2x - 4y = -6; \end{cases}$
6. $\begin{cases} \sin(xy) = 0.5, \\ x + y^2 = -1. \end{cases}$

§ 49. Розв'язування нерівностей і систем нерівностей

При необхідності одержати один із розв'язків нерівності чи системи нерівностей відповідні обмеження на змінні вводяться аналогічно, як і рівняння та системи рівнянь, з тією лише різницею, що (не обов'язково всі) знаки рівностей замінюються знаками (строгих чи нестрогих) нерівностей.

Слід мати на увазі, що *EUREKA* не повідомляє, має система рівнянь чи нерівностей дійсний розв'язок, чи не має. Наприклад, якщо ввести до вікна *Edit* нерівності

$x \geq 1 \quad : \quad x \leq 0$

і дати вказівку *Solve*, у вікні *Solution* з'являється повідомлення

Solution

Variables *Values*

x *= 1.0000000*

maximum error is 1.0000000,

а коли до вікна *Edit* ввести систему рівнянь

$$\begin{cases} y = x + 1, \\ y = x + 2 \end{cases}$$

і дати вказівку *Solve*, у вікні *Solution* з'являється повідомлення

Solution

Variables *Values*

x *= .94593949*

y *= 1.9459395*

maximum error is 1.0000000,

хоч вказані системи нерівностей і рівнянь не мають розв'язків.

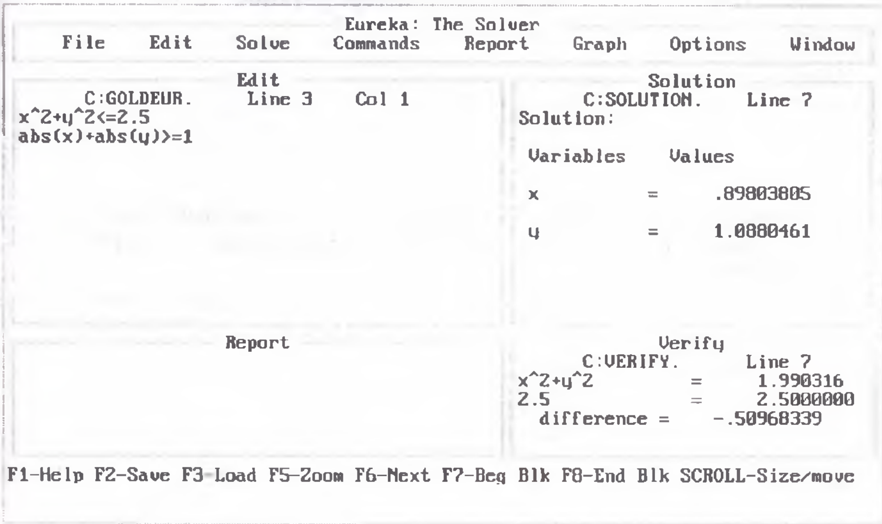


Рис. 3.15

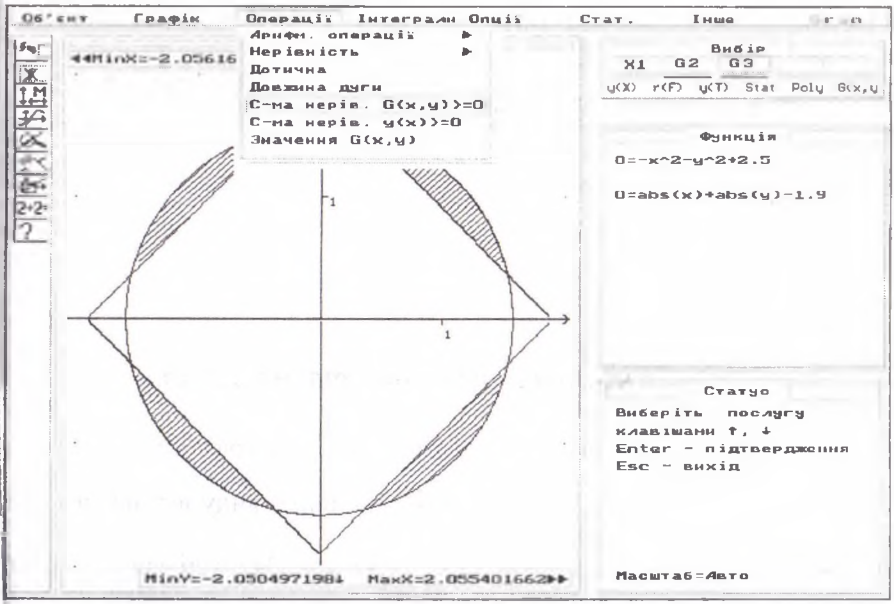


Рис. 3.16

Таким чином, необхідно аналізувати результати, отримані за програмою, враховуючи подані похибки, виконавши відповідні графічні побудови тощо, і давати відповідну інтерпретацію та пояснення результатів.

Приклад

Знайти розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 2.5, \\ |x| + |y| \ge 1.9. \end{cases}$$

Після введення з використанням послуги *Edit* вказаних нерівностей та звернення до послуги *Solution* одержуємо $x = 0.89805913$, $y = 1.0883485$ (рис. 3.15).

Звернувшись до послуги *Find other*, можна знайти і деякі інші розв'язки вказаної системи нерівностей. Множину всіх розв'язків цієї системи подано на рис. 3.16.

Запитання для самоконтролю

1. З використанням яких послуг програми *EUREKA* можна отримати розв'язок системи нерівностей?
2. Яке повідомлення видається в разі, якщо система нерівностей несумісна?
3. Як з використанням послуг програми *EUREKA* переконатися, що система нерівностей несумісна?

Вправи для самостійного виконання

Використовуючи послуги програми *EUREKA*, знайти розв'язки вказаних нерівностей і систем нерівностей:

1. $\dfrac{1}{\log_{1/2}(x-1)} \le -1;$
2. $2\log_{\log_3 x} 3 \le 1;$
3. $\dfrac{1}{x^2 - 6x + 5} \ge -\dfrac{1}{3};$
4. $\dfrac{\log_5(x+1)}{\log_{1/5}(x-1)} \le 0;$
5. $\log_{1/2}(4 - |x|) \ge 4;$
6. $\left|\dfrac{1}{\log_{1/2}(||x-3|-4|)}\right| \ge 2;$
7. $\begin{cases} |x|^{1/2} + |y|^{1/2} \le 1, \\ |x| + |y| \ge \dfrac{1}{2}; \end{cases}$
8. $\begin{cases} |x|^{20} + |y|^{20} \le 1, \\ |xy| \ge 1; \end{cases}$
9. $\begin{cases} \sin(\mathrm{abs}(x) + \mathrm{abs}(y)) \le 0, \\ xy \le 1; \end{cases}$
10. $\begin{cases} x + y \ge 3, \\ 2x - 3y \ge -6, \\ -3x + 2y \ge -6. \end{cases}$

§ 50. Обчислення похідних та інтегралів

При необхідності обчислити визначений інтеграл виду $\int_a^b f(x)dx$ слід, скориставшись послугою *Edit*, ввести вираз виду w = integ($f(x)$, x, a, b) і звернутися до послуги *Solve*.

Наприклад, якщо ввести v = integ(sin(x), x, 0, 3) і далі звернутися до послуги *Solve*, отримаємо $v = 1.9899925$, а для w = integ(sin(x^2), x, −1, 3) отримаємо $w = 1.0838308$ (рис. 3.17).

Підінтегральна функція може бути визначена заздалегідь.

Наприклад, якщо до вікна *Edit* ввести

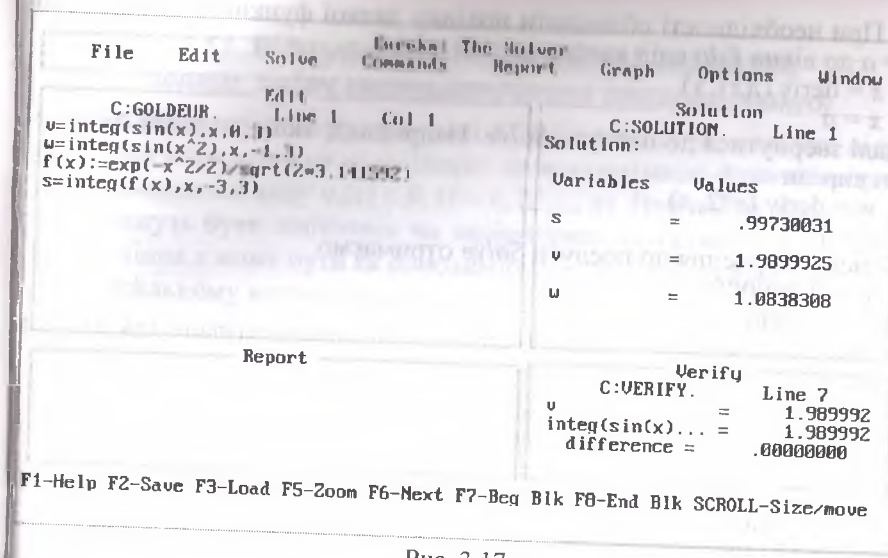


Рис. 3.17

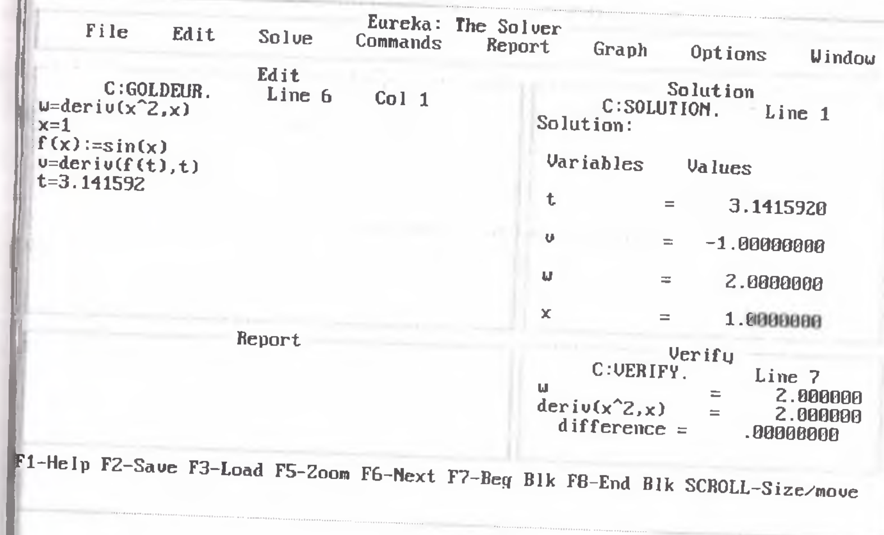


Рис. 3.18

$f(x)$:= exp(−x^2/2) / sqrt(2*3.141592)

s = integ($f(x)$, x, −3, 3),

о після звернення до послуги *Solve* одержимо (рис. 3.17) = 0.99730031.

При необхідності обчислити похідну деякої функції в деякій точці $x = a$ до вікна *Edit* слід ввести вирази виду

$s = \mathrm{deriv}\ (f(x), x)$

$x = a$

і далі звернутися до послуги *Solve*. Наприклад, якщо до вікна *Edit* ввести вирази

$w = \mathrm{deriv}\ (x\verb|^|2, x)$

$x = 1$,

то після звернення до послуги *Solve* отримаємо

$w = 2.0000000$

$x = 1.0000000$.

Як і раніше, функція $f(x)$ може бути визначена заздалегідь. Наприклад, якщо до вікна *Edit* ввести

$f(x) := \sin(x)$

$v = \mathrm{deriv}\ (f(t), t)$

$t = 3.141592$,

то після звернення до послуги *Solve* одержимо (рис. 3.18)

$v = -1.0000000$

$t = 3.1415920$.

Запитання для самоконтролю

1. Як з використанням послуг програми *EUREKA* обчислити визначений інтеграл виду $\int_a^b f(x)dx$?
2. Чи можна з використанням послуг програми *EUREKA* знайти первісну для функції $f(x)$?
3. Як з використанням послуг програми *EUREKA* обчислити значення похідної заданої функції в заданій точці?
4. Чи можна з використанням послуг програми *EUREKA* знайти аналітичний вираз похідної від заданої функції?

Вправи для самостійного виконання

Скориставшись послугами програми *EUREKA*,

а) обчислити значення похідних заданих функцій у вказаних точках:

1. $y = \cos(\sin(x)),\ x = 1;$
2. $y = \sin^{\cos x} x,\ x = 2.5;$
3. $y = \sin(\sin(\sin(\sin(\sin(x))))),\ x = 0.7;$
4. $y = (|3 - x|\sin(2x))^{\ln(5-x)},\ x = 1;$
5. $y = \log_2(\log_3(\log_5(x))),\ x = 247;$
6. $y = x^{x^x},\ x = 3;$

б) обчислити значення визначених інтегралів:

1. $\int_1^2 \sin(x^2 + 2x + 2)dx;$
2. $\int_0^1 2^{-x^2} dx;$
3. $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx;$
4. $\int_0^4 \sqrt{1 + x + x^2 + x^3 + x^4}\, dx;$
5. $\int_{-3}^2 (\cos(\sin(x)) + \sin(\cos(x)))dx;$
6. $\int_{-4}^5 |3 - |x^2 - 5x + 6||\frac{dx}{x}.$

§ 51. Відшукання оптимальних розв'язків деяких задач математичного програмування

Використання послуг програми *EUREKA* надає можливість відшукати розв'язки задач на мінімізацію чи максимізацію функції виду $f(x)$ при обмеженнях виду $\varphi_i(x) \le 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. При цьому функції $f(x)$, $\varphi_i(x)$ можуть бути лінійними чи нелінійними, опуклими чи неопуклими, а змінна x може бути як одновимірною, так і багатовимірною.

У загальному випадку задачу виду

$$\min_{x \in G} f(x), \quad G = \left\{x\colon\ \varphi_i(x) \le 0,\ \ i = \overline{1,n}\right\}$$

називають задачею математичного програмування.

Якщо функції $f(x)$, $\varphi_i(x)$ опуклі (донизу), тоді таку задачу називають задачею опуклого програмування, а якщо лінійні – задачею лінійного програмування.

Точку $x^* \in G$, в якій досягається $\min\limits_{x \in G} f(x)$, називають оптимальною точкою або оптимальним розв'язком вказаної задачі математичного програмування, а значення $f(x^*)$ – оптимальним значенням функції $f(x)$ на множині G.

Якщо при зверненні до послуги *Edit* введено директиву типу

$ max(y),

тоді буде максимізуватися значення змінної y, вказаної в дужках.

Якщо деяку змінну, наприклад F, необхідно мінімізувати чи максимізувати при обмеженнях на параметри, від яких залежить змінна, слід подати відповідну директиву у вигляді

$ min(F),

вказавши, крім того, як виражається змінна F через такі параметри та які обмеження накладаються на них.

Приклади

1. Нехай потрібно розв'язати найпростішу задачу лінійного програмування: максимізувати значення змінної $v = x + y$ при обмеженнях на змінні:

$$-\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \ge 1, \quad \frac{x}{3} - \frac{y}{2} \ge -1, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0.$$

Якщо ввести до вікна *Edit* директиву про максимізацію змінної v, вираз змінної v через змінні x, y та обмеження на змінні x, y, тобто:

$ max(v)
$v = x + y$

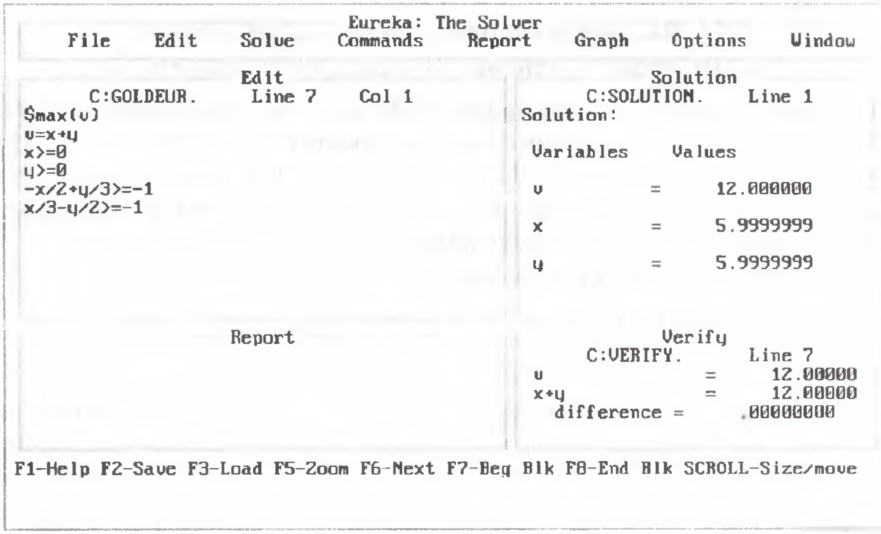


Рис. 3.19

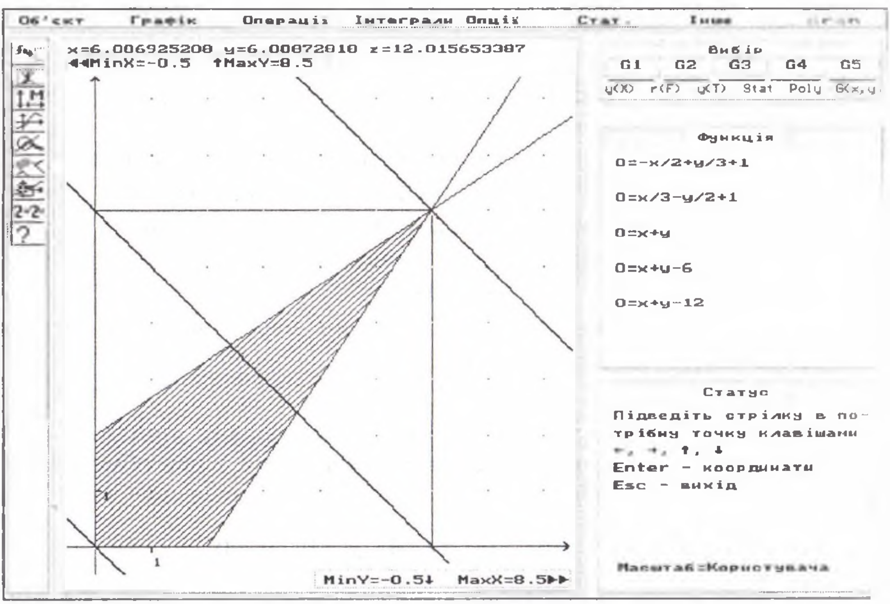


Рис. 3.20

$x >= 0$
$y >= 0$

–x/2 + y/3 >= –1

x/3 – y/2 >= –1,

то після звернення до послуги *Solve* у вікні *Solution* з'являється (рис. 3.19):

Solution

Variables	*Values*
v	*= 12.000 000*
x	*= 6.000 0000*
y	*= 6.000 0000*,

що є коректним розв'язком задачі (рис. 3.20).

2. Розглянемо таку задачу неопуклого нелінійного програмування

$ max(v)

v = x^2 + y^2

abs(x) <= 1

abs(y) <= 1.

Якщо звернутися до послуги *Solve*, не вказуючи початкових значень для змінних *x* та *y*, одержимо (рис. 3.21):

Solution

Variables	*Values*
v	*= 1.9980829*
x	*= .99952061*
y	*= .99952060*,

що є одним із розв'язків задачі (рис. 3.22).

Якщо вказати початкове наближення $x := -1$, $y := -5$, одержимо $v = 1.9980829$, $x = -.99952061$, $y = -.99952061$, що також є одним із

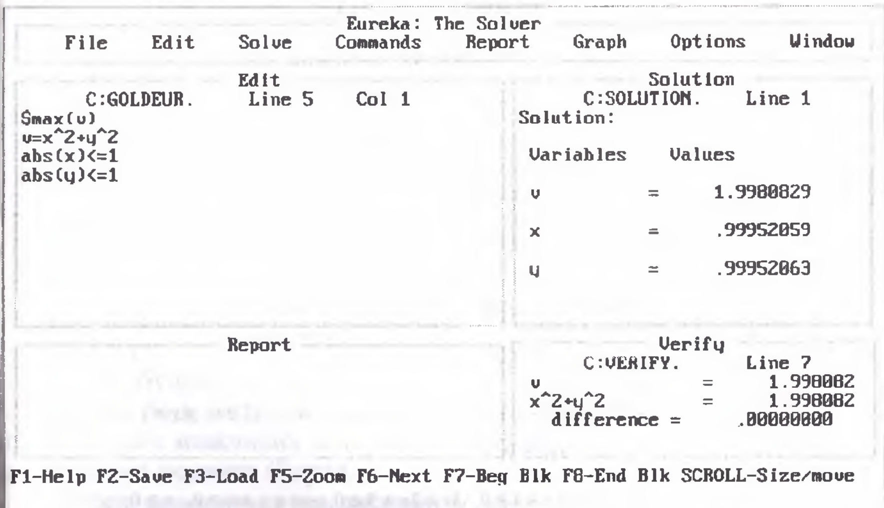


Рис. 3.21

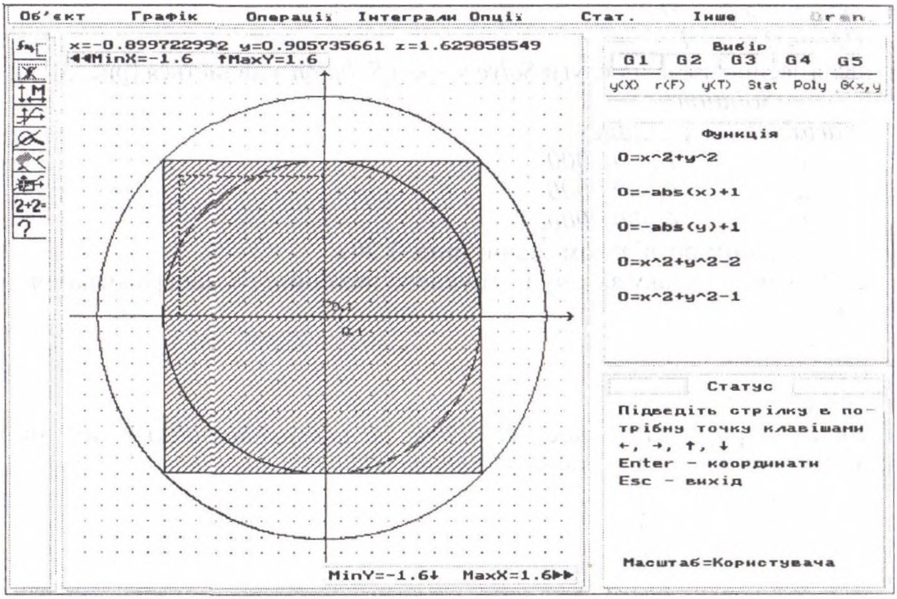


Рис. 3.22

розв'язків. Очевидно, найбільшого значення при вказаних обмеженнях на аргументи розглядувана функція досягає у всіх чотирьох вершинах квадрата

$$\{(x, y)\colon \mathrm{abs}(x) \le 1,\ \mathrm{abs}(y) \le 1\}.$$

Запитання для самоконтролю

1. Яку задачу називають: задачею математичного програмування? задачею опуклого програмування? задачею лінійного програмування?
2. Яку точку називають оптимальним розв'язком задачі математичного програмування?
3. Яке значення функції $f(x)$ називають оптимальним, якщо розглядається задача $\min\limits_{x \in G} f(x)$?
4. Як з використанням послуг програми *EUREKA* знайти: розв'язок задачі лінійного програмування? розв'язок задачі опуклого програмування? розв'язок задачі неопуклого програмування?

Вправи для самостійного виконання

Знайти оптимальні розв'язки таких задач лінійного програмування:

1. $\max\limits_{(x,y) \in G} f(x,y)$, де $f(x, y) = -x + 2y$,

   $G = \{(x,y)\colon\ x + 2y + 2 \ge 0,\ 2x + y - 4 \ge 0,\ x - y + 2 \ge 0,\ x - 4y + 13 \ge 0,\ 4x + y + 20 \ge 0\}$;

2. $\max\limits_{(x,y) \in G} f(x, y)$, де $f(x, y) = (2 - t)\,x + y$,

   $G = \{(x,y)\colon\ -2x - y + 8 \ge 0,\ x + y - 1 \ge 0,\ 3x - 2y + 3 \ge 0,\ -x + y + 4 \ge 0,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$,

   для всіх t із множини $\{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$;

3. $\max\limits_{(x,y,z)\in G}$ [illegible]

$G = \{(x, y, z):$ [illegible] $\}$,

для всіх t із множини [illegible]

4. Під посіви [illegible] культур [illegible] 4 ділянки [illegible] відповідно 2, 2, 4 та 1 га. [illegible] першої культури на кожній з ділянок [illegible] відповідно 15, 18, 12, 20 центнерів з 1 га, а другої – 40, 50, 45, 60 центнерів з 1 га. Вартість реалізації одного центнера першої культури – 40 од., а другої – 25 од. Витрати на обробіток 1 га площі під першу культуру – 20 од., під другу – 10 од. Яку площу на кожній ділянці потрібно відвести під кожну культуру, щоб отримати якомога більший прибуток, якщо першої культури потрібно зібрати не менше як 50, а другої – не менше як 150 центнерів?

Знайти оптимальні розв'язки таких задач нелінійного програмування:

1. $\min\limits_{(x,y)\in G} f(x,y)$, де $f(x,y) = xy$, $G = \{(x,y):\ |x|+|y| \le 1\}$;

2. $\min\limits_{(x,y)\in G} f(x,y)$, де $f(x,y) = |x|+|y|$, $G = \{(x,y):\ (x-5)+(y-3) \le 2\}$;

3. $\max\limits_{(x,y)\in G} f(x,y)$, де $f(x,y) = ax+by$, $G = \left\{(x,y):\ \sqrt{|x|}+\sqrt{|y|} \le 1\right\}$ для кожної пари (a, b) із множини пар $\{(4, 0), (3, 1), (1, 1), (1, 3), (0, 4), (-1, 3), (-1, 1), (-3, 1), (-4, 0), (-3, -1), (-1, -3), (0, -4)\}$.

§ 52. Побудова графіків функцій

При необхідності побудувати графік деякої функції виду $y = f(x)$ слід звернутися до пункту *Graph* головного меню.

При цьому з'являється додаткове підменю у вигляді

Plot
Output Screen
List
Function.

При зверненні до підпункту *Function* з'являється додатковий запит у вигляді *Enter function*, у відповідь на який слід ввести позначення функції.

Далі з'являється запит *Enter function definition*. У відповідь на нього слід ввести вираз, який визначає функцію. Після того, як функцію визначено, можна побудувати її графік, для чого слід звернутися до підпункту *Plot*.

При зверненні до цього підпункту з'являються по черзі додаткові запити у вигляді *Left endpoint value* та *Right endpoint value*, у відповідь на які слід ввести відповідно лівий та правий кінці проміжка, на якому бажано побудувати графік.

Графік буде виведено на екран чи на друк в залежності від того, який із двох можливих підпунктів (*Screen* чи *Printer*) буде вказано за допомогою послуги *Output*.

Графік виводиться на дисплей у додаткове вікно з назвою *Plot* в текстовому режимі (рис. 3.23). При зверненні до послуги *Zoom* (натисненням клавіші F5) графік подається в графічному режимі в додатковому графічному вікні, що розгортається на весь екран.

Якщо функції $v(x)$, $f(x)$, $s(x)$ і т.д. визначено заздалегідь у вікні *Edit* і відбулося звернення до послуги *Solve*, тоді при зверненні до підпункту *Plot* пункту *Graph* на полі вікна *Edit* з'являється перелік імен та-

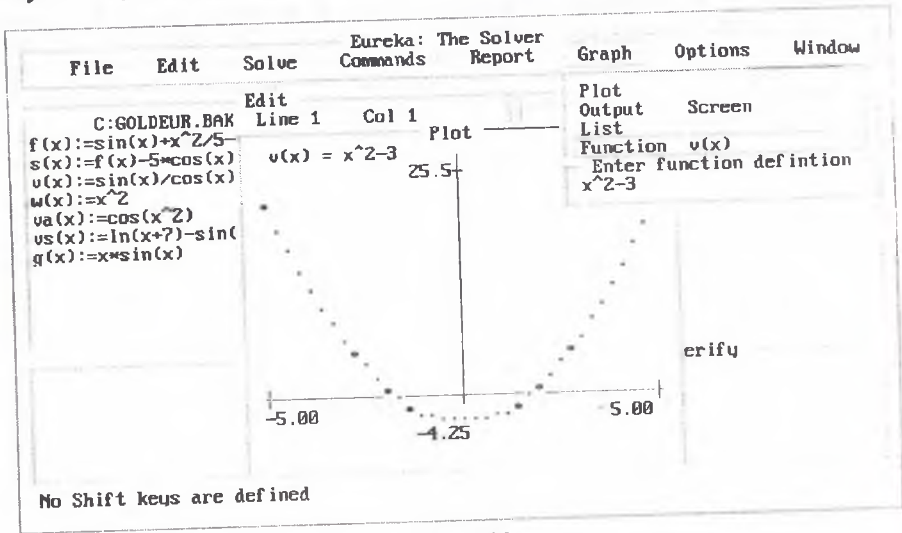


Рис. 3.23

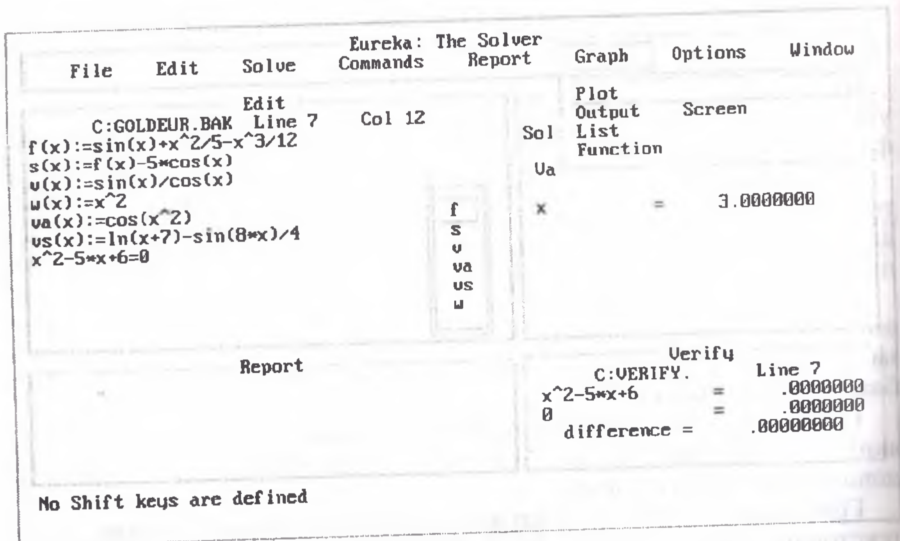


Рис. 3.24

ких функцій (рис. 3.24). Щоб побудувати графік однієї з таких функцій, потрібно (використовуючи клавіші управління курсором ↑, ↓) встановити вказівник імен функцій на ім'я функції, графік якої потрібно побудувати, і натиснути клавішу *Enter*, після чого у відповідь на запити *Left endpoint value* та *Right edpoint value* вказати ліву і праву межі проміжку, на якому змінюватиметься аргумент. В результаті цього у додатковому вікні *Plot* буде подано графік вказаної функції (рис. 3.25).

Приклади

1. Побудувати графік функції $f_1(x) = (x-1)^2 - 3$ для значень x із проміжка $[-3, 5]$.

Звернувшись до підпункту *Function* пункту *Graph*, введемо у відповідь на запит *Enter function* позначення функції, наприклад $f_1(x)$, та вираз, що визначає функцію, а саме (x – 1)^2 – 3 (у відповідь на запит *Enter function definition*). Крім того вкажемо ліву межу –3 (у відповідь на запит *Left endpoint value*) та праву межу 5 (у відповідь на запит *Right endpoint value*) проміжка, на якому задано функцію $f_1(x)$. В результаті цього на екрані з'являється додаткове вікно *Plot*, в якому (в текстовому режимі) подається графік вказаної функції (рис.3.26). Звернувшись далі до послуги *Zoom* (для чого досить натиснути клавішу F5), одержимо графік тієї ж функції, поданий у графічному режимі екрану.

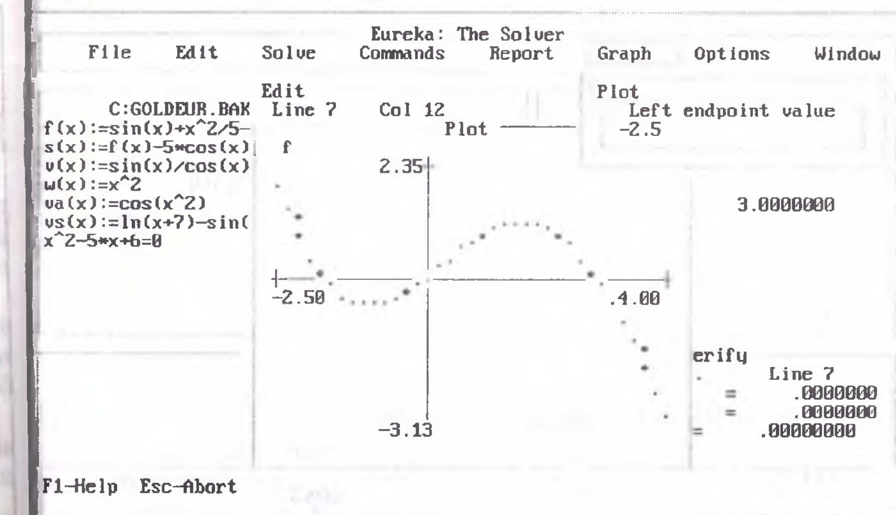


Рис. 3.25

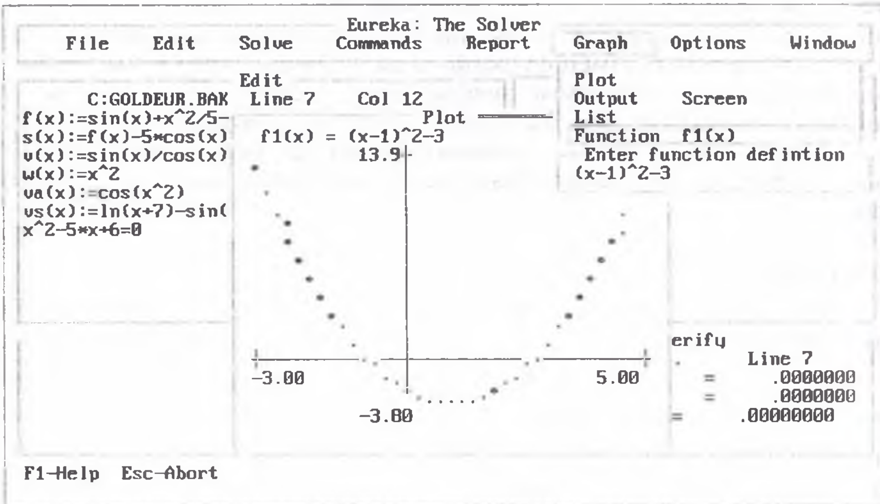


Рис. 3.26

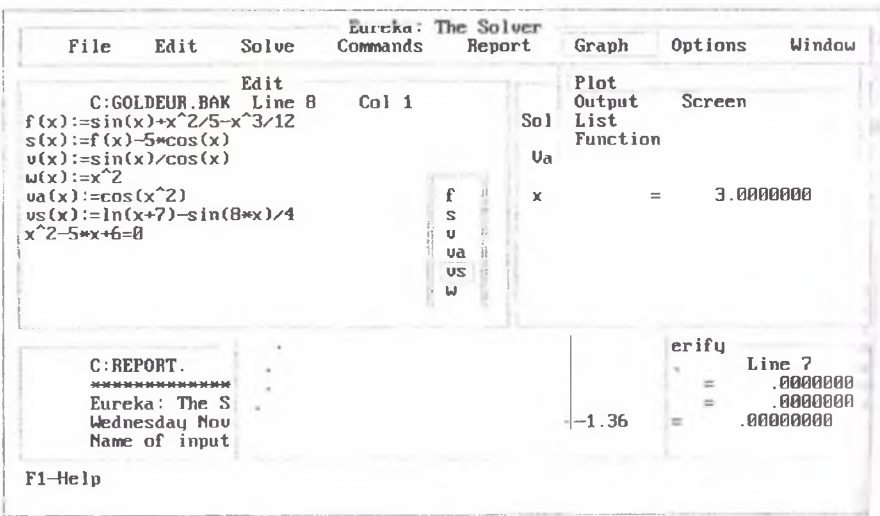


Рис. 3.27

2. Нехай до вікна *Edit* введено функції

$$f(x) := \sin x + \frac{x^2}{5} - \frac{x^3}{12}, \qquad v(x) := \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$s(x) := f(x) - 5\cos x, \qquad w(x) := x^2,$$

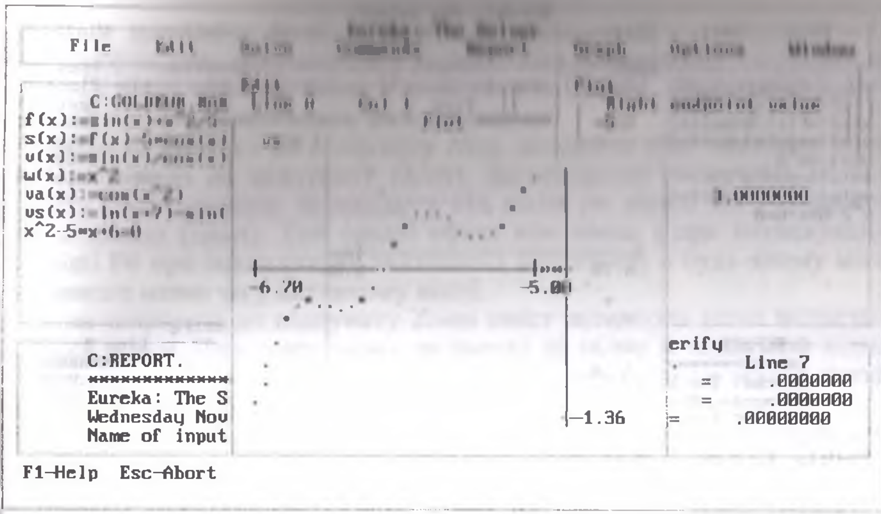


Рис. 3.28

$$va(x) := \cos(x^2), \qquad vs := \ln(x+7) - \frac{\sin(8x)}{4}.$$

Звернемось до підпункту *Plot* пункту *Graph* і у відповідь на запит *f*, *s*, *v*, *va*, *vs*, *w* (рис. 3.27), вкажемо на функцію *vs*, введемо ліву і праву межі зміни аргумента відповідно −6.7 та −5.0 і натиснемо клавішу *Enter*. В результаті цього отримаємо графік функції $vs(x)$ на проміжку [−6.7; −5] (рис. 3.28).

Вправи для самостійного виконання

Скориставшись послугами програми *EUREKA*, побудувати графіки функцій на вказаних проміжках:

1. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in [-8, 8]$;
2. $f(x) = \lg(-x)$, $x \in [-10, 10]$;
3. $f(x) = \sin(\cos(x))$, $x \in [-7, 7]$;
4. $f(x) = \cos(\sin(x))$, $x \in [-7, 7]$;
5. $f(x) = x \ln x$, $x \in [-1, 5]$;
6. $f(x) = \dfrac{1}{\log_{1/2} x}$, $x \in [-1, 5]$.

§ 53. Робота з вікнами

При роботі з програмою *EUREKA* на екрані дисплею можна розміщувати кілька вікон різних розмірів та по різному розташованих.

Якщо необхідно виконати ті чи інші операції з вікнами, слід звернутися до пункту *Window*.

При зверненні до цього пункту з'являється додаткове підменю (рис. 3.29):

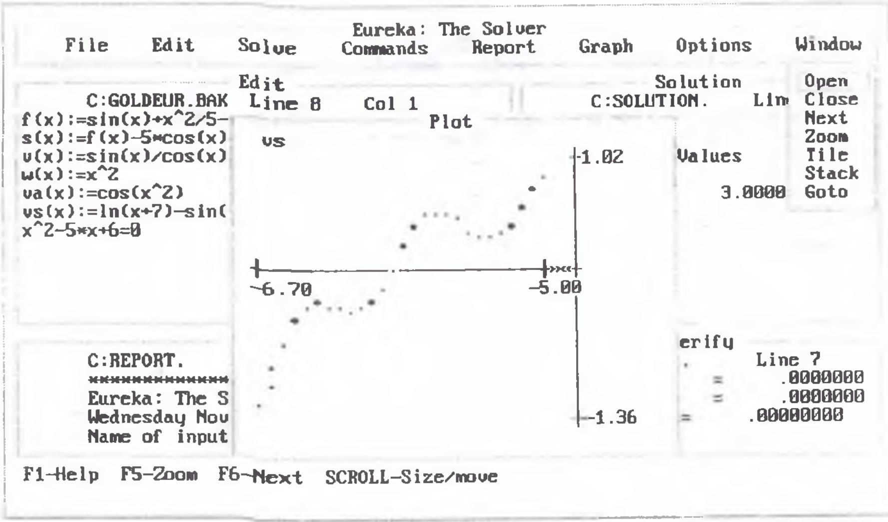


Рис. 3.29

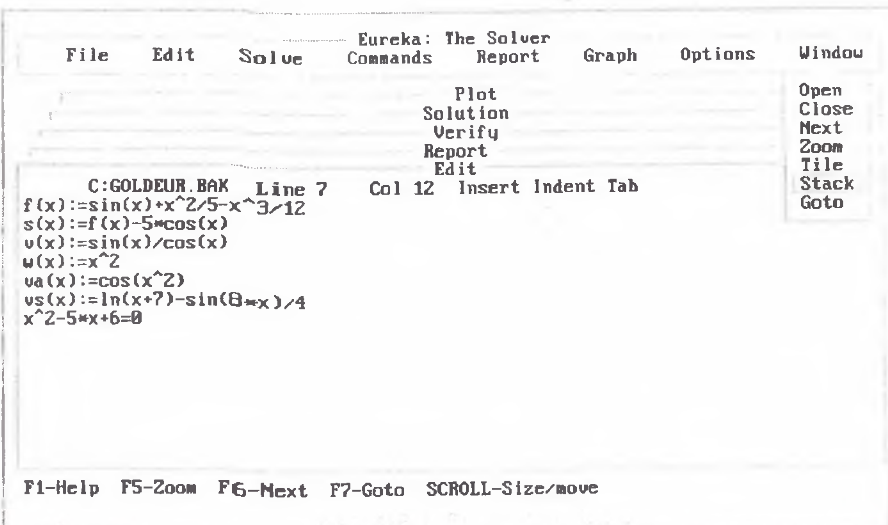


Рис. 3.30

Open, Close, Next, Zoom, Tile, Stack, Goto.

При зверненні до підпункту *Open* з'являється перелік назв вікон:

Edit, Solution, Verify, Report, Plot, List.

Якщо встановити вказівник на одну із вказаних назв, відповідне в кно стає активним (ознакою активного вікна є подвійна рамочка). П сля цього всі інші команди щодо вікон поширюються лише на активне вікно.

Після звернення до підпункту *Close* активне вікно закривається і його зображення вилучається з екрану. При повторному зверненні до послуги *Open* це вікно знову з'являється на екрані, причому інформація, яка в ньому зберігалася, не втрачається.

Якщо звернутися до підпункту *Next*, активним стає наступне вікно (без звернення до підпункту *Open*). Багатократне звернення до підпункту *Next* дозволяє переходити від вікна до вікна, які утворюють деяке кільце (цикл). Той самий ефект має місце і при натискуванні клавіші F6 при знаходженні вказівника активності в будь-якому місці головного меню чи у активному вікні.

При зверненні до підпункту *Zoom* вміст активного вікна подається на весь екран. При повторному зверненні до цього ж підпункту відновлюється попередній стан екрану. Той же ефект досягається натисненням клавіші F5.

При зверненні до підпункту *Till* всі відкриті вікна розміщуються на екрані і мають однакові розміри.

При зверненні до підпункту *Stack* всі відкриті вікна у збільшених розмірах розташовуються на екрані у вигляді набору поставлених одна за однією карток (стеку). Перегляд вікон та інші операції над вікнами при цьому виконуються цілком аналогічно до попереднього (рис. 3.30).

При зверненні до підпункту *Goto* відбувається перехід до активного вікна.

Запитання для самоконтролю

1. Які послуги програми *EUREKA* використовуються при необхідності змінити розміри та розташування вікна на екрані?
2. Як використати весь екран для одного вікна?
3. Як розташувати вікна у вигляді поставлених одна за однією карток?
4. Як переглянути вміст вікна, що розташоване третім у стекові?
5. Як перейти до активного вікна?

Вправи для самостійного виконання

1. Розташувати одночасно на екрані всі 6 вікон (*Edit*, *Solution*, *Verify*, *Report*, *Plot*, *List*) однакових розмірів.
2. Розташувати на екрані лише 2 вікна: *Edit* і *Solution*, причому кожне з них має займати половину екрану.
3. Розташувати всі 6 вікон *Edit*, *Solution*, *Verify*, *Report*, *Plot*, *List* у вигляді стеку.
4. Закрити вікна *Verify*, *Report*, *List*.
5. Зробити активним вікно: а) *Solution*; б) *Edit*; в) *Plot*.

§ 54. Робота з файлами

Для забезпечення виконання операцій над файлами призначено пункт *File*. При зверненні до пункту *File* з'являється додаткове меню (див. рис. 3.2):

Load, New, Save, Write to..., Directory, Change dir,
Rename, OS shell, Quit.

Підпункт *Load* використовується в разі необхідності завантажити до буфера, пов'язаного з вікном *Edit*, вміст деякого файла. При зверненні до цього підпункту з'являється додатковий запит у вигляді

Load File Name
. ,

у відповідь на який слід ввести бажане ім'я файла. При цьому слід уникати таких розширень імен файлів, як *.EXE*, *.BAK*, *.COM*, *.BAT*. Якщо ніяке ім'я файла не вводити, а просто натиснути *Enter* або ввести символ * чи вилучити всі символи і натиснути *Enter*, на екрані з'явиться активний піддиректорій *EUREKA* (рис. 3.31). Якщо ввести символ ? (чи ?.?), з'явиться позначення кореня каталогу на робочому дискові, вхід до якого дає можливість переглянути перелік всіх піддиректоріїв на даному дискові (проте ввійти в будь який піддиректорій в такий спосіб неможливо).

Якщо в піддиректорії вказівник імен встановити на пункт ..\ і натиснути *Enter*, відбувається перехід до директорію вищого рівня, в якому можна побачити перелік піддиректоріїв на даному дискові і ввійти до будь-якого з них, як звичайно.

Якщо у вибраному піддиректорії вказівник імен файлів встановити на деяке ім'я і натиснути клавішу *Enter*, вміст цього файла буде завантажено в спеціальний буфер і відображено у вікні *Edit* на екрані. Далі цей файл можна редагувати, давати вказівки про знаходження розв'язків вказаних тут задач тощо.

При зверненні до підпункту *New* до вікна *Edit* завантажується файл *Noname*. Якщо текст в буфері вікна *Edit* не було завчасно збережено, з'являється повідомлення:

NONAME not saved. Save? (Y/N) Press Esc to cancel.

Якщо текст необхідно зберегти, слід відповісти *Yes* (натиснувши клавішу з літерою *Y*) і далі у відповідь на запит *File Name* вказати бажане ім'я файла. Якщо відповісти *No* (натиснувши клавішу з літерою *N*), інформація, що відображається у вікні *Edit*, втрачається. Якщо натиснути клавішу *Esc*, операція *New* скасовується.

Підпункт *Save* призначено для використання при необхідності зберегти у робочому файлі інформацію, що є у активному вікні. При зверненні до цього підпункту з'являється додатковий запит у вигляді *File Name*, у відповідь на який слід ввести бажане ім'я файла. Якщо

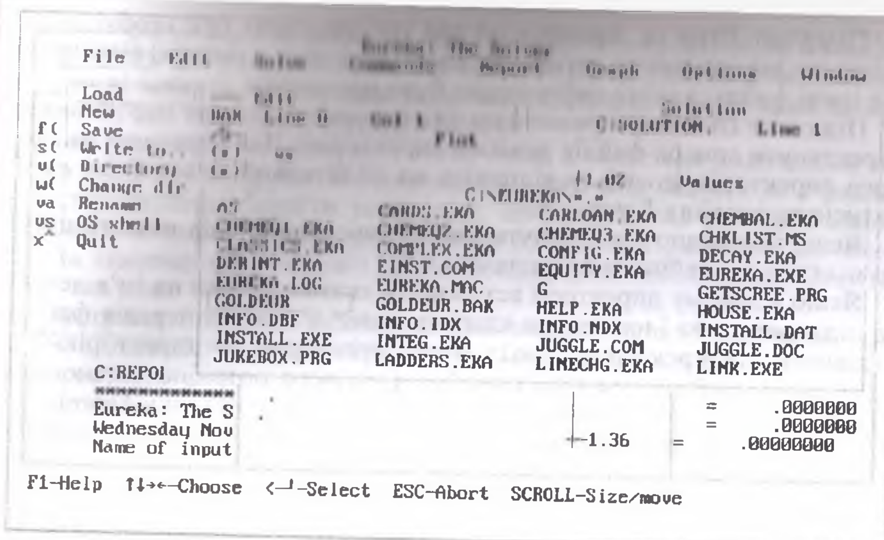


Рис. 3.31

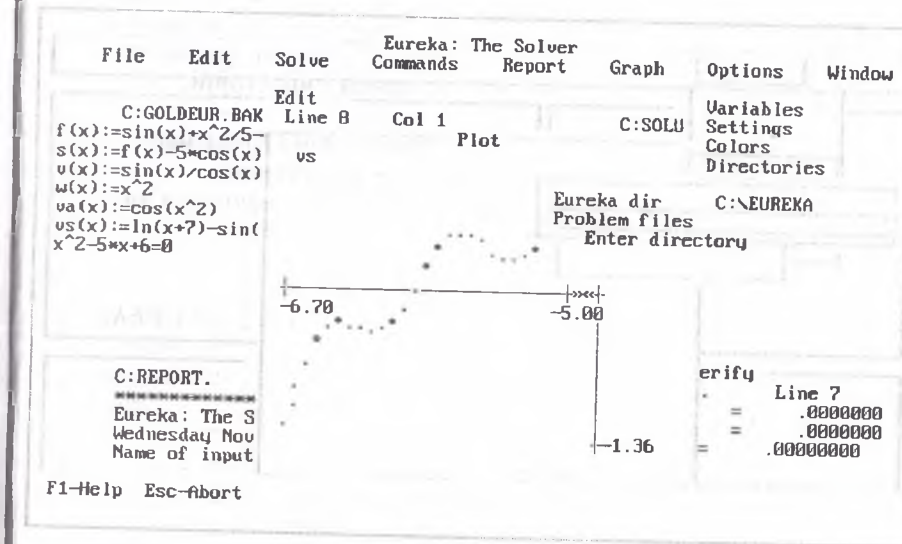


Рис. 3.32

при цьому буде вказано попереднє ім'я файла, до нього автоматично додасться розширення *.BAK*. Якщо ніяке нове ім'я файла не буде вказано, інформацію буде збережено в файлі з іменем *NONAME*.

Підпункт *Write to..* призначено для використання при необхідності записати інформацію з активного вікна до файла з іменем, відмінним від імені файла, з якого інформацію було прочитано.

Підпункт *Directory* призначено для використання при необхідності переглянути список файлів деякого директорію. Для перегляду активного директорію досить у відповідь на додатковий запит *Enter mask* натиснути клавішу *Enter*.

Якщо необхідно переглянути інший директорій, слід вказати шлях до нього за звичайними правилами *DOS*.

Якщо в даному директорії встановити вказівник імен на ім'я деякого піддиректорію і натиснути клавішу *Enter*, з'явиться перелік файлів вказаного піддиректорію. Вихід із піддиректорію до директорію вищого рівня здійснюється як звичайно (для чого потрібно встановити вказівник імен файлів на позначення ..\ і натиснути клавішу *Enter*).

Підпункт *Change dir* призначено для зміни при необхідності активного директорію. У відповідь на додатковий запит слід ввести шлях до директорію, який надалі буде активним.

Директорій програми *EUREKA* містить системні файли: *EUREKA.EXE*, файл конфігурації *CONFIG.EKA*, файл допомоги *HELP.EKA*.

Слід мати на увазі, що якщо активним буде не директорій *EUREKA*, деякі послуги програми *EUREKA* стануть недоступними, якщо до нового директорію не переписати системні файли програми *EUREKA*. Наприклад, якщо змінити активний директорій, то послуги *Help* перестають бути доступними.

Підпункт *Rename* призначено для використання при необхідності перейменувати файл, пов'язаний з буфером редагування.

При зверненні до підпункту *Directories* пункту *Options* з'являється додатковий запит у вигляді (рис. 3.32)

Eureka dir C:\ EUREKA

Problem files.

Якщо є потреба зберігати файли задач для системи *EUREKA* та її програмні файли в різних директоріях, слід вказати, де вони знаходяться. В такий спосіб система зможе відшукати і завантажити всі її файли, якщо вона починає роботу, коли директорії розташовані в різних місцях.

Якщо вказано директорій, де зберігаються файли задач, за вказівками *File*, *Load*, *Save*, *Write* та *Directory* відбуватиметься звернення до цього директорію доти, поки не буде вказано інший.

При зверненні до послуги *Load Setup* пункту *Options* завантажується до оперативної пам'яті завчасно записаний на дискові файл установок системи. Якщо в системному директорії є файл *INITIAL.EKA*, він автоматично завантажується при завантаженні системи *EUREKA*. При зверненні до підпункту *Load Setup* з'являється додатковий запит у вигляді *Config file*, у відповідь на який слід ввести потрібне ім'я конфігураційного файла (вказавши повний шлях до нього). Зокрема в такому файлі можуть зберігатися установки кольорів, сформовані за допомогою послуги *Colors* пункту *Options*.

При зверненні до підпункту *Write Setup* з'являється додатковий запит у вигляді *Config file*. У відповідь на нього слід вказати ім'я файла, в якому бажано зберегти установки, що стосуються розмірів вікон, кольорів та інших параметрів системи *EUREKA*. При цьому до імені файла система автоматично додає розширення *.EKA*, якщо воно не було вказане.

Програма *EUREKA* забезпечує контекстно-чутливу допомогу, що надає можливість отримувати пояснення про призначення і правила використання саме тієї послуги, до якої відбувається звертання в даний момент.

При зверненні до допомоги (після натиснення клавіші F1) на екрані з'являється вікно *Help*, в якому подається текст з необхідними поясненнями, що стосуються пункту меню, на який в даний момент встановлено вказівник пунктів. В цьому тексті окремі назви виділено за допомогою спеціального вказівника. При необхідності отримати інформацію про виділену назву чи продовжити перегляд інформації досить натиснути клавішу *Enter*.

Деякі додаткові відомості стосовно послуг програми *EUREKA* можна отримати, проаналізувавши інформацію, що надається при зверненні до послуги *Help* та інших послуг, а також файли **.EKA*, що містять приклади задач, які можуть бути розв'язані з використанням послуг програми *EUREKA*.

Зміст

Навчально-методичний посібник

Жалдак Мирослав Іванович

КОМП'ЮТЕР НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Редактори *Т.І. Заболотна, П.Ф. Боброва*
Оформлення художника *С.М. Семашка*
Художній редактор *С.В. Аннєнков*
Технічний редактор *Н.О. Бондарчук*
Коректор *Н.М. Мірошниченко*

Підписано до друку 21.05.97. Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Папір друк. № 2. Гарнітура Таймс. Друк офсетний.
Умов. друк. арк. 17,67. Умов. фарбовідб. 18,14. Обл.-вид. арк. 21,39.
Тираж 10000 прим. Зам. № 021.06.97

Видавництво «Техніка». 254053 Київ, вул. Обсерваторна, 25.
Свідоцтво про державну реєстрацію № 02473145 від 22.12.95 р.

Адреса друкарні
Віддруковано в АОЗТ «РОТЕКС». 252180 Київ-67, вул. Машинобудівна, 46.