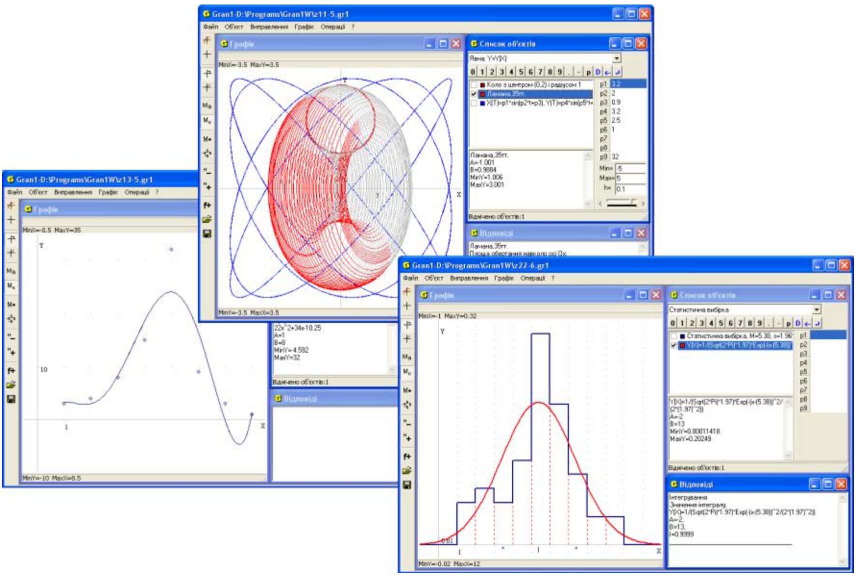
М.И. Жалдак

Ю.В. Горошко

Е.Ф. Винниченко

МАТЕМАТИКА

С КОМПЬЮТЕРОМ



М. И. Жалдак, Ю. В. Горошко, Е. Ф. Винниченко

Математика с компьютером

Пособие для учителей

Издание третье, дополненное

Одобрено решением Учёного Совета Национального педагогического университета имени М. П. Драгоманова

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины

Киев, НПУ имени М.П. Драгоманова, 2015

ББК
УДК 681.31-181.48:51(075)
Ж 24

Одобрено решением Учёного Совета Национального педагогического университета имени М. П. Драгоманова
(протокол № от 24 февраля 2015 года)

Рецензенты: д-р пед. наук, проф. В.И. Клочко;
д-р пед. наук, проф. С.А. Семериков;
д-р пед. наук, проф. Ю.В. Триус.

М.И. Жалдак, Ю.В. Горошко, Е.Ф. Винниченко.

Ж 24 Математика с компьютером. Пособие для учителей. – 3-тье изд. – К.: Изд-во НПУ имени М. П. Драгоманова, 2015. – 308 с.

В пособии рассмотрены возможности использования компьютера для сопровождения обучения математике в средних учебных заведениях. На многочисленных примерах демонстрируется решение с помощью компьютера разного рода задач из алгебры и начал анализа, геометрии, элементов стохастики, которые сводятся к отысканию решений уравнений и неравенств и их систем, исследованию функций, вычислению определенных интегралов, статистической обработке экспериментальных данных и др. Пособие предназначено для учителей математики и информатики, может быть полезным также учащимся старших классов, СПТУ, студентам педагогических училищ и младших курсов вузов, где изучается математика.

ISBN 978-966-660-542-2

УДК 519.6(075)
ББК 22.1

Предисловие

Внедрение в учебный процесс современных средств поиска, сбора, хранения, обработки, представления, передачи разнообразных сообщений открывает широкие перспективы гуманитаризации образования и гуманизации учебного процесса, углубления и расширения теоретической базы знаний и придания результатам обучения практической значимости, активизации познавательной деятельности, создания условий для полного раскрытия творческого потенциала учащихся с учетом их возрастных особенностей и жизненного опыта, индивидуальных наклонностей, запросов и способностей.

Вместе с тем возникает целый ряд проблем, которые касаются содержания, методов, организационных форм и средств обучения, обязательных уровней знаний разных учебных предметов, которых должен достичь каждый ученик.

В данном пособии преследуется цель раскрыть некоторые аспекты использования средств современных информационных технологий в процессе обучения математике в средних учебных заведениях с разными уклонами в обучении.

При этом учителю не навязывается никакая методика представления учебного материала, закрепления и контроля знаний, конкретное содержание, методы, средства и организационные формы обучения, соотношение между самостоятельной работой учащихся и работой вместе с учителем, между индивидуальными и коллективными формами работы и др. Все это учитель должен определить сам с учетом своих собственных позиций и предпочтений, специфики условий, в которых протекает учебный процесс, индивидуальных особенностей отдельных учащихся и классного коллектива.

Ясно, что невозможно и нет необходимости всех учащихся одинаково учить и научить, сформировать у каждого ученика одни и те же знания, умения и навыки в разных предметных областях, добиваться от учащихся обязательного достижения одного и того же уровня развития логического и творческого мышления, одинакового восприятия разных проявлений окружающей действительности. Это касается и обучения математике, методов решения задач, построения и анализа математических моделей разнообразных процессов и явлений, интерпретации и обобщения результатов такого анализа.

Сегодня разработано уже значительное количество программных средств, использование которых позволяет решать с помощью компьютера достаточно широкий круг математических задач разных уровней сложности. Это такие программные средства, как *Derive*, *GRAN1*, Gran-2D, Gran-3D, DG, Maple, Mathematika, MathLab, Maxima, Numeri, Reduce, Statgraph и др. Причем одни из них ориентированы на специалистов достаточно высокой квалификации в области математики, другие – на учащихся средних учебных заведений или студентов вузов, которые лишь начали изучать школьный курс математики или основы высшей математики.

Наиболее подходящими для поддержки обучения математике в средних учебных заведениях представляются программы *Gran* (*GRAN1*, Gran-2D, Gran-3D), DG, Derive. Названные программные средства простые в использовании, оснащенные достаточно удобным и “дружественным” интерфейсом, максимально приближенным к интерфейсу наиболее распространенных программ общего назначения (систем обработки текстов, управления базами данных, электронных таблиц, графических и музыкальных редакторов и др.), контекстно-чувствительной справочной системой. От пользователя не требуется значительный объем специальных знаний по информатике, основам вычислительной техники, программированию и т.п., за исключением самых простых понятий, вполне доступных для учащихся средних классов.

Использование подобных программ дает возможность ученику решать отдельные задачи, не зная соответствующего аналитического аппарата, методов и формул, правил преобразования выражений и т.п. Например, ученик может решать уравнения и неравенства и их системы, не зная формул для отыскания корней, метода исключения переменных, метода интервалов и т.п., вычислять производные и интегралы, не помня их таблицы, исследовать функции, не зная алгоритмов их исследования, отыскивать оптимальные решения простейших задач линейного и нелинейного программирования, не используя симплекс-метод, градиентные методы и т.д. Вместе с тем, благодаря возможностям графического сопровождения компьютерного решения задачи, учащийся легко и четко будет решать достаточно сложные задачи, уверенно владеть соответствующей системой понятий и правил. Использование программных средств указанного типа дает возможность во многих случаях сделать решение задачи настолько же доступным, как простое рассматривание рисунков или графических изображений. Применение соответствующих программных средств превращает отдельные разделы и методы математики в “математику для всех”, которые становятся доступными, понятными, легкими и удобными в использовании, а тот, кто решает задачу, становится пользователем математических методов, возможно не владея их построением и обоснованием, аналогично тому, как он использует компьютерные программы (текстовые, графические, музыкальные редакторы, электронные таблицы, базы данных, операционные системы, экспертные системы), не зная, как и по каким принципам и правилам они построены, на каких языках программирования описаны, какие теоретические положения положены в их основу.

С другой стороны при таком подходе к обучению математике даются наглядные представления о понятиях, которые изучаются, развивается образное мышление, пространственное воображение, появляются возможности достаточно глубоко проникнуть в сущность исследуемого явления, неформально решать задачу. При этом на передний план выступает выяснение проблемы, постановка задачи, разработка соответствующей математической модели, материальная интерпретация полученных с помощью компьютера результатов. Все технические операции относительно анализа построенной математической модели, реализации метода отыскания решения, оформления и представления результатов обработки исходных данных возлагаются на компьютер.

Трудно переоценить программные средства указанного типа и при углубленном изучении математики. Возможность провести необходимый численный эксперимент, быстро выполнить нужные вычисления или графические построения, проверить ту или другую гипотезу, испытать тот или другой метод решения задачи, уметь проанализировать и объяснить результаты, полученные с помощью компьютера, выяснить пределы возможностей использования компьютера или избранного метода решения задачи имеют чрезвычайное значение при изучении методов математики.

Уже из приведенного видно, как может изменяться (причем в достаточно широком диапазоне) содержание и структура учебной деятельности учащихся при изучении математики в зависимости от специфики избранной ими предметной области, направленности обучения, индивидуальных наклонностей и способностей. При этом компьютерная поддержка обучения математике с использованием программных средств указанного типа дает значительный педагогический эффект, облегчая, расширяя и углубляя изучение и понимание методов математики на соответствующих уровнях в средних учебных заведениях с самыми разнообразными уклонами в обучении – гуманитарного направления, СПТУ разных профилей, средних общеобразовательных школах, гимназиях, лицеях, классах и заведениях с углубленным изучением естественно-математических дисциплин. Естественно, и программы курсов математики, и глубина изучения соответствующих понятий, законов, методов, аналитического аппарата могут существенно отличаться между собой.

Не касаясь детально всех тем, исследуемых в курсе математики средней общеобразовательной школы, вместе с тем можно заметить, что компьютерные программы упомянутого типа могут быть использованы практически на всех уроках математики, начиная уже с пятых-шестых классов, в частности при изучении систем координат на прямой и на плоскости, планиметрии, понятия функции, элементарных функций и их свойств, методов решения уравнений и неравенств и их систем, элементов теории пределов числовых последовательностей, дифференциального и интегрального исчислений и их приложений, элементов теории вероятностей и математической статистики. Понятно, что кроме программ указанного типа учитель при необходимости может использовать разного рода тренажеры, программы для контроля знаний, сбора статистических данных относительно учебного процесса и их обработки и т.п. Использование таких программ дает возможность учителю значительно интенсифицировать общение с учащимися и учащихся между собой, больше внимания уделять задачам на доказательства, на постановку задач, построение их математических моделей, разработку и исследование методов решения задач, исследование решений, логический анализ условий задач, поиск нестандартных подходов к решению задач, выявлению закономерностей, которым подчиняются исследуемые процессы и явления, переложить на компьютер рутинные, чисто технические и неинтересные операции, ручное выполнение которых практически не развивает интеллект ребенка, а часто даже, наоборот, гасит его, когда ребенок уподобляется роботу или компьютеру, выполняя вместо него вычислительные, графические и другие технические операции.

Вместе с тем использование компьютера в учебном процессе должно быть педагогически выверенным, построенным на принципах гармоничного единения педагогических достижений прошлого и современных информационно-комуникационных технологий.

Понятно, что занятия по математике, ориентированные на использование средств обучения упомянутых типов, должны проводиться в соответствующим образом оснащенном достаточно совершенными техническими и программными средствами классе. В таких классах должны изучаться все учебные предметы, а не только основания информатики и вычислительной техники. Это в свою очередь будет способствовать расширению и углублению межпредметных связей, интеграции отдельных учебных предметов, их взаимопроникновению и взаимовлиянию, что в конечном итоге даст возможность в отдельных учебных заведениях или классах овладевать элементами современных информационно-коммуникационных технологий и информатической культуры в процессе изучения разных учебных дисциплин, а не только отдельного, почти изолированного от других, учебного курса “Основы информатики и вычислительной техники”.

В данном пособии достаточно детально рассматривается программное средство *GRAN1* в объеме, который отвечает программе курса математики средней общеобразовательной школы. Указанное средство предназначено в первую очередь для решения определенных классов задач графическими методами.

В пособии описываются правила работы с программой *GRAN1*, разработанной специально для поддержки школьного курса математики. Анализируются возможности использования программы при изучении разных разделов математики в средней общеобразовательной школе, СПТУ, педагогических училищах, средних учебных заведениях гуманитарной направленности.

Ко всем параграфам пособия дается значительное количество примеров, наглядных графических изображений, задач и упражнений для самостоятельного выполнения, вопросы для самоконтроля.

Предполагается, что пользователь владеет простейшими навыками работы с соответствующим образом оснащенным компьютером, который функционирует под управлением операционной системы Windows или Linux.

§1. Начало работы с программой. Обращение к услугам программы

Программа *GRAN1* предназначена для графического анализа функций, откуда и происходит ее название (GRaphic ANalysis).

Для работы с программой необходимо проинсталировать её на жесткий диск (винчестер). При этом обязательно следует записать на диск файлы *GRAN1.exe* и GRAN1.lng (общим объемом около 1 мегабайта), а также желательно, чтобы на диске имелись файлы помощи GRAN1.hlp и GRAN1.cnt (общим объемом около одного мегабайта).

В дальнейшем “указать имя файла”, “обратиться к услуге” и т.п. будет означать – установить указатель имен файлов или услуг (с использованием клавиш управления курсором или манипулятора “мышь”) на нужное имя в перечне файлов, пункт меню или пиктограмму, и нажать клавишу *Enter* или левую клавишу “мыши”.

После запуска программы на экране появится изображение, показанное на Рис. 1.1. В верхней строке экрана находится “главное меню” – перечень “услуг”, к которым можно обратиться в процессе работы с программой. При обращении к некоторому пункту главного меню появляется перечень пунктов (услуг) соответствующего подменю (Рис. 1.2).

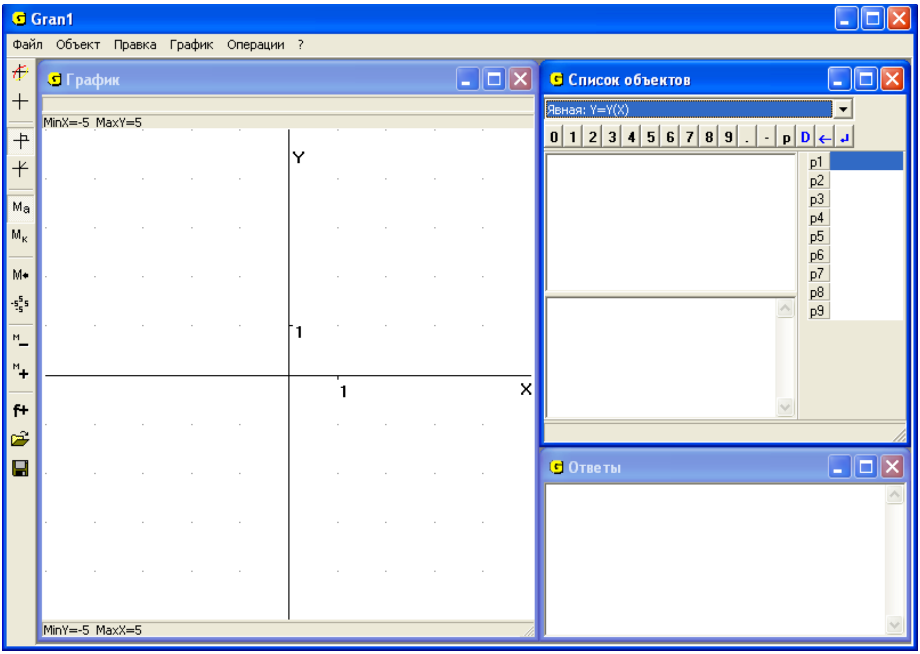


Рис. 1.1

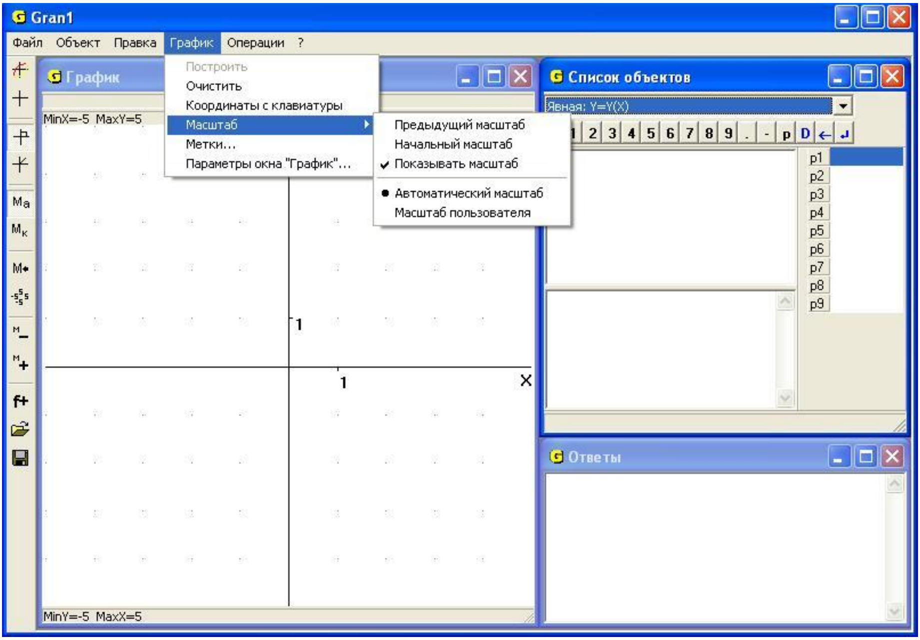


Рис. 1.2

Пункты подменю в свою очередь могут разветвляться на подпункты, перечень которых появляется при обращении к соответствующему пункту подменю.

Условимся в дальнейшем обращение к подпункту определенного пункта меню записывать одной командой, разделяя символом “ / ” названия пунктов и подпунктов. Например, обращение к подпункту “Удалить” пункта “Объект” будем обозначать “Объект / Удалить”.

Названия подпунктов подменю, использование которых в данный момент некорректно, даны более бледным цветом. Например, использование подпунктов “Объект / Изменить...”, “Объект / Удалить” в самом начале работы с программой некорректно, поскольку еще не введено никаких данных и нечего изменять или удалять.

Программа оснащена контекстно-чувствительной помощью. Если указатель установлен на название определенной услуги, то при нажатии клавиши *F1* появляется вспомогательное окно со стандартным интерфейсом справочной системы, в котором даются краткие сведения о назначении отмеченной услуги и о правилах ее использования. Файл помощи также можно вызывать, используя услугу “? / Помощь” главного меню (см. Рис. 1.1, Рис. 1.2 и др.).

В самом начале работы с программой необходимо установить некоторые параметры, избрав услугу “Правка / Настройка параметров программы”. Здесь осуществляется выбор языка, на котором будут отображаться все сообщения во время работы с программой, а также точность вычислений, которые выполняются по программе – количество десятичных знаков в числах в пределах от 0 до 6 (Рис. 1.3).

При необходимости отказаться от работы с только что избранной услугой и вернуться к главному меню программы используется клавиша *Esc*. С той же целью можно использовать кнопку закрывания вспомогательного окна или кнопку “Отменить” (Рис. 1.3).

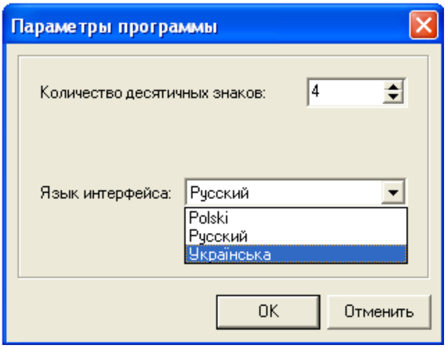


Рис. 1.3

Выполнение услуги "Правка / Копировать" зависит от того, какое окно является текущим (рабочим) при обращении к ней. В случае, когда текущим является окно "График", в буфер обмена заносится изображение координатной плоскости вместе с построенным графиком. Если текущим является окно "Список объектов", то в буфер обмена будет занесен текст, который был отмечен в этом окне. Если же текст не отмечался, в буфер обмена будет занесено название текущего объекта. В случае, когда текущим является окно "Ответы", в буфер обмена заносится текст, который был отмечен в окне.

При обращении к услуге "Правка / Скопировать текущее окно" в буфер обмена заносится полное изображение содержимого текущего окна программы.

Чтобы сохранить созданные в программе объекты в файле на запоминающем устройстве, необходимо обратиться к услуге "Файл / Сохранить" или "Файл / Сохранить как…". Если объекты сохраняются впервые, то при обращении к любой из этих услуг на запрос программы в стандартном окне сохранения файлов необходимо указать имя файла и целевой каталог. Если файл раньше сохранялся, то при обращении к услуге "Файл / Сохранить" переписываются все объекты в тот же файл.

В случае необходимости сохранить заново созданные объекты, или такие, которые раньше уже сохранялись, в файле с другим названием, следует воспользоваться услугой главного меню "Файл / Сохранить как…", что также приведет к появлению стандартного запроса, где необходимо указать новое имя файла и целевой директорий.

К именам файлов, которые записываются на запоминающее устройство, по умолчанию добавляется расширение имени ".gr1", что соответствует названию программы "GRAN1".

Записанный ранее файл можно загрузить в программу, воспользовавшись услугой "Файл / Открыть". На стандартный запрос, который появится при обращении к указанной услуге, необходимо указать имя файла, в котором были сохранены объекты. Имя рабочего файла (то есть файла, в котором сохранены или из которого загружены объекты) будет выводиться в заглавии главного окна программы.

Обращение к услуге главного меню "Файл / Новый" приведет к удалению всех ранее созданных объектов, то есть будет выполнена подготовка к новому сеансу работы.

Размеры и положения окон программы можно изменять. Чтобы изменить размеры окна, необходимо установить курсор мыши на границе избранного окна, нажать левую клавишу мыши, и, удерживая ее нажатой, переместить границу окна в нужном направлении. При этом необходимо обратить внимание на пункт меню "Правка / Авторазмеры окон". Если установлена метка ☑, то изменение размера одного из окон ведет к автоматическому изменению размера других так, чтобы окна занимали всю рабочую область экрана. Если метка ☑ снята, то окна могут перекрываться. Перемещение окна в другое место осуществляется как обычно. При обращении к услуге "Правка / Начальные размеры и положения окон" все размеры окон (главного окна программы и трех рабочих) и их расположения возвращаются в начальное состояние.

Для завершения работы с программой необходимо обратиться к пункту меню "Файл / Выход" или "нажать" кнопку закрывания главного окна программы. Если во время работы с программой были созданы объекты, которые не были сохранены, то появится сообщение о необходимости сохранить данные.

Вопросы для самоконтроля

1. Сколько пунктов есть в главном меню программы? Как называются эти пункты?
2. Что и где появится на экране, если установить указатель пунктов главного меню на некоторый пункт и нажать клавишу Enter?
3. Какие действия необходимо выполнить, чтобы обратиться к некоторому подпункту некоторого подменю?
4. Сколько подпунктов в подменю пункта “Операции”? Как называются эти подпункты?
5. Как узнать, корректно ли обращение к подпункту некоторого подменю в данный момент времени?
6. Как обратиться к нужному пункту меню, используя манипулятор “мышь”?
7. Как обратиться к нужному подпункту подменю в отмеченном пункте главного меню, используя манипулятор “мышь”?
8. Как узнать о назначении того или другого пункта некоторого подменю?
9. Как отказаться от выполнения избранной услуги?

§2. Ввод данных

Прежде чем вводить выражения или таблицы, которыми характеризуют некоторую зависимость между переменными, необходимо указать тип задания зависимости в окне "Список объектов" (на экране вверху справа, Рис. 1.1, Рис. 2.1). Для этого следует перейти в данное окно. Это можно сделать с помощью "мыши", нажав левую клавишу "мыши", когда ее курсор находится в области окна, или избрав пункт меню "Объект / Список объектов".

Само окно состоит из трех частей (Рис. 2.1). В верхней части окна находится список, который раскрывается и содержит восемь возможных типов зависимостей:

Явная: $Y = Y(X)$ – зависимость между переменными x и y задана в виде $y = y(x)$, где $y(x)$ некоторое выражение от переменной x (явное задание зависимости);

Параметрическая: $Y = Y(T)$, $X = X(T)$ – *зависимость между переменными* x *и* y *задана через параметр t:* $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, *где* $\varphi(t)$, $\phi(t)$ – *некоторые выражения от переменной (параметра)* t *(параметрическое задание зависимости)*;

Полярная: $R = R(F)$ – зависимость задана в полярных координатах в виде $r = \rho(\varphi)$, где $\rho(\varphi)$ – выражение от переменной φ, r – полярный радиус точки на плоскости, φ – полярный угол (откладывается от полярной оси до полярного радиуса против часовой стрелки), причем связь между полярными и соответствующими декартовыми координатами x и y можно определить, исходя из формул $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$;

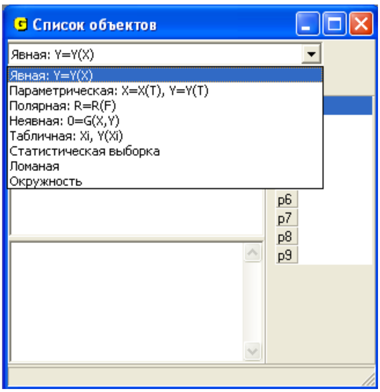


Рис. 2.1

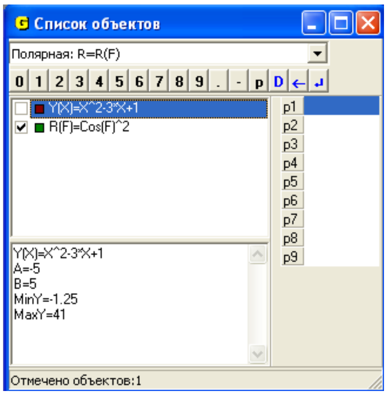


Рис. 2.2

Неявная: $0 = G(X, Y)$ – зависимость между переменными x и y задана неявно в виде $G(x, y) = 0$, где $G(x, y)$ – некоторое выражение от переменных x и y (неявное задание зависимости);

Табличная: $Xi, Y(Xi)$ – зависимость задана таблицей (при этом по программе строится полином наперед указанной степени не выше 7, который наилучше в смысле среднего квадратичного отклонения приближает таблично заданную зависимость);

Статистическая выборка – задается и исследуется статистическая выборка;

Ломаная – зависимость между переменными x и y определяется с помощью ломаной линии.

Окружность – задается окружность.

Избрать тип зависимости можно с помощью манипулятора “мышь”, раскрыв список, или с помощью клавиш управления курсором, установив с помощью клавиши Tab указатель на списке, который раскрывается.

Указанный последним тип задания зависимости фиксируется, а все зависимости, которые вводятся заново, будут иметь такой тип задания до тех пор, пока он не будет изменен. Если никакой тип не указан, то по умолчанию автоматически устанавливается тип $y = y(x)$ (Явная).

Все зависимости, которые вводятся, могут быть любого из перечисленных типов задания в произвольных сочетаниях.

Во второй части окна “Список объектов” находится список выражений всех введенных объектов. Различаются понятия текущего объекта и отмеченного объекта. Текущим является объект, на выражение которого установлен указатель. Отмеченный объект отмечается меткой ☑. Установить или снять метку можно с помощью “мыши” (или клавиши “Пропуск” клавиатуры), для чего достаточно установить курсор мыши на место переключателя и нажать ее левую клавишу.

Для каждого объекта указан его тип и цвет графика соответствующей зависимости. На Рис. 2.2 текущим есть первый из двух объектов, который описывается явно заданной зависимостью, а отмеченный – второй, который описывается зависимостью, заданной в полярных координатах.

При выполнении большинства операций над объектами (отыскание решений системы уравнений и неравенств, вычисление интегралов, преобразование ломаных и т.п.), соответствующие операции выполняются лишь над отмеченными объектами. Если отмеченных объектов нет, операции выполняются над текущим объектом.

При необходимости ранее введенную зависимость можно изменить, используя услугу “Объект / Изменить...”. При этом по программе автоматически контролируется, чтобы тип задания новой зависимости был тот же, что и у изменяемой. Здесь же можно изменить ранее указанные пределы отрезка, на котором задана зависимость между переменными. Если же необходимо изменить не только выражение зависимости, но и тип задания зависимости, ранее введенную зависимость следует удалить, для чего предназначена услуга “Объект / Удалить”. Удаляются все отмеченные объекты. С помощью услуги “Объект / Удалить последний” можно удалить последний объект из списка, независимо от того, отмечен он или нет.

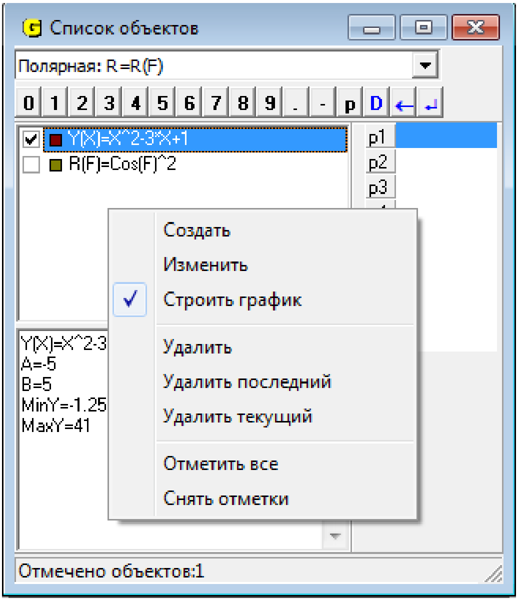


Рис. 2.3

В этой части окна можно вызывать контекстное меню (Рис. 2.3), нажав правую кнопку “мыши”. Большинство пунктов этого меню совпадают с услугами из пункта “Объект” главного меню. Однако кроме того есть еще два пункта: “Отметить все”, с помощью которого можно отметить все объекты в окне, и “Снять отметки” – снимаются отметки со всех объектов в окне.

Кроме того с помощью пункта "Строить график" этого меню можно определить, будет ли построен график текущего объекта в окне "Графики" (график строится, если соответствующий пункт меню отмечен меткой ☑), а также, в случае необходимости, установить или снять эту метку.

В третьей части окна находятся сведения о текущем объекте. Например, для зависимости, заданной в декартовых координатах, это выражение зависимости, отрезок, на котором задана зависимость, максимальное и минимальное значения функции на данном отрезке при явном задании зависимости или пределы изменения координат при неявном задании зависимости и т.п. (Рис. 2.2).

Эти сведения можно пересмотреть, используя полосы прокручивания в окне или клавиши управления курсором. Поскольку сведения даны в окне с помощью обычного текста, то используя “мышь” или клавиши управления курсором, можно отметить весь текст или его часть, а затем занести в буфер обмена для использования в других программах.

Работа с буфером обмена может осуществляться через главное меню (пункт “Исправления”), контекстное меню или через клавиатуру. Доступны такие услуги:

- *Вырезать*. Текст будет занесен в буфер обмена с одновременным удалением из окна (комбинация клавиш “CTRL+X” клавиатуры).
- *Копировать*. Текст будет занесен в буфер обмена (комбинация клавиш “CTRL+C” клавиатуры).
- *Вставить*. Применяется при необходимости вставить текст из буфера обмена (комбинация клавиш “CTRL+V” клавиатуры).
- *Удалить*. Удаляется отмеченный текст (клавиша “DEL” клавиатуры).
- *Отметить все*. Отмечается весь текст в окне.

Использовать буфер обмена можно и для перенесения полученных с помощью программы графиков. Для этого нужно перейти в окно “График”, установить курсор мыши в любом месте в окне и нажать ее левую клавишу. В результате окно “График” станет текущим. Затем с помощью услуги “Правка / Копировать” изображение из окна заносится в буфер обмена.

В четвертой части окна (справа) находится список “динамических параметров” и средства работы с ними.

При обращении к услугам, связанным с вводом новых данных или с изменением введенных ранее, во вспомогательном окне, соответствующем выполняемому действию, появляется панель ввода данных одного из двух возможных типов.

Первый тип используется в тех случаях, когда нужно ввести выражение, в которое входят числа, переменные, функции и арифметические знаки (Рис. 2.4), например при обращении к услугам “Объект / Создать” при задании функциональных зависимостей, “Операции / Калькулятор” и других.

Второй тип используется для ввода исключительно числовых данных (Рис. 2.5), например, при обращении к услугам “Объект / Создать” при создании статистической выборки или ломаной, “Операции / Интегралы / Интеграл...”, “График / Параметры окна “График”” и других.

Для использования панели ввода данных курсор должен быть установлен в строке ввода данных. Перемещать курсор можно с помощью манипулятора “мышь” или с помощью клавиши *Tab* клавиатуры.

В начале строки ввода в зависимости от типа данных, которые вводятся, могут появляться разные надписи, например:

- $Y(X)=X$ – при вводе выражения $f(x)$ при явном задании зависимости $y=f(x)$;
- $0=X$ – при вводе выражения $G(x,y)$, аргументами которого являются переменные x и y;

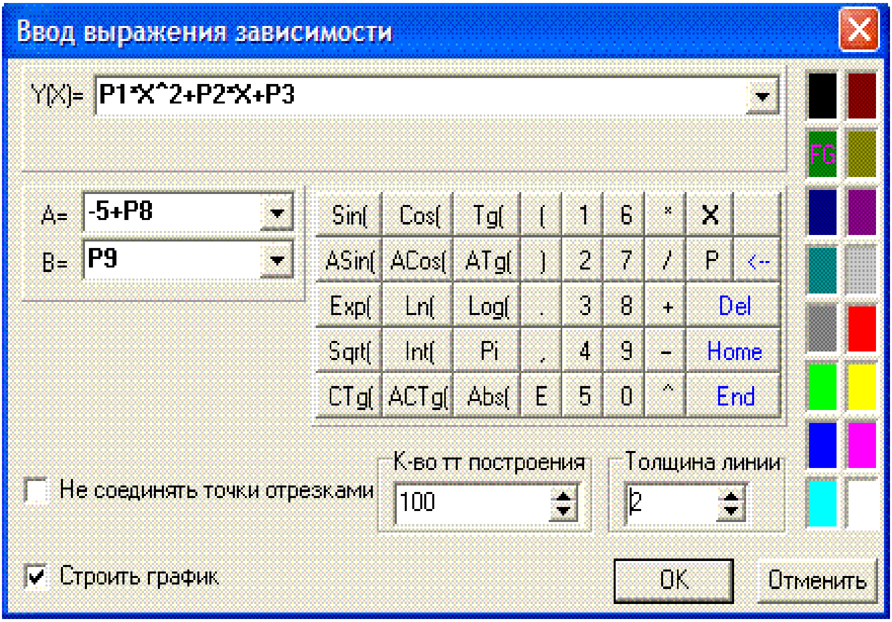

Ввод выражения зависимости
Y(X)=
P1*X^2+P2*X+P3
A=
-5+P8
B=
P9
Sin(Cos(Tg((1 6 * X
ASin(ACos(ATg( ) 2 7 / P <--
Exp(Ln(Log(. 3 8 + Del
Sqrt(Int(Pi , 4 9 - Home
CTg(ACTg(Abs(E 5 0 ^ End
FG
Не соединять точки отрезками
К-во тт построения
100
Толщина линии
2
Строить график
OK
Отменить

Рис. 2.4

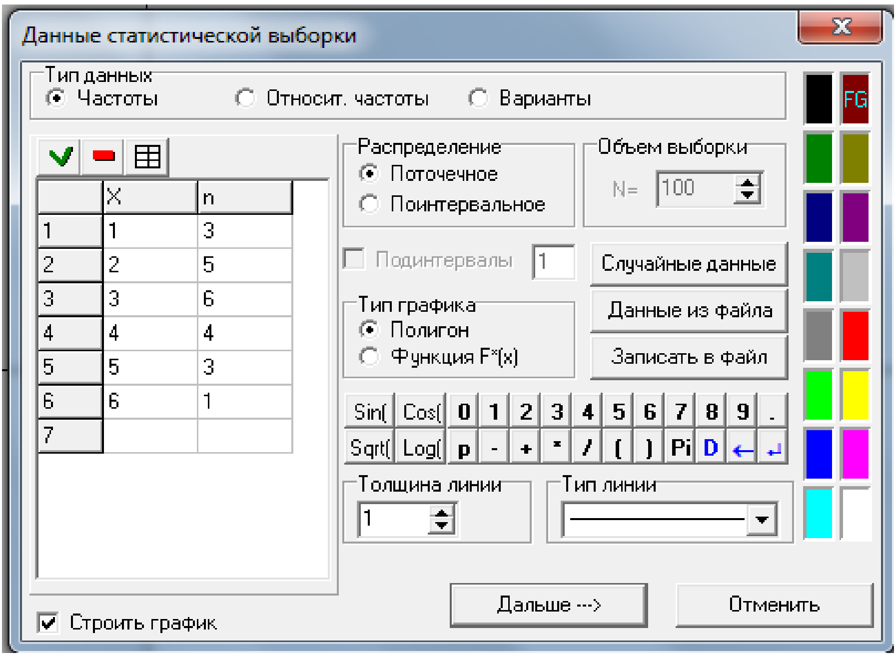

Данные статистической выборки
Тип данных
Частоты
Относит. частоты
Варианты
X n
1 1 3
2 2 5
3 3 6
4 4 4
5 5 3
6 6 1
7
Распределение
Поточечное
Поинтервальное
Объем выборки
N= 100
Подинтервалы 1
Случайные данные
Данные из файла
Записать в файл
Тип графика
Полигон
Функция F*(x)
Sin(Cos(0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 .
Sqrt(Log(p - + * / ( ) Pi D
Толщина линии
1
Тип линии
FG
Строить график
Дальше --->
Отменить

Рис. 2.5

- $MinX$, $MaxX$, $MinY$, $MaxY$ – при вводе масштаба пользователя (указывании пределов вдоль оси Ox и оси Oy , в которых будут даны графические изображения);
- $A = -5$, $B = 5$ – при вводе пределов отрезка, на котором будет рассматриваться зависимость;
- *Выражение:* при вводе выражения, значение которого необходимо вычислить при обращении к услуге “Операции / Калькулятор”, и др.

При этом в строке ввода могут быть указаны значения переменных или выражения, предусмотренные в программе или введенные ранее. Если нет необходимости изменять эти значения или выражения, достаточно нажать на клавиатуре клавишу *Enter* или установить курсор “мыши” на панели ввода данных на кнопку “ОК” и нажать левую клавишу “мыши”. После этого соответствующее выражение, пределы изменения аргумента и некоторые дополнительные характеристики, которые зависят от типа объекта, появляются в окне “Список объектов” (Рис. 2.2).

Ввод новых данных может осуществляться с помощью клавиатуры или с помощью “мыши”.

С помощью клавиатуры все необходимые символы вводятся как обычно – следует ввести нужный набор символов. Числовые значения и выражения записываются по правилам, близким к принятым в наиболее распространенных языках программирования (*BASIC*, Pascal и др.). Все допустимые обозначения функций и операций показаны на панели ввода данных (Рис. 2.4).

При записи числовых значений дробная часть, если она есть, отделяется от целой точкой. Арифметические операции обозначаются знаками:

+ – сложение
– – вычитание
* – умножение
/ – деление
^ – возведение в степень.

Приоритеты (порядок выполнения) операций общепринятые. Желаемый порядок выполнения операций может быть указан с помощью скобок. Выражение в скобках рассматривается как единое целое и вычисляется в первую очередь. Внутри скобок могут быть другие выражения, также заключенные в скобки. При этом каждой открывающей (левой) скобке должна соответствовать закрывающая (правая) скобка.

В выражения могут быть включены также обозначения (которые рассматриваются как неделимые символы) некоторых функций. Все они показаны на панели ввода данных (Рис. 2.4):

Sin – *sin* (синус),
Cos – cos (косинус),
Tg – tg (тангенс),

Ctg – ctg (котангенс),
Asin – arcsin (арксинус),
Acos – arccos (арккосинус),
Atg – arctg (арктангенс),
Actg – arcctg (арккотангенс),
Exp – экспонента (e^x),
Log – логарифм по произвольному основанию
(основание и аргумент логарифма указываются в скобках через запятую. Например, $Log(x, x+3)$ означает $\log_x(x+3)$),
Ln – логарифм натуральный (по основанию e),
Abs – абсолютная величина,
Int – целая часть аргумента,
Sqrt – корень квадратный,
Pi – число π (= 3.141592654).

На панели ввода данных также могут находиться несколько кнопок, которые соответствуют следующим клавишам управления курсором:
← – *Back Space* (удаление символа слева от курсора),
Del (D) – Delete (удаление символа справа от курсора),
Home – Home (перемещение курсора на начало строки),
End – End (перемещение курсора в конец строки),
↵ – *Enter* (ввод значения и перевод курсора).

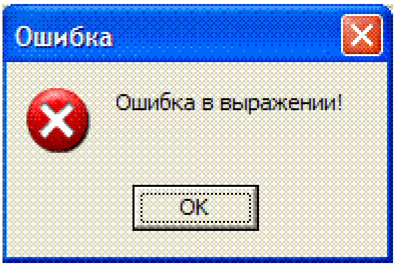


Рис. 2.6

Если при вводе допущена ошибка в одной из строк ввода, то выводится соответствующее сообщение (Рис. 2.6), после чего курсор перемещается в строку, содержащую неправильное выражение. Это выражение необходимо отредактировать (внести изменения), используя обычные средства редактирования:

- при необходимости удалить символ слева от курсора используется клавиша *Back Space* (←); при удалении символа все другие, расположенные правее от курсора, и сам курсор смещаются влево на одну позицию;
- при необходимости удалить символ в позиции, где расположен курсор, используется клавиша *Delete*;
- при необходимости вставить символ в позицию, где расположен курсор, достаточно нажать на клавиатуре соответствующую клавишу; при этом символы, расположенные в позиции курсора и правее, смещаются на

одну позицию вправо (в программе не предусмотрена отмена режима вставки символов в строке ввода);

- при необходимости перемещать курсор вдоль строки ввода можно с помощью клавиш управления курсором (“←”, ”→”).

После того, как значение или выражение набрано с клавиатуры или отредактировано, следует нажать клавишу *Enter* или соответствующую кнопку во вспомогательном окне. Это будет означать, что только что набранное или отредактированное выражение введено в запоминающее устройство компьютера и с соответствующим объектом можно продолжать работу (строить график, выполнять ранее выбранную операцию и т.д.).

С помощью “мыши” данные вводятся с использованием панели ввода данных. Курсор “мыши” устанавливается на нужный символ на панели ввода данных и нажимается левая клавиша “мыши”, после чего отмеченный символ появляется в строке ввода. После того, как все необходимые символы введены, следует “нажать” кнопку “ОК” (или ↵), то есть курсор “мыши” установить на изображение кнопки “ОК” (или на изображение кнопки ↵) и затем нажать левую клавишу “мыши”.

При необходимости отредактировать набор символов в строке ввода следует с помощью “мыши” указать нужную позицию, после чего появляется указатель позиций в строке ввода в позиции, указанной с помощью курсора “мыши”. Если на отмеченное место нужно вставить новый символ, с помощью “мыши” следует указать соответствующий символ на панели ввода данных. Если символ нужно удалить, следует указать на пункт “←” или “*Del*” на панели ввода данных. Чтобы отказаться от услуги (или прекратить ее выполнение) и перейти к главному меню, достаточно нажать кнопку “Отменить” (Рис. 2.4, Рис. 2.5) или на клавиатуре клавишу Esc.

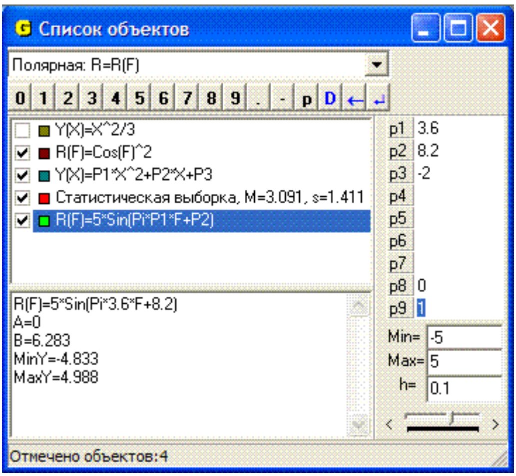


Рис. 2.7

В выражения, которые вводятся, могут быть включены некоторые из динамических параметров $P1$, $P2$, … , $P9$, значения которых в дальнейшем отображаются в таблице, расположенной в правой части окна "Список объектов" (Рис. 2.7). Каждая строка таблицы отвечает одному из динамических параметров, которые могут быть использованы в выражениях при создании объектов отдельных типов. Если ни один из параметров не использован – таблица пустая (Рис. 2.2). Для параметров, которые в данное время используются, соответствующие строки таблицы содержат текущие значения этих параметров (Рис. 2.7). Если же параметр не использован ни в одном из объектов – соответствующая строка пустая.

Значение отмеченного параметра можно изменять с помощью ползунка, расположенного под окном, в котором указаны значения параметров. Если при этом построены графики, соответствующие тем или иным введенным выражениям, то при изменении значения параметра графики немедленно (динамически) перестраиваются в соответствии со значением параметра. Пределы и шаг h изменения отмеченного параметра можно задавать, используя панель ввода данных, которая находится над перечнем значений параметров (Рис. 2.7). Чтобы отметить некоторый (один из девяти) параметр, достаточно установить курсор мыши на соответствующую строку и нажать левую клавишу мыши. Один и тот же параметр может входить в несколько выражений. При изменении значения параметра перестраиваются графики всех зависимостей, в выражения которых входит параметр. Чтобы ввести параметр в некоторое выражение, нужно с помощью панели ввода данных (Рис. 2.7) ввести сначала букву P, а затем соответствующую цифру (от 1 до 9).

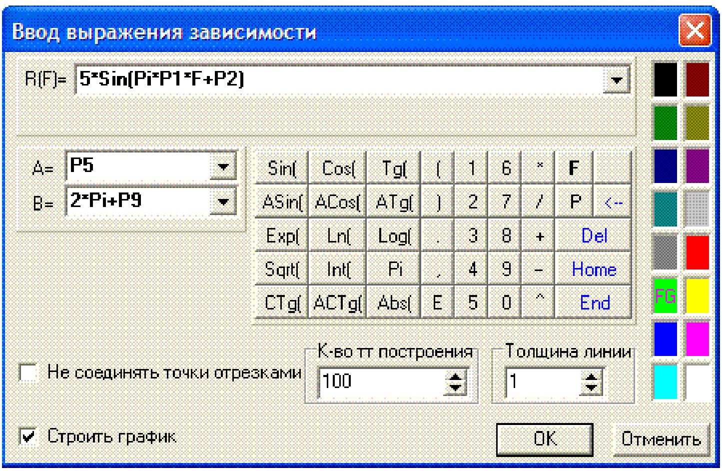


Рис. 2.8

В выражения для пределов отрезка задания зависимости также могут входить параметры $P1$, $P2$, … , $P9$ (Рис. 2.8). Однако нужно следить, чтобы нижний предел не превышал верхнего.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие типы задания зависимости между переменными предусмотрены в программе GRAN1?
2. Как указать нужный тип задания зависимости между переменными?
3. Какие сведения отражены в окне “Список объектов”?
4. Можно ли сначала ввести выражение, а затем указать тип задания зависимости между переменными?
5. Каким будет тип задания зависимости между переменными, если не изменять в окне “Список объектов” тип зависимости ?
6. Как указать нужный тип зависимости между переменными, используя манипулятор “мышь”?
7. Должны ли разные зависимости между переменными иметь один и тот же тип задания?
8. Как можно проверить, какое выражение было только что введено? Где его можно прочитать?
9. Какие обозначения операций и функций допустимы при записи выражений? Где их все можно увидеть?
10. Как определяются приоритеты выполнения операций?
11. Как вводятся данные с клавиатуры без использования панели ввода данных, показанной на экране?
12. Как вводятся данные с использованием панели ввода данных, показанной на экране?
13. Как в выражения вводятся переменные параметры $P1, P2, \dots, P9$?
14. Как можно отредактировать ранее введенные выражения:
    а) с использованием клавиатуры?
    б) без использования клавиатуры?
15. Можно ли считать, что выражение введено в память компьютера, если оно набрано с клавиатуры и изображение выражения появилось на экране в строке ввода?
16. Как можно отказаться от услуги или прекратить ее выполнение, если обращение к услуге уже начато?

§3. Координатная плоскость. Декартовы и полярные координаты

Сразу после загрузки программы GRAN1 в окне “График” появляется изображение координатной плоскости с координатной сеткой, узлы которой отмечены точками. На осях абсцисс (горизонтальной) и ординат (вертикальной) указаны значения делений, через которые определяются масштабы вдоль этих осей (Рис. 1.1 и др.). Эти масштабы можно изменить с помощью услуги “График / Масштаб / Масштаб пользователя” (Рис. 1.2).

В пункте “График / Масштаб” есть два подпункта: “Автоматический масштаб” и “Масштаб пользователя” (Рис. 1.2).

В режиме “Автоматический масштаб” по программе автоматически устанавливаются масштабы вдоль осей Ox и Oy в зависимости от пределов, в которых изменяются абсциссы и ординаты при конкретных построениях (Рис. 3.1).

В режиме “Масштаб пользователя” можно установить произвольные пределы вдоль осей Ox и Oy, в которых будут строиться изображения. Достаточно обратиться к этому пункту меню и дальше в окне “Свойства окна “График”” на закладке “Масштаб” (Рис. 3.2) ввести минимальное ($MinX$) и максимальное ($MaxX$) значения координат вдоль оси Ox, а также минимальное ($MinY$) и максимальное ($MaxY$) значения координат вдоль оси Oy, которые желательно иметь при построении изображений (графиков, гистограмм, ломаных и т.д.). Тип масштабирования – автоматический масштаб или масштаб пользователя – также можно изменить с помощью кнопок панели инструментов, которая расположена слева от окна “График”. Кнопка “Ма” предназначена для выбора автоматического масштаба, а кнопка “Мк” – масштаба пользователя.

Минимальное и максимальное значения координат для обеих координатных осей также отображаются в окне “График”, если услугу “График / Масштаб / Показывать масштаб” отмечено меткой ☑ (Рис. 1.1, Рис. 1.2 и др.). Слева вверху в отдельной строке показано $MinX$ и $MaxY$, а слева внизу $MinY$ и $MaxX$. Отображение параметров масштаба включается или выключается с помощью услуги “График / Масштаб / Показывать масштаб”. Наличие метки ☑ свидетельствует о включенном отображении масштаба (Рис. 1.2).

Изменить масштаб можно с помощью “мыши”, увеличив некоторую часть окна “График” до размеров всего окна. Для этого в окне “График” необходимо указать две противоположных вершины прямоугольника, в который нужно заключить увеличиваемую часть изображения: установить курсор “мыши” в некоторую точку, нажать левую клавишу “мыши” и, не отпуская ее, перевести курсор в другую точку – противоположную вершину прямоугольника, после чего левую клавишу “мыши” отпустить.

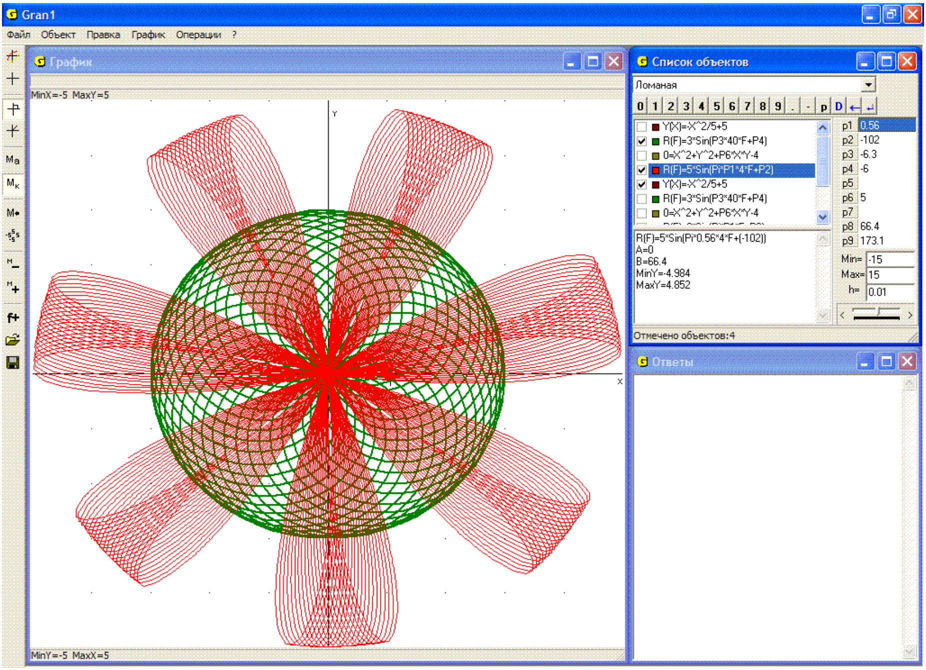


Рис. 3.1

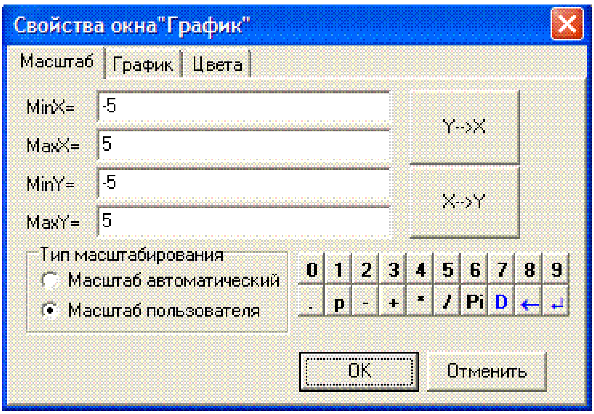


Рис. 3.2

Как только будет зафиксирована вторая вершина прямоугольника, в окне "График" строится увеличенная до размеров всего окна часть изображения, которая была заключена в прямоугольник. При этом автоматически изменяются соответствующим образом и масштабы вдоль осей Ox и Oy. Такая операция используется при необходимости уточнить вид графика в некоторой его части, координаты характерных его точек и т.п.

При необходимости фрагмент увеличенного изображения также можно увеличить, как и раньше.

На панели инструментов находятся кнопки “M_+” и “M_-”, с помощью которых также можно изменять масштаб. С помощью кнопки “M_+” (увеличить масштаб) значения каждого параметра масштаба увеличиваются вдвое, с помощью кнопки “M_-” (уменьшить масштаб) – уменьшаются вдвое. При необходимости с помощью услуги “График / Масштаб / Предыдущий масштаб” можно вернуться к предыдущему масштабу. Для этого же предназначена кнопка “$M_\leftarrow$” на панели инструментов.

По умолчанию масштаб устанавливается согласно Рис. 3.2 ($MinX = -5$, $MaxX = 5$, $MinY = -5$, $MaxY = 5$) – так называемый “начальный масштаб”. Этот масштаб можно установить, обратившись к услуге “График / Масштаб / Начальный масштаб” или “нажав” кнопку  на панели инструментов.

Вызвать вспомогательное окно “Свойства окна “График”” также можно, используя услугу “График / Параметры окна “График””, поскольку установление параметров окна не ограничивается только установлением масштаба.

На закладке “График” (Рис. 3.3) находятся следующие пункты:

- изображать оси координат или нет;
- изображать ли узлы координатной сетки;
- обозначения осей абсцисс и ординат (для решения некоторых задач бывает необходимо называть эти оси не X и Y, а иным образом);
- тип системы координат;
- установление типа и размера шрифтов, которые используются для написания меток и разметки осей координат.

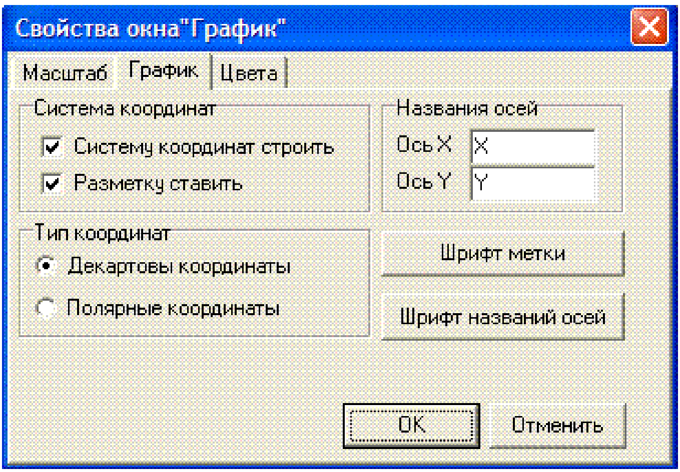


Рис. 3.3

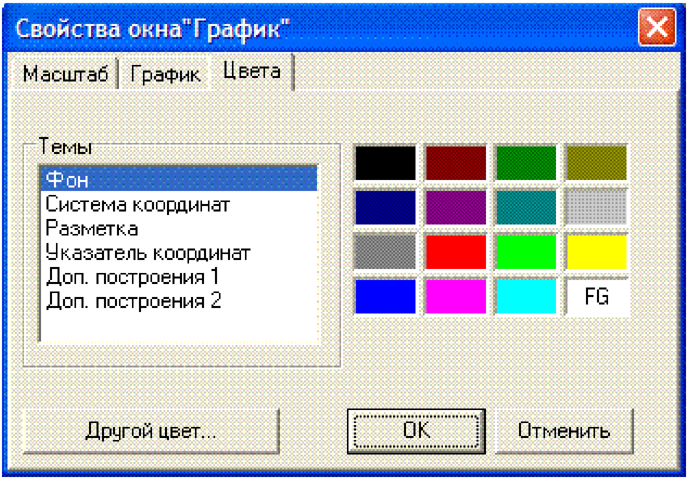

Свойства окна "График"
Масштаб
График
Цвета
Темы
Фон
Система координат
Разметка
Указатель координат
Доп. построения 1
Доп. построения 2
FG
Другой цвет...
OK
Отменить

Рис. 3.4

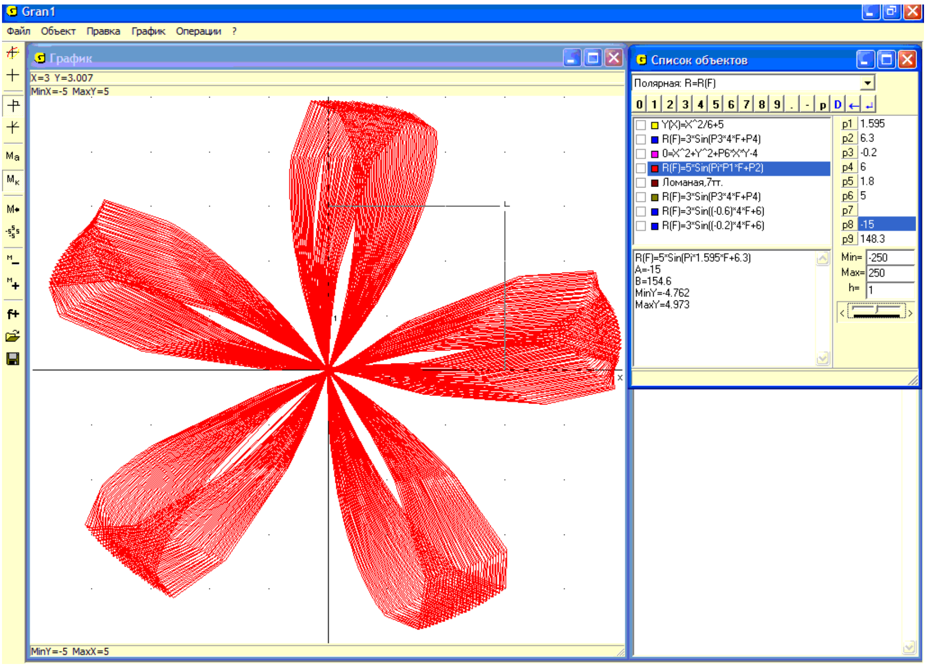

Gran1
Файл
Объект
Правка
График
Операции
?
График
X=3 Y=3.007
MinX=-5 MaxY=5
MinY=-5 MaxX=5
Список объектов
Полярная: R=R(F)
Y(X)=X^2/6+5
R(F)=3*Sin(P3*4*F+P4)
0=X^2+Y^2+P6*X*Y-4
R(F)=5*Sin(Pi*P1*F+P2)
Ломаная,7тт.
R(F)=3*Sin(P3*4*F+P4)
R(F)=3*Sin((-0.6)*4*F+6)
R(F)=3*Sin((-0.2)*4*F+6)
p1 1.595
p2 6.3
p3 -0.2
p4 6
p5 1.8
p6 5
p7
p8 -15
p9 148.3
R(F)=5*Sin(Pi*1.595*F+6.3)
A=-15
B=154.6
MinY=-4.762
MaxY=4.973
Min= -250
Max= 250
h= 1

Рис. 3.5

Используя закладку “Цвета”, можно изменить цвет фона, текста, координатных осей и других элементов (Рис. 3.4). Избранный цвет отмечается буквами “FG”.

В декартовой системе координат положение точки на плоскости определяется ее проекциями на ось Ox (абсцисса) и на ось Oy (ордината).

В полярной системе координат положение точки на плоскости определяется ее расстоянием от начала координат (полярный радиус) и углом между положительным направлением полярной оси (горизонтальной полупрямой, которая выходит из начала координат и направлена вправо) и отрезком, соединяющим рассматриваемую точку с началом координат. Этот угол (полярный угол) откладывается от полярной оси против часовой стрелки и изменяется в пределах от 0 до 2π.

Чтобы указать желаемый тип координат, следует на закладке “График” вспомогательного окна “Свойства окна “График”” установить переключатель на нужный пункт: “Декартовы координаты” или “Полярные координаты” (Рис. 3.3). Если указан тип “Полярные координаты”, то обозначение координатных осей отсутствует, хотя при этом не запрещается строить оси или узлы декартовой системы координат.

Указать тип координат можно также с помощью кнопок панели инструментов.

Определить координаты некоторой точки на плоскости можно одним из двух способов, в зависимости от того, используется “мышь” или клавиатура:

- переместить указатель “мыши” в окно “График”. При этом в окне появляется курсор (в виде крестика), центр которого совпадает с кончиком указателя “мыши”, а вверху слева в графическом окне выводятся координаты точки, в которую установлен указатель (Рис. 3.5). При перемещении “мыши” одновременно перемещается курсор и соответственно изменяются координаты точки, в которой находится курсор, пока указатель “мыши” находится в окне “График”. Если указатель “мыши” выходит за пределы окна, курсор или фиксируется в последнем положении, или исчезает;
- обратиться к услуге “График / Координаты с клавиатуры”. При этом происходит переход к окну “График”. Появляется курсор, управление которым осуществляется с помощью клавиш управления курсором клавиатуры: “←”, “→”, “↑”, “↓”. Если курсор доходит до предела окна, то он автоматически перемещается на противоположную сторону окна.

Таким способом можно найти координаты заранее определенной точки или же установить курсор в точку с заранее указанными координатами.

При использовании декартовой системы координат вид окна “График” показан на Рис. 3.5: изображены оси координат (если их изображение не выключено), а от курсора опущены перпендикуляры на оси (даже если сами оси не изображены). Координаты X и Y точки, в которой находится курсор, отображаются в специально отведенной строке в окне “График” (вверху слева). На Рис. 3.5 $X = 3$, $Y = 3.007$.

При использовании полярной системы координат вид окна “График” изменяется: курсор соединяется отрезком с началом координат, а в строке координат окна “График” отображаются полярные координаты точки – полярный радиус ρ, который в программе обозначается буквой R, и полярный угол φ в радианах и градусах, который обозначается буквой F (Рис. 3.6). На Рис. 3.6 $\rho = 5.36$, $\varphi = 0.9284\ (53.2^\circ)$.

От полярных координат к декартовым и наоборот можно перейти, используя формулы:

$$x = r\cos\varphi\,;\; y = r\sin\varphi\,;\; r = \sqrt{x^2 + y^2}\,;\; \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,.$$

При использовании услуг программы GRAN1 необходимость в соответствующих вычислениях отпадает.

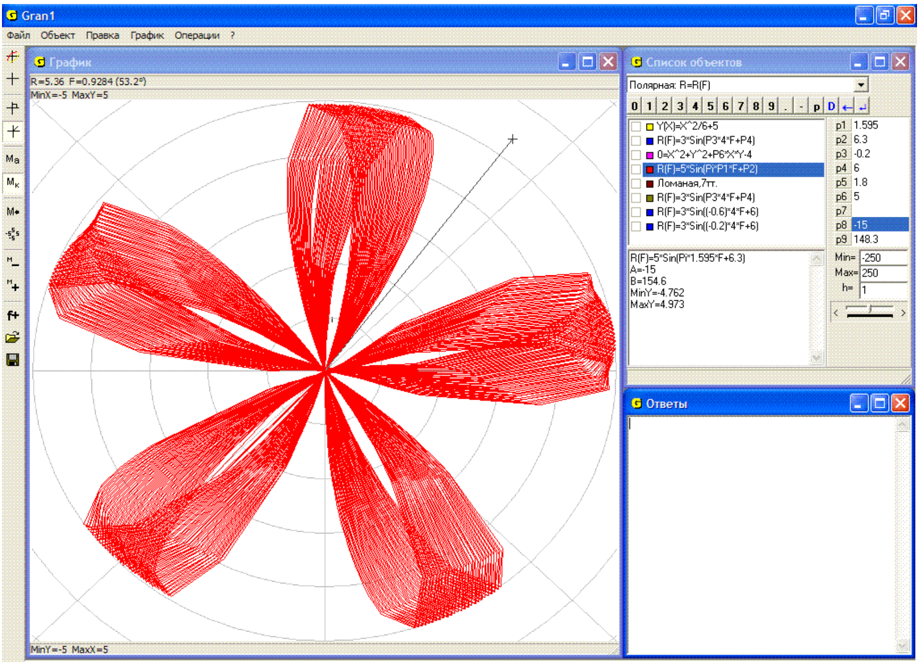


Рис. 3.6

Вопросы для самоконтроля

1. Как установить масштабы вдоль осей Ox и Oy ?
2. Как можно изменить масштаб измерения полярного угла?
3. Можно ли не выводить изображения координатных осей? Как изменить названия осей?
4. Как изменить цвет фона, осей, текста?
5. Как можно определить декартовы или полярные координаты некоторой точки?
6. Как установить курсор в точку с заданными координатами?
7. Как можно найти полярные координаты точки, зная ее декартовы координаты? Как найти декартовы координаты точки, зная ее полярные координаты?
8. Может ли полярный угол принимать значение: - 2? 4? 2?

§4. Ломаная линия. Длина ломаной

При необходимости построить ломаную линию нужно сначала указать тип зависимости между переменными *x* и *y* “Ломаная”, для чего достаточно указать соответствующий тип в окне “Список объектов” (Рис. 4.1).

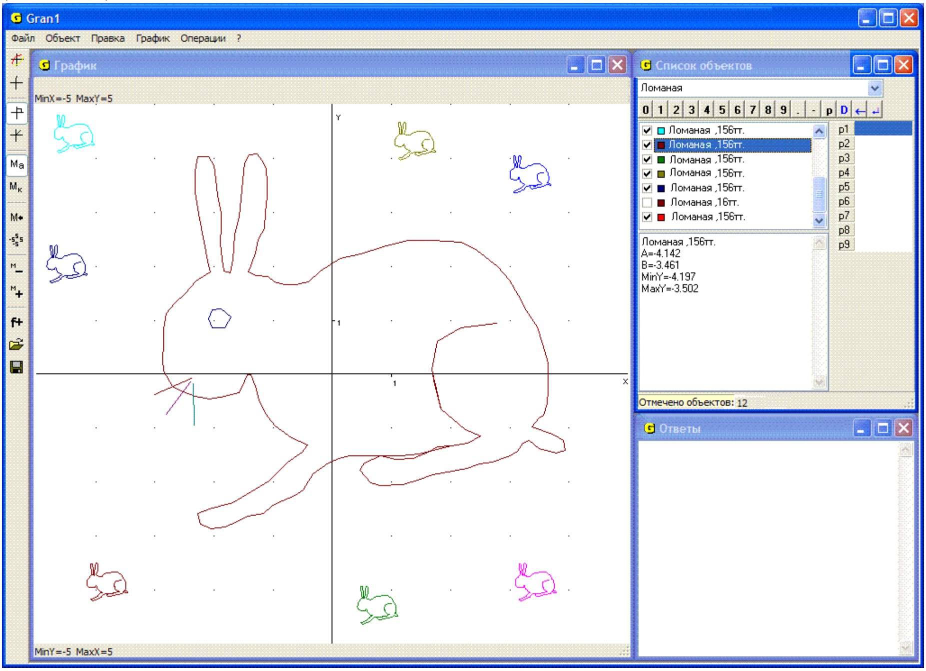


Рис. 4.1

Далее необходимо обратиться к услуге “Объект / Создать” или нажать кнопку “**f+**” на панели инструментов. В результате появляется окно “Координаты вершин ломаной” (Рис. 4.2).

Чтобы ввести координаты вершин ломаной, можно использовать клавиатуру, “мышь” или прочитать координаты вершин из текстового файла.

Для ввода координат вершин ломаной с помощью клавиатуры используется таблица ввода. Координаты вершин вводятся парами: абсцисса в столбце X, ордината в столбце Y. Переход к следующей вершине осуществляется нажатием клавиши “Enter” (или с ильпозованием клавиш управления курсором). Порядковые номера вершин отображаются в таблице слева. Общее количество вершин ломаной не должно превышать 10 000. Слева вверху над таблицей расположены три кнопки:

- кнопка  используется, когда нужно вставить новую вершину между теми, которые были введены ранее. Для этого нужно установить курсор в строку, следующую за той, после которой необходимо вставить координаты новой вершины, и “нажать” кнопку . В результате появляется пара новых пустых клеток, в которые записывают координаты новой вершины;

- кнопка  используется для удаления вершины, которая была введена ранее. Для этого нужно установить курсор в одну из клеток строки, где находятся координаты вершины, которую нужно удалить, и “нажать” кнопку . Строка удаляется, а все следующие строки смещаются вверх;
- кнопка  используется для очистки всей таблицы.

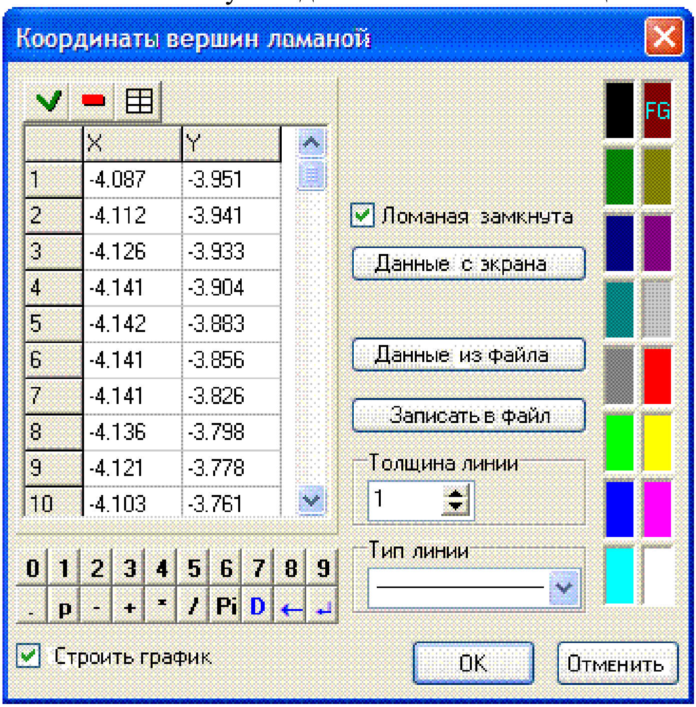


Рис. 4.2

После ввода координат вершин ломаной следует указать цвет ломаной, для чего нужно переставить указатель “FG” (Рис. 4.2) в соответствующее положение. При “нажатии” кнопки “ОК” будет сформирован новый объект типа “Ломаная”, а в окне “Список объектов” появится его имя в виде “Ломаная, 165 тт.” (Рис. 4.3), в котором также указано, из скольких звеньев составлена ломаная.

Если метка “Ломаная замкнута” (Рис. 4.2) установлена, то создается замкнутая ломаная, то есть ломаная, в которой первая и последняя вершины соединены. В противном случае ломаная не замкнута. Если при вводе ломаной ввести лишь две вершины, образуется отрезок, которым соединяются две указанные точки.

Вершины ломаной можно вводить “с экрана”, используя манипулятор “мышь”. Для этого необходимо в окне “Координаты вершин ломаной” “нажать” кнопку “Данные с экрана” (Рис. 4.2), после чего раскрывается окно “График” в измененном виде (Рис. 4.3).

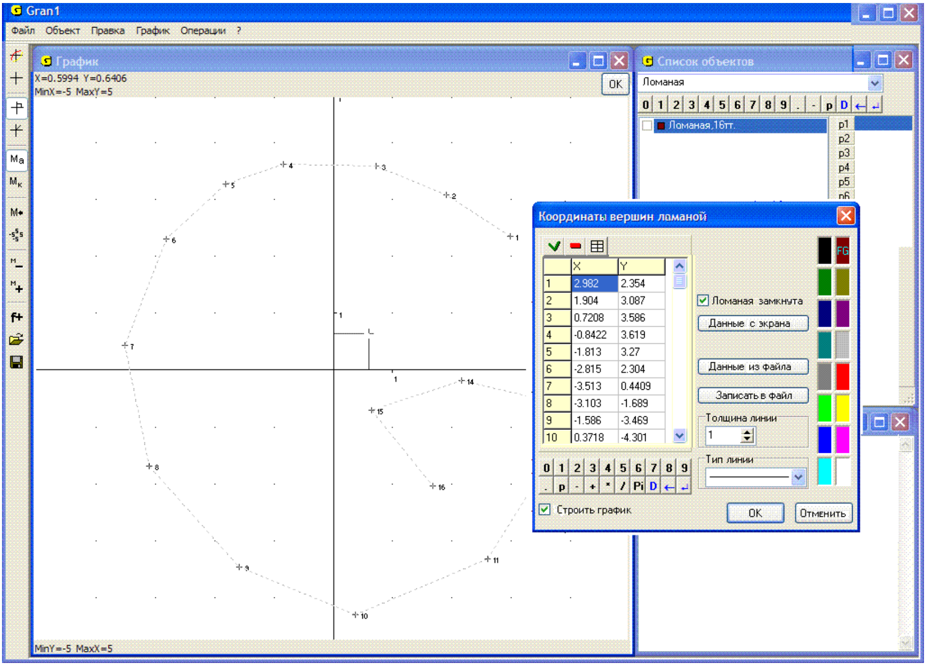


Рис. 4.3

От стандартного оно отличается наличием кнопки “ОК” в правом верхнем углу. Для ввода вершин ломаной необходимо поочередно установить курсор в нужные точки, нажимая каждый раз левую клавишу “мыши”. Каждая вершина метится крестиком, рядом с которым указывается номер вершины. Устанавливая курсор поочередно в вершины ломаной и фиксируя его в каждой из них, получим набор вершин ломаной (Рис. 4.3). После ввода последней вершины ломаной необходимо “нажать” кнопку “ОК” вверху справа в окне “График”.

После “нажатия” кнопки ОК номера вершин и их координаты показываются в таблице во вспомогательном окне “Координаты вершин ломаной” (Рис. 4.2, Рис. 4.3). При необходимости координаты точек можно откорректировать, добавить строки (воспользовавшись кнопкой ) или удалить строки (воспользовавшись кнопкой ). После “нажатия” кнопки ОК в окне “Координаты вершин ломаной” создание объекта будет завершено. Дальше с объектом можно выполнять операции, предусмотренные в программе, – строить график, изменять объект и другие.

Если необходимо вставить новые точки внутрь списка, следует избрать услугу “Объект изменить”, дальше в окне “Координаты вершин ломаной” указать строку, перед которой нужно вставить новую (установить курсор мыши на нужную строку и нажать левую клавишу мыши), после чего “нажать” кнопку . В результате номера указанной и всех следующих строк будут увеличены на 1, а на месте указанной появится пустая строка, в которую можно вводить координаты добавляемой точки.

Если строку нужно удалить, следует указать на неё, после чего “нажать” кнопку . В результате указанная строка удаляется, а номера всех следующих уменьшаются на 1.

Корректировку Ломаной можно осуществлять также “с экрана”. Для этого нужно обратиться к услуге “Объект / Изменить”, после чего появится вспомогательное окно “Координаты вершин ломаной”, в котором следует обратиться к услуге “Данные с экрана” (Рис. 4.2, Рис. 4.3). В результате появится вспомогательное окно “График”, в котором будут изображены вершины ломаной (Рис. 4.4). Установив курсор на нужную точку (точка будет заключена в квадратную рамку), нужно вызвать контекстное меню (нажав правую клавишу “мыши”).

Дальше следует обратиться к услуге “Вставлять перед точкой с этим номером”, если будут вставляться новые точки, или же к услуге “Удалить точку”, если указанную точку нужно удалить. Вставить перед точкой с указанным номером можно несколько точек. При этом каждый раз номера следующих точек увеличиваются на 1. При удалении точки номера всех следующих уменьшаются на 1.

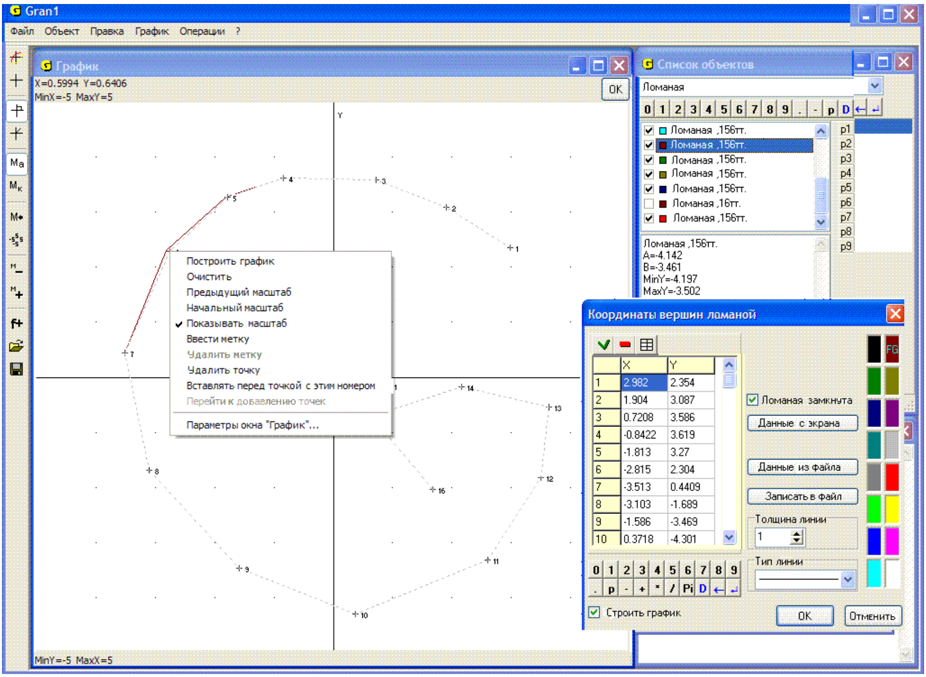


Рис. 4.4

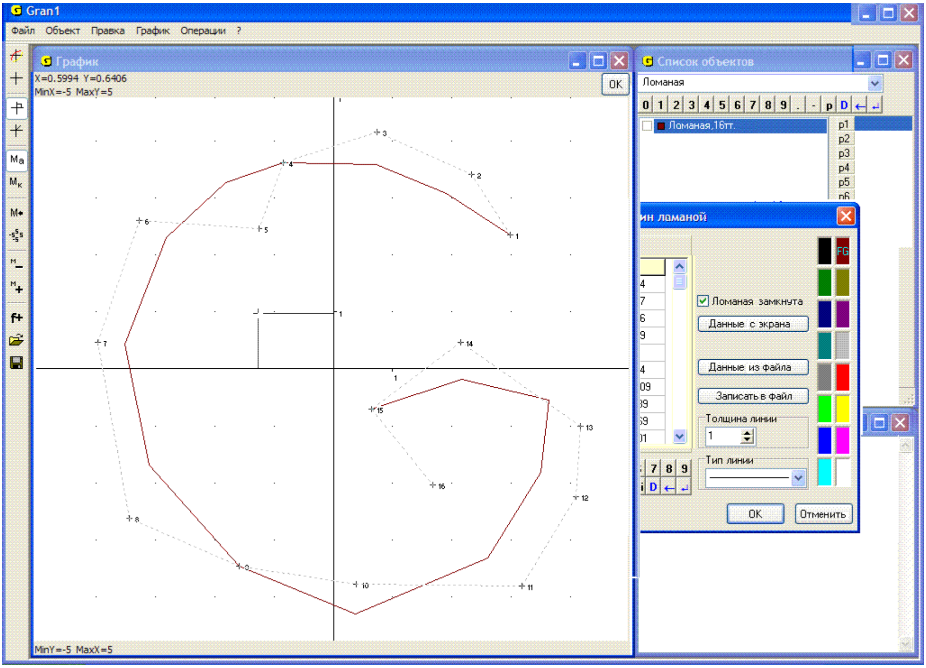


Рис. 4.5

Точки также можно перемещать на экране, для чего после обращения к услуге “Объект / Изменить” достаточно установить курсор мыши на точку, которую необходимо перемещать, нажать левую клавишу мыши и, удерживая ее, переместить мышь в нужном направлении. После освобождения левой клавиши мыши точка будет перемещена на новое место (Рис. 4.5). В окне “График” разными цветами изображаются исходная и измененная ломаные. Соответствующим образом после “нажатия” кнопки “ОК” изменяются и координаты смещенных точек (которые изображаются в окне “Координаты вершин ломаной”).

При создании ломаной можно вводить координаты вершин из файла на диске. Это можно сделать, воспользовавшись услугой “Данные из файла” во вспомогательном окне “Координаты вершин ломаной” (Рис. 4.2). При этом открывается стандартное вспомогательное окно, в котором необходимо указать нужный файл (Рис. 4.6).

Файл данных является обычным текстовым файлом, в котором в отдельных строках записаны пары координат вершин ломаной. Этот файл можно создать с помощью любого текстового редактора. Если ломаная создана одним из способов, которые указаны выше, то координаты ее вершин можно записать в текстовый файл, используя услугу “Записать в файл” во вспомогательном окне “Координаты вершин ломаной” (Рис. 4.2, Рис. 4.3).

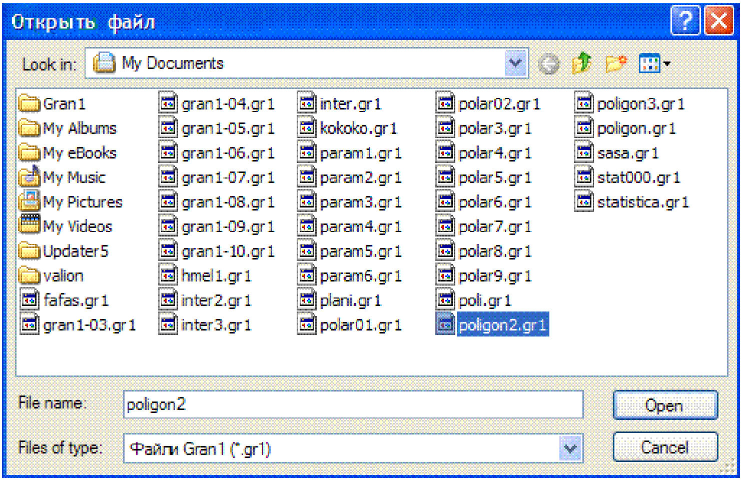


Рис. 4.6

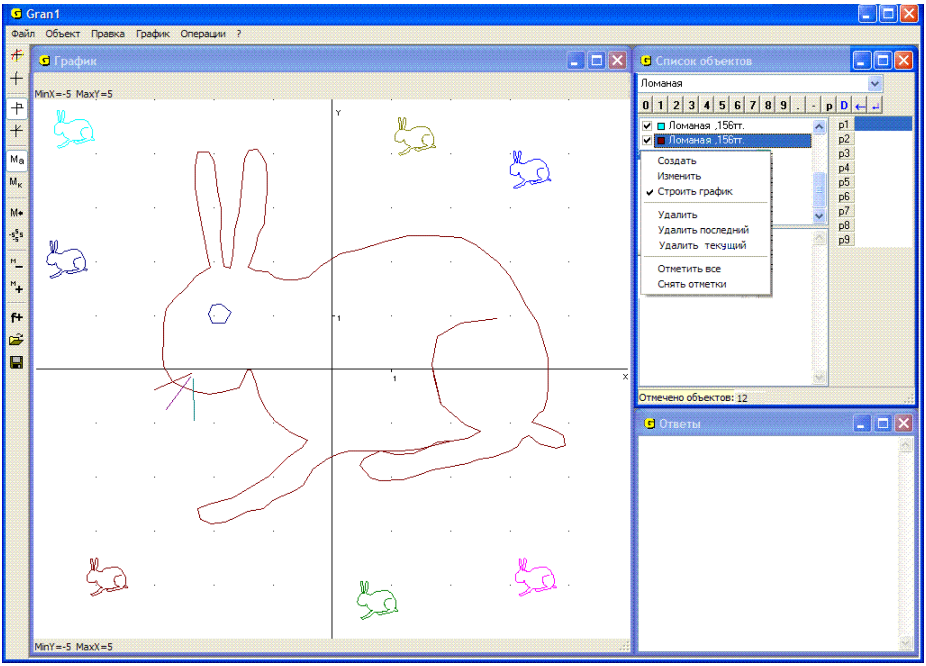


Рис. 4.7

После того, как все вершины ломаной введены, можно получить ее графическое изображение, для чего необходимо обратиться к услуге “График / Построить”. При этом в окне “График” будут построены графические образы лишь тех объектов, для которых отмечен меткой ☑ пункт “Строить график” во вспомогательном окне “Координаты вершин ломаной” (Рис. 4.2). Построить график можно также “нажав” кнопку на панели инструментов.

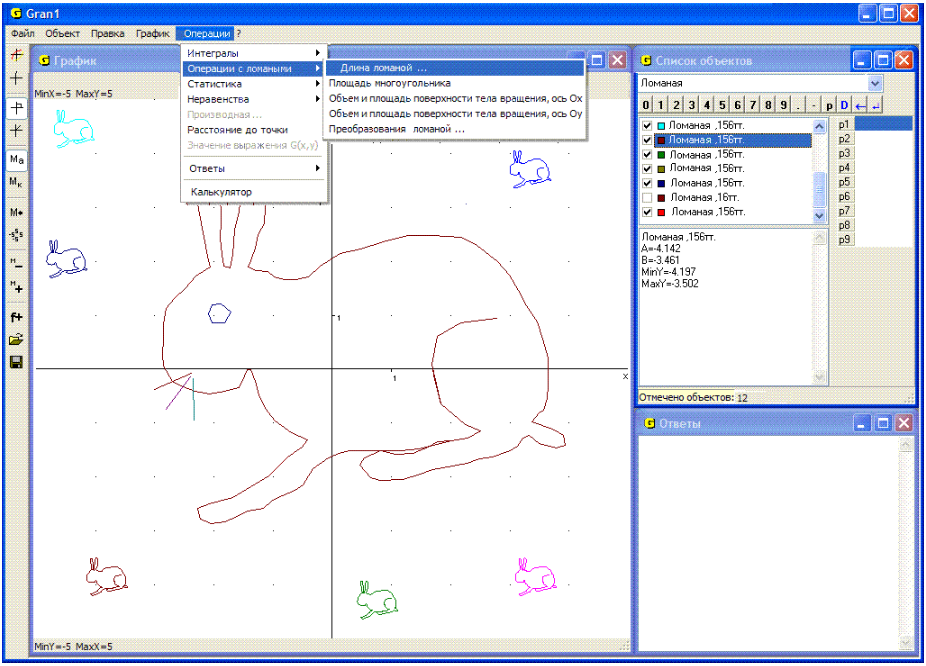


Рис. 4.8

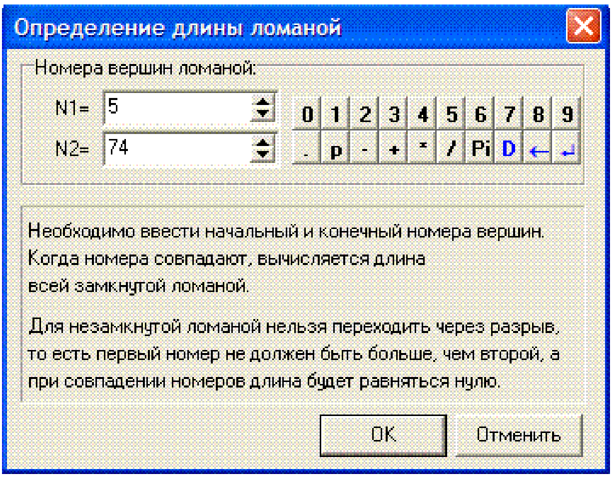


Рис. 4.9

Если объектов несколько, то воспользовавшись контекстным меню, которое вызывается нажатием правой кнопки “мыши”, когда курсор установлен в окне “Список объектов”, можно сразу поставить или снять метки около обозначений всех объектов, которые находятся в окне (Рис. 4.7).

Графики построенных объектов можно стереть, воспользовавшись услугой меню “График / Очистить” или “нажав” кнопку на панели инструментов. Чтобы восстановить стертые графики, следует воспользоваться услугой “График / Построить”.

При необходимости вычислить длину ломаной или ее участка можно воспользоваться услугой “Операции / Операции с ломаными / Длина ломаной...” (Рис. 4.8). При обращении к этой услуге появляется вспомогательное окно для ввода номеров вершин ломаной (Рис. 4.9). В этом окне следует указать номера первой “N1=” и последней “N2=” вершин ломаной, между которыми находится участок, длину которого необходимо вычислить. При этом номер вершины не может быть меньшим, чем 1, и большим количества вершин ломаной.

Если ломаная замкнута, то перебор точек “зацикливается”, то есть после наибольшего номера следует номер 1 и т.д. При вычислении длины участка замкнутой ломаной обход вершин ломаной осуществляется в порядке их ввода с зацикливанием от наибольшего номера к наименьшему. Это дает возможность вычислить длину любого участка замкнутой ломаной, сохраняя неизменным направление обхода ее контура. Если необходимо вычислить полную длину замкнутой ломаной (периметр многоугольника), необходимо в качестве начального и конечного номеров вершин участка ломаной указать один и тот же номер.

Для незамкнутой ломаной номер начальной вершины участка ломаной должен быть меньше, чем номер конечной. Если номера вершин указаны некорректно (первым указан больший номер, чем второй), то появляется сообщение об ошибке “Неправильно заданы номера вершин”, после чего следует повторить ввод номеров вершин.

После корректного ввода номеров вершин указанный участок ломаной закрашивается цветом, указанным в пункте “Дополнительные построения 1” закладки “Цвета” окна “Свойства окна “График”” (Рис. 3.4). В окне “Ответы” появляется новое сообщение с надписью “Длина ломаной” (Рис. 4.10), в котором указаны номера начальной и конечной вершин участка ломаной и длина этого участка. Перейти к этому окну можно с использованием манипулятора “мышь” или избрав услугу “Операции / Ответы / Просмотр ответов” (Рис. 4.11).

Сообщения, которые выводятся в окне “Ответы”, – это обычный текст, поэтому, отметив весь текст или его часть, можно занести его в буфер обмена для использования в других программах.

При необходимости внести изменения в ломаную, созданную ранее, следует обратиться к услуге “Объект / Изменить”, после чего опять появится окно ввода вершин ломаной (Рис. 4.2). При этом указатель в окне “Список объектов” должен быть установлен на нужный объект типа “Ломаная”. В таблицу координат вершин будут внесены координаты вершин текущей ломаной. Можно исправить координаты любой вершины, удалить отдельные вершины, удалив из таблицы соответствующие строки, или добавить новые вершины, вставляя их между другими согласно приведенным выше правилам.

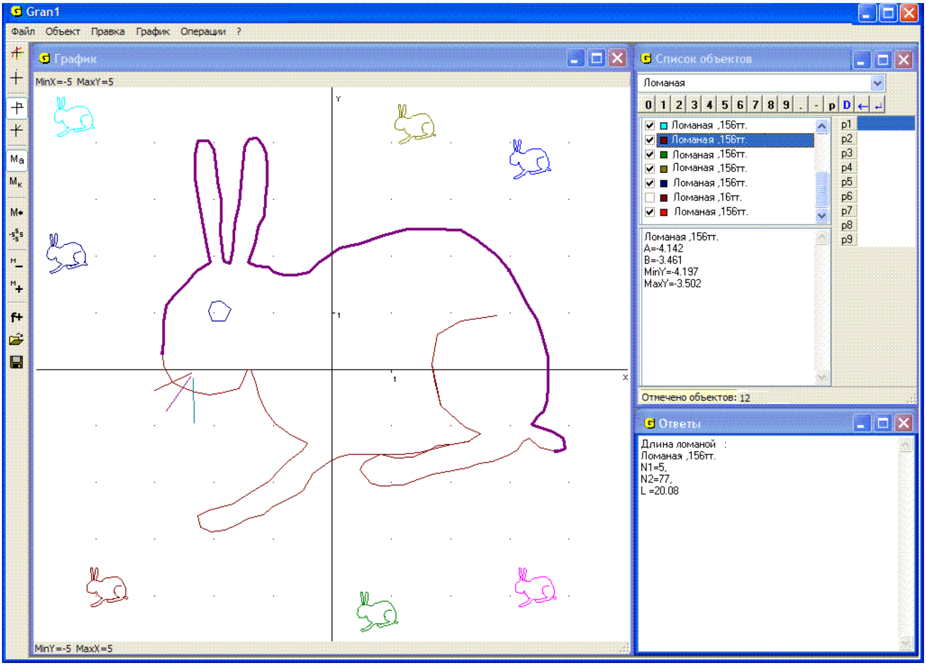


Рис. 4.10

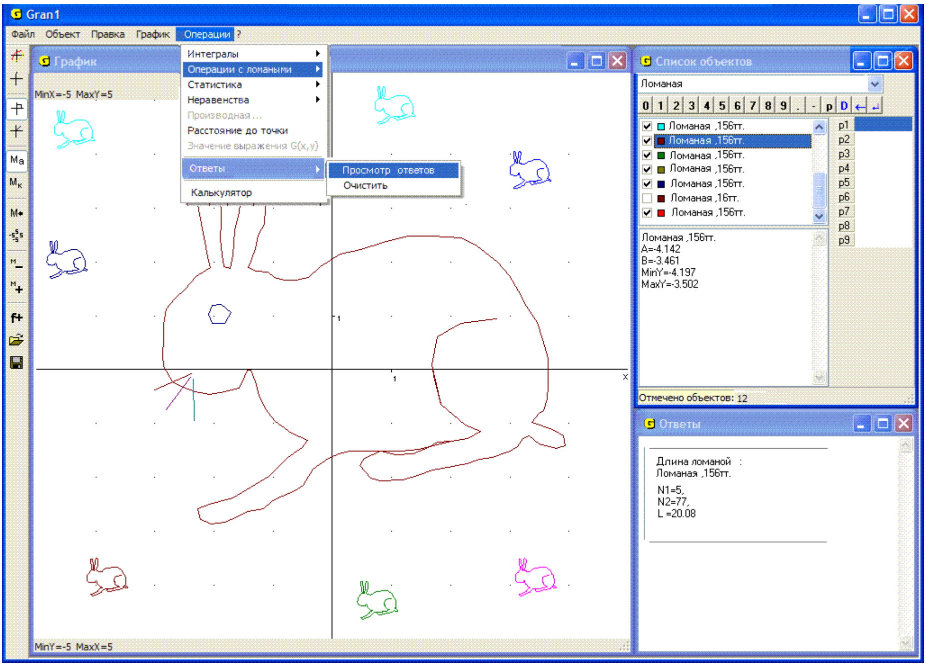


Рис. 4.11

Вопросы для самоконтроля

1. Какой тип зависимости между координатами x и y нужно установить перед вводом набора вершин ломаной линии?
2. Сколько вершин может содержать таблица, с помощью которой задают ломаную линию?
3. Как указать, рассматривается замкнутая или незамкнутая ломаная?
4. Как указать, что ввод вершин ломаной окончен?
5. Как узнать, сколько вершин содержит ломаная?
6. Как вычислить длину некоторого участка ломаной?
7. Как вычислить периметр многоугольника, заданного в виде замкнутой ломаной?
8. Как вычислить длину стороны многоугольника между вершинами, указанными первой и последней?
9. Как ввести таблицу из предварительно подготовленного файла?
10. Как ввести ломаную с экрана?
11. Как можно внести изменения в ранее введенную таблицу?
12. Что произойдёт, если при обращении к услуге “Объект / Изменить” указать, что ломаная замкнута, если раньше было указано, что незамкнута (и наоборот), а в самой таблице ничего не менять?
13. Как построить изображение только некоторых ломаных, обозначения которых указаны в окне “Список объектов”?
14. Как отметить обозначения ломаных, изображения которых необходимо построить?
15. Как, используя операции над ломаной, вычислить расстояние между двумя точками?

Упражнения для самостоятельного выполнения

1. Ввести ломаные из предварительно подготовленных файлов и определить количество вершин и длину каждой из них.
2. Ввести с экрана ломаную с 10 вершинами, а затем, используя услугу “Объект / Изменить”, вставить еще две вершины между 3-й и 4-й и между 7-й и 8-й вершинами, не вводя заново ранее введенные вершины.
3. Построить график 1-й и 3-й ломаных, если введены 5 разных ломаных.
4. Ввести с экрана четыре разные ломаные такие, чтобы после построения их графиков образовалось слово “ПЛОТ”.
5. Треугольник задан координатами своих вершин: (0, 0), (3, 4), (4, 2). Построить на экране изображение этого треугольника и вычислить длины всех его сторон, а также периметр.
6. Ввести с экрана произвольную замкнутую ломаную с не менее чем 20 вершинами и вычислить ее длину.

§5. Преобразования ломаной

Для выполнения некоторых операций над ломаными линиями можно воспользоваться услугой “Операции / Операции с ломаными / Преобразования ломаной...” (Рис. 5.1). Операции выполняются над текущим объектом типа “Ломаная”. При обращении к услуге появляется вспомогательное окно с тремя закладками: “Деформация”, “Поворот”, “Пар. перенос” (параллельный перенос).

При необходимости осуществить деформацию ломаной следует перейти на закладку “Деформация” (Рис. 5.2) и ввести коэффициент деформации dx вдоль оси Ox и коэффициент деформации dy вдоль оси Oy. Ввод осуществляется с клавиатуры или с использованием панели ввода данных. После ввода коэффициентов необходимо “нажать” кнопку “ОК”. В результате создается новый объект – ломаная, у которой координаты x_i всех вершин умножаются на dx, а координаты y_i – на dy. Новая ломаная создается на основе текущей независимо от того, построено ли ее изображение в окне “График”.

Если $dx = -1$, $dy = 1$, получится фигура, симметричная к исходной относительно оси Oy, при $dx = 1$, $dy = -1$ – относительно оси Ox, $dx = -1$, $dy = -1$ – относительно начала координат. Если $|dx| = |dy|$, то получится фигура, подобная исходной (Рис. 5.3).

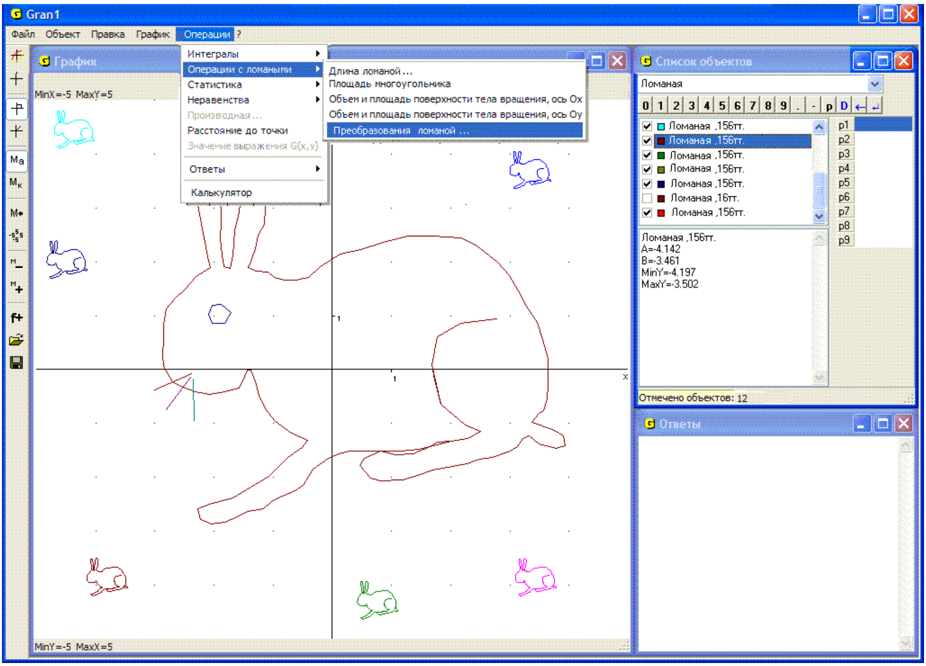


Рис. 5.1

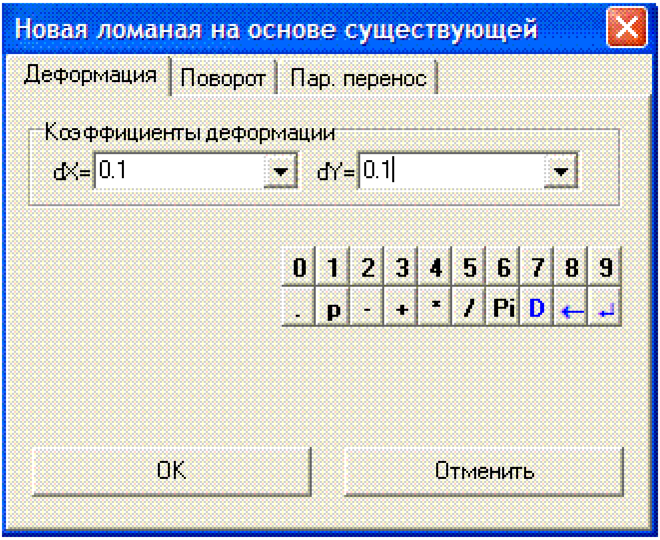

Новая ломаная на основе существующей
Деформация
Поворот
Пар. перенос
Коэффициенты деформации
dX= 0.1
dY= 0.1
OK
Отменить

Рис. 5.2

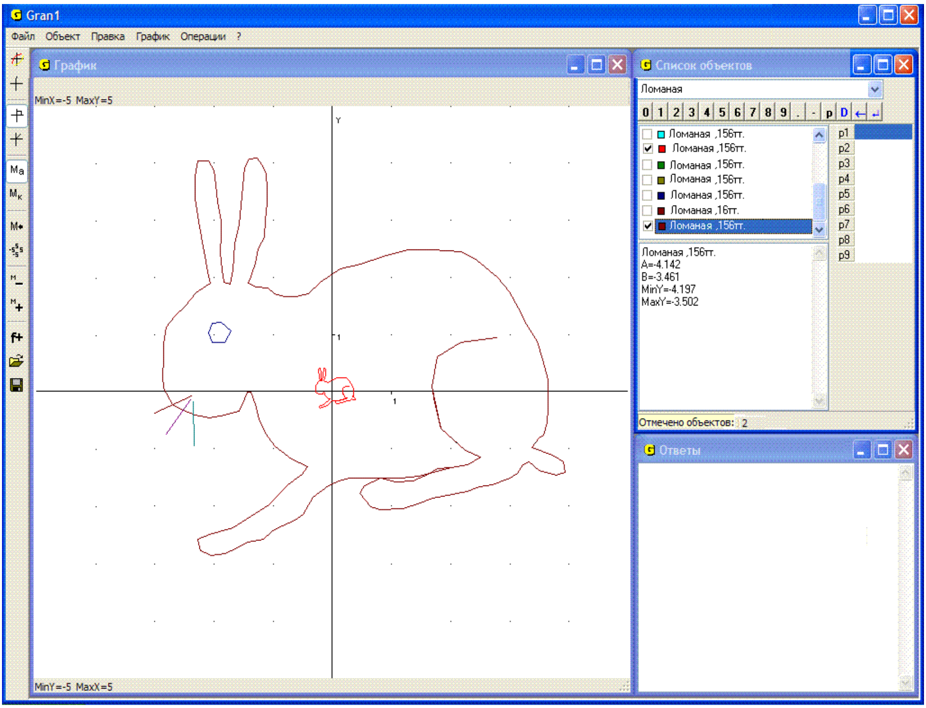

Gran1
Файл Объект Правка График Операции ?
График
MinX=-5 MaxY=5
MinY=-5 MaxX=5
Список объектов
Ломаная ,156тт.
Ломаная ,16тт.
Ломаная ,156тт.
A=-4.142
B=-3.461
MinY=-4.197
MaxY=-3.502
Отмечено объектов: 2
Ответы

Рис. 5.3

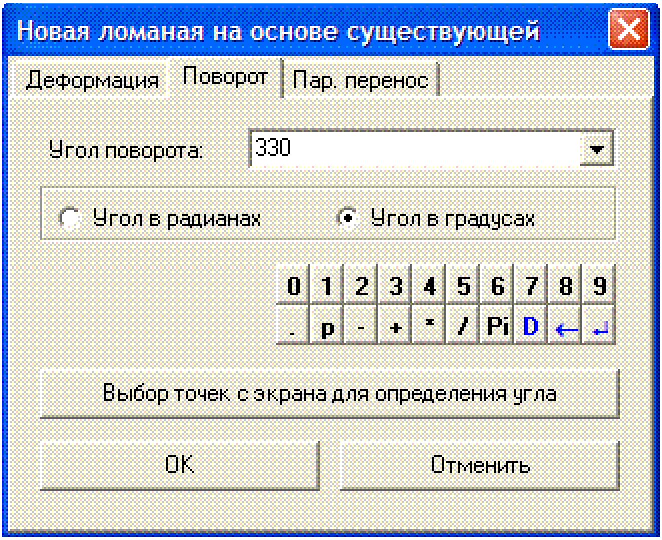


Рис. 5.4

При необходимости осуществить поворот ломаной следует перейти на закладку “Поворот” и указать значение угла поворота ломаной вокруг начала координат (Рис. 5.4). Значение угла вводится с клавиатуры, панели ввода данных или с экрана.

“Нажатие” кнопки “OK” приводит к созданию нового объекта – ломаной, которая получается из указанной после поворота.

При этом для отмеченной ломаной происходит поворот системы координат на указанный угол ($-\gamma$) (по часовой стрелке), а сама ломаная относительно системы координат поворачивается на угол γ (против часовой стрелки с центром поворота в начале координат).

Чтобы указать угол поворота с клавиатуры, следует ввести значение угла поворота в соответствующую строку, которое вводится так же, как и любые другие числа. Угол поворота можно указывать в радианах (принято по умолчанию) или в градусах. Выбор единицы измерения осуществляется с помощью манипулятора “мышь” или клавиш управления курсором (Рис. 5.4).

Если координаты x, y некоторой вершины выразить через ее полярные координаты:

$$x = \rho\cos\alpha,\ y = \rho\sin\alpha,$$

то после поворота системы координат на угол γ новые координаты этой же вершины будут

$$x' = \rho\cos(\alpha-\gamma),\quad y' = \rho\sin(\alpha-\gamma),$$

то есть новые координаты (x', y') через исходные (x, y) можно выразить таким образом:

$$x' = \rho\cos\alpha\cos\gamma + \rho\sin\alpha\sin\gamma = x\cos\gamma + y\sin\gamma,$$

$$y' = \rho\sin\alpha\cos\gamma - \rho\cos\alpha\sin\gamma = -x\sin\gamma + y\cos\gamma.$$

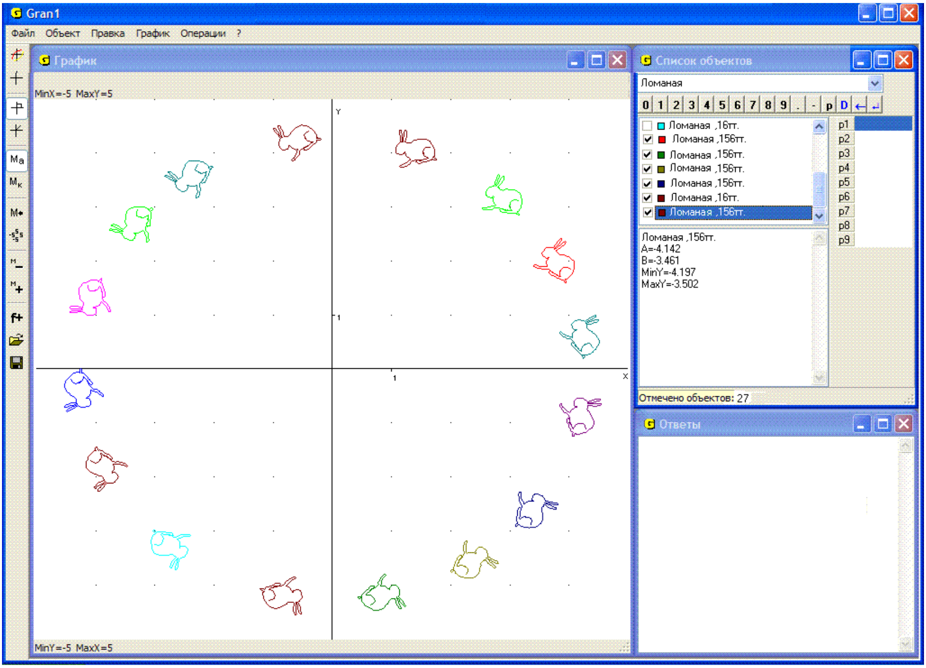


Рис. 5.5

Аналогично, чтобы выразить исходные координаты (x, y) некоторой вершины через ее новые координаты (x', y'), достаточно повернуть новую систему координат на угол $(-\gamma)$. Если угол между радиусом-вектором точки (x', y') и осью Ox' равен α', тогда $x' = \rho\cos\alpha'$, $y' = \rho\sin\alpha'$, а после поворота системы координат на угол $(-\gamma)$ (на угол γ по часовой стрелке) получим:

$$x = \rho\cos(\alpha' + \gamma) = \rho\cos\alpha'\cos\gamma - \rho\sin\alpha'\sin\gamma = x'\cos\gamma - y'\sin\gamma,$$

$$y = \rho\sin(\alpha' + \gamma) = \rho\sin\alpha'\cos\gamma + \rho\cos\alpha'\sin\gamma = x'\sin\gamma + y'\cos\gamma.$$

По указанным формулам вычисляются новые координаты x_i', y_i' вершин преобразованной ломаной, исходя из координат (x_i, y_i) вершин исходной ломаной, и таким образом получается новая ломаная, представляющая собой результат поворота исходной ломаной на угол γ с центром поворота в начале системы координат xOy. На Рис. 5.5 показаны результаты поворота некоторой ломаной на разные углы.

Угол поворота можно задать и с экрана, “нажав” предварительно кнопку “Выбор точек с экрана для определения угла” (Рис. 5.4). После обращения к этой услуге на экране появляется координатный курсор, соединенный отрезком прямой с началом координат, и разметка полярной системы координат. Установив курсор по очереди в две разные точки на плоскости, можно задать тем самым угол между радиусами-векторами этих точек, чем и определяется угол поворота предварительно указанной фигуры вокруг начала координат (Рис. 5.6). Выбор точек осуществляется аналогично тому, как задаются вершины ломаной с экрана: указываются две точки, после чего нужно нажать кнопку “ОК” в окне “График”(Рис. 5.6).

При этом в верхнем левом углу окна “График” указываются полярные координаты точек 1 и 2, то есть полярный радиус и полярный угол (а не разность полярных углов точек 2 и 1, то есть угол, на который осуществляется поворот). После установления точек 1 и 2 следует “нажать” кнопку ОК в правом верхнем углу окна “График”, после чего появится вспомогательное окно “Новая ломаная на основе существующей”, в строке “Угол поворота” которого указан угол, на который будет поворачиваться ломаная (разность полярных углов точек 2 и 1) (Рис. 5.4). При необходимости угол поворота можно подкорректировать. Дальше следует “нажать” кнопку “ОК” в этом вспомогательном окне. В результате будет создан новый объект – новая ломаная, полученная на основе ранее указанной, а затем также построено графическое изображение так полученного объекта.

Если указать третью точку, то первая исчезнет, вторая перенумеруется в первую, а третья будет считаться второй. Если же количество указанных точек будет меньше двух, появится сообщение “Необходимо отметить 2 точки”.

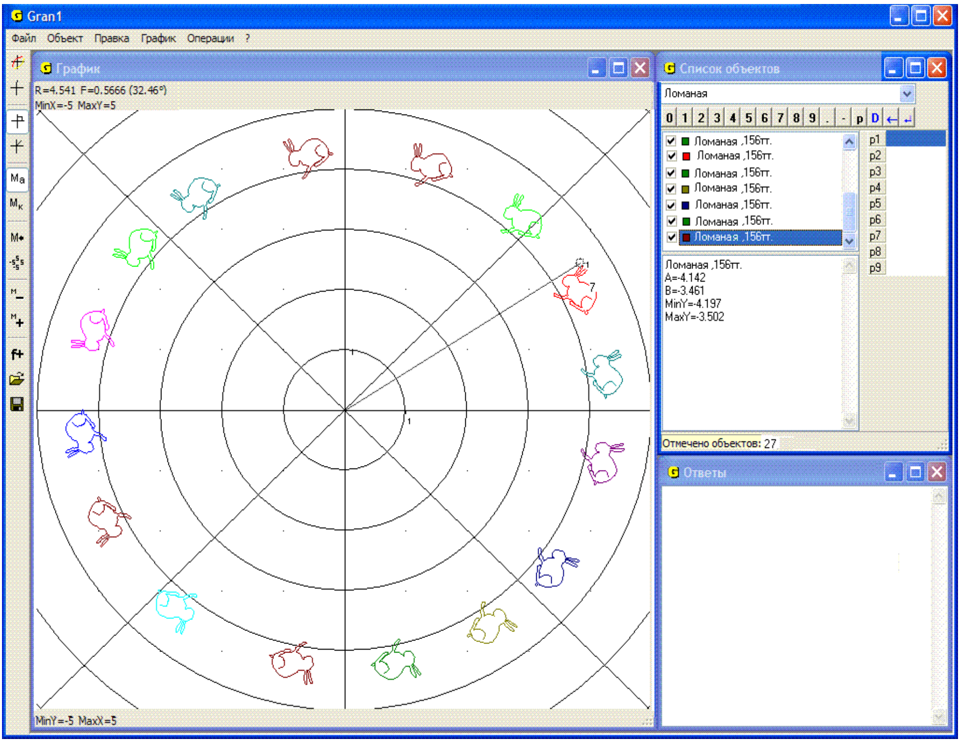


Рис. 5.6

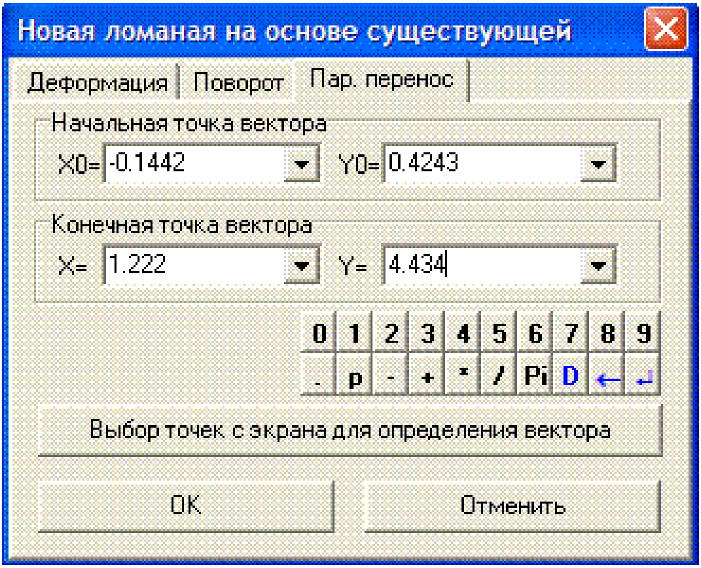

Новая ломаная на основе существующей
Деформация
Поворот
Пар. перенос
Начальная точка вектора
X0= -0.1442
Y0= 0.4243
Конечная точка вектора
X= 1.222
Y= 4.434
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
. p - + * / Pi D
Выбор точек с экрана для определения вектора
OK
Отменить

Рис. 5.7

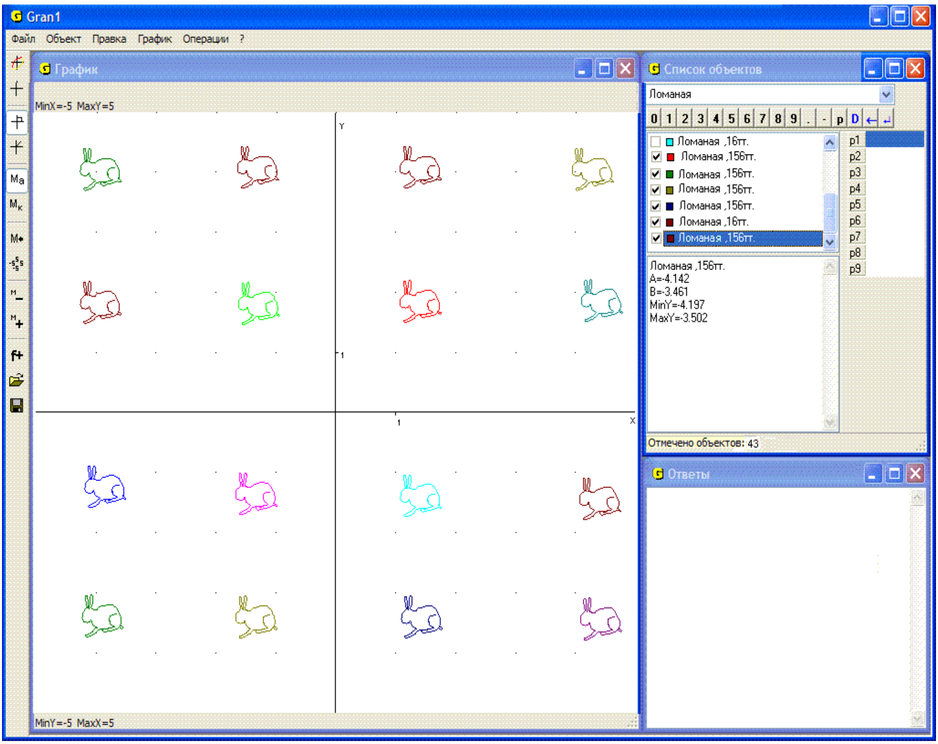

Gran1
Файл Объект Правка График Операции ?
График
MinX=-5 MaxY=5
MinY=-5 MaxX=5
Список объектов
Ломаная
Ломаная ,16тт.
Ломаная ,156тт.
Ломаная ,156тт.
Ломаная ,156тт.
Ломаная ,156тт.
Ломаная ,16тт.
Ломаная ,156тт.
p1
p2
p3
p4
p5
p6
p7
p8
p9
Ломаная ,156тт.
A=-4.142
B=-3.461
MinY=-4.197
MaxY=-3.502
Отмечено объектов: 43
Ответы

Рис. 5.8

При обращении к закладке “Параллельный перенос” следует ввести координаты исходной и конечной точек, через которые определяется вектор переноса. В поле “Исходная точка вектора” вводятся начальные координаты (x_0, y_0) какой-либо точки, а в поле “Конечная точка вектора” – новые координаты (x, y) точки, в которую необходимо переместить точку (x_0, y_0) (Рис. 5.7). “Нажав” кнопку “ОК”, получим новую ломаную (Рис. 5.8), все вершины которой (x_i', y_i') получаются из вершин (x_i, y_i) исходной ломаной добавлением приращений $\Delta x = x - x_0$ к абсциссам x_i и $\Delta y = y - y_0$ к ординатам y_i.

После нажатия кнопки “Выбор точек с экрана для определения вектора” можно избрать исходную и конечную точки вектора, поочередно указав их на координатной плоскости так же, как это делалось при задании с экрана угла поворота. Можно указать лишь одну точку – исходную точку вектора, а другую ввести с клавиатуры или с панели ввода данных.

На Рис. 5.8 можно увидеть несколько ломаных, полученных в результате параллельного переноса одной из них на разные векторы.

Следует помнить, что исходная ломаная, которая преобразовывается, остается в памяти компьютера неизменной, а результат преобразования размещается в конце списка объектов, при этом цвет линии устанавливается автоматически.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие преобразования ломаной можно выполнить, используя услуги программы GRAN1?
2. Как указать обозначение ломаной, которую предусматривается преобразовать?
3. Как получить ломаную, симметричную к данной относительно: оси Ox? оси Oy? начала координат?
4. Как получить фигуру, подобную данной?
5. Как осуществить параллельный перенос ломаной с использованием клавиатуры для ввода данных?
6. Сохраняется ли преобразованная ломаная как отдельный объект?
7. Как указать угол, на который необходимо повернуть ломаную?
8. Можно ли указывать отрицательный угол поворота?
9. Можно ли указать коэффициент подобия, угол поворота или вектор переноса, не пользуясь клавиатурой?
10. Как, используя услуги программы GRAN1, повернуть ломаную вокруг произвольной точки координатной плоскости?

Упражнения для самостоятельного выполнения

1. Построить отрезок, соединяющий две произвольные точки на экране.
2. Повернуть отрезок, полученный в результате выполнения упражнения 1:
   - на угол $\frac{\pi}{3}$,
   - на угол $120°$.

3. Из отрезков, полученных в результате выполнения упражнений 1 и 2, построить два параллелограмма, используя параллельный перенос.
4. Построить произвольную ломаную, а затем выполнить операции ее деформации с коэффициентами: $dx = 1,\ dy = -1$; $dx = -1,\ dy = 1$; $dx = -1,\ dy = -1$; $dx = 2,\ dy = 2$; $dx = 0.2,\ dy = -2$; $dx = -0.5, dy = -2$; $dx = -0.2, dy = -0.4$.
5. Построить треугольник с вершинами (1, 1), (1, 4), (3, 2). Используя услуги программы GRAN1, построить треугольники, которые получаются из заданного: поворотом на 20° вокруг вершины (1,1); поворотом на $\frac{1}{2}$ вокруг вершины (1, 4); поворотом на $\frac{\pi}{4}$ вокруг вершины (3, 2); поворотом на π вокруг начала координат; деформацией с коэффициентами: $dx = 1, dy = -1$; $dx = 0.2, dy = 0.2$; $dx = -2, dy = -2$; $dx = -2, dy = 1$.

§6. Площадь многоугольника. Углы многоугольника

При необходимости вычислить площадь многоугольника, ограниченного некоторой замкнутой ломаной (без самопересечений) с произвольным количеством вершин (не больше 10000), можно воспользоваться услугой “Операции / Операции с ломаными / Площадь многоугольника” (Рис. 6.1). Для этого необходимо предварительно отметить обозначение ломаной в окне “Список объектов”. Если ни одна из ломаных не отмечена, вычисляется площадь многоугольника для текущего объекта (когда этот объект – замкнутая ломаная). При вычислении площади многоугольника в окне “Ответы” появляется сообщение, в котором указаны сведения о ломаной и площадь многоугольника (Рис. 6.2). Если соответствующий многоугольник изображен в окне “График”, он заштриховывается.

Если в окне “Список объектов” отмечены несколько замкнутых ломаных, то вычисляются площади каждого из многоугольников, которые ограничены этими ломаными, а полученные результаты складываются. В окне “Ответы” выводятся сведения обо всех ломаных и сумма их площадей (Рис. 6.3). При наложении отдельных частей многоугольников общие участки могут не заштриховываться.

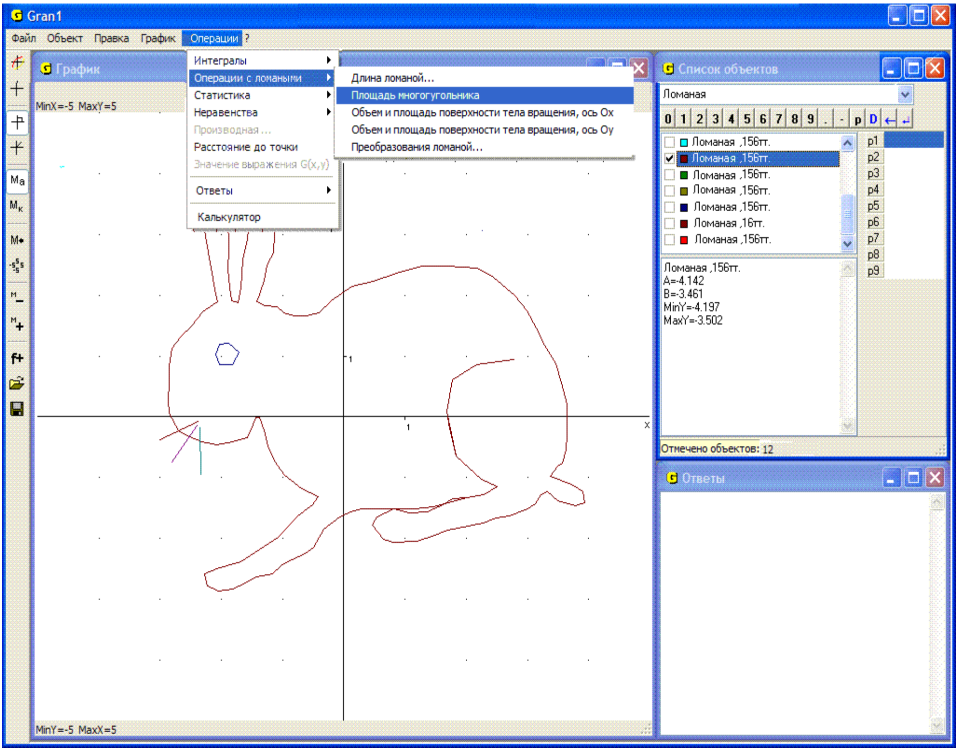


Рис. 6.1

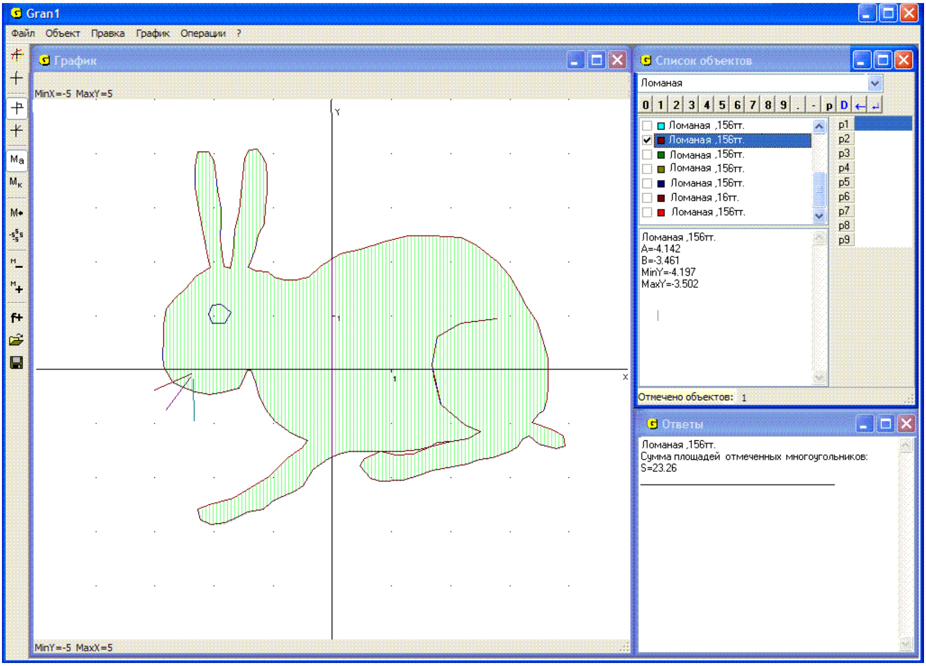

Gran1
Файл Объект Правка График Операции ?
График
MinX=-5 MaxY=5
MinY=-5 MaxX=5
Список объектов
Ломаная
Ломаная ,156тт.
Ломаная ,16тт.
A=-4.142
B=-3.461
MinY=-4.197
MaxY=-3.502
Отмечено объектов: 1
Ответы
Ломаная ,156тт.
Сумма площадей отмеченных многоугольников:
S=23.26

Рис. 6.2

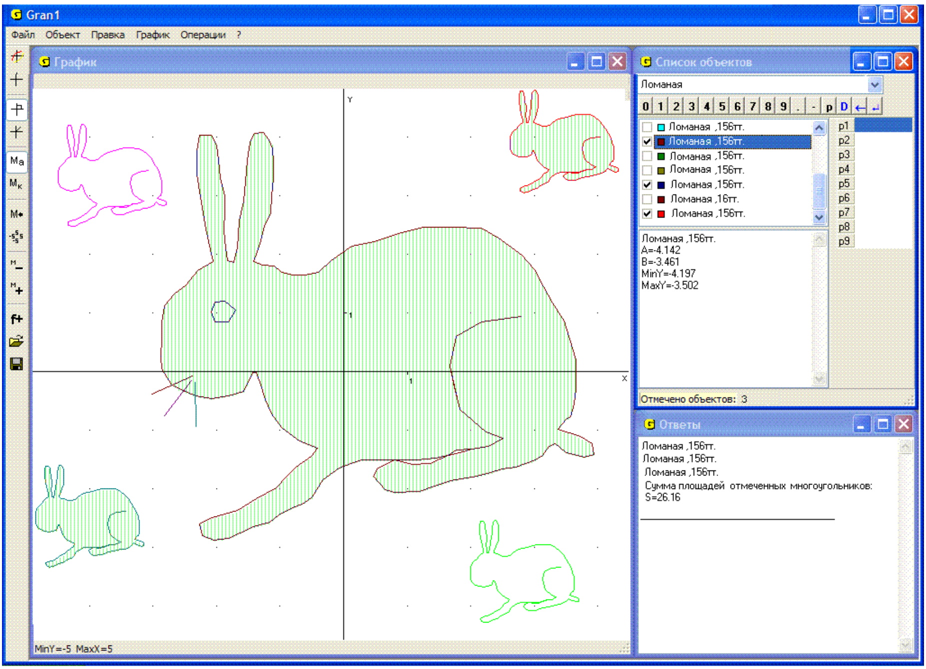

Gran1
Файл Объект Правка График Операции ?
График
MinY=-5 MaxX=5
Список объектов
Ломаная
Ломаная ,156тт.
Ломаная ,16тт.
A=-4.142
B=-3.461
MinY=-4.197
MaxY=-3.502
Отмечено объектов: 3
Ответы
Ломаная ,156тт.
Ломаная ,156тт.
Ломаная ,156тт.
Сумма площадей отмеченных многоугольников:
S=26.16

Рис. 6.3

Примеры

1. Вычислить площадь треугольника с вершинами (1, 1) (4, 2) (3, 4).

Установив в окне “Список объектов” тип объекта “Ломаная”, обратимся к услуге “Объект / Создать”, введем указанные вершины ломаной с клавиатуры, с панели ввода данных или с экрана (лучше с клавиатуры или с панели ввода данных), и укажем, что ломаная замкнута (при необходимости можно также указать цвет линии) (Рис. 6.4). Дальше, обратившись к услуге “График / Построить”, построим графическое изображение введенной ломаной. С помощью услуги “График / Масштаб / Масштаб пользователя” можно подобрать соответствующий масштаб для получения наиболее удобного изображения. Обратившись затем к услуге “Операции / Операции с ломаными / Площадь многоугольника”, получим ответ в окне “Ответы” – площадь данного треугольника равна $S = 3.5$ (Рис. 6.5).

2. Координаты вершин замкнутого многоугольника определяются по формулам $\left(x_i, \sqrt{1 - x_i^{\,2}}\right)$. Вычислить площадь замкнутого 29-угольника, абсциссы и ординаты вершин которого указаны в таблице:

x_i	-1	-0.995	-0.99	-0.98	-0.95	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6
y_i	0	0.10	0.14	0.20	0.31	0.44	0.60	0.71	0.80

x_i	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_i	0.87	0.92	0.95	0.98	0.99	1	0.99	0.98	0.95	0.92	0.87

x_i	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.98	0.99	0.995	1
y_i	0.80	0.71	0.60	0.44	0.31	0.20	0.14	0.10	0

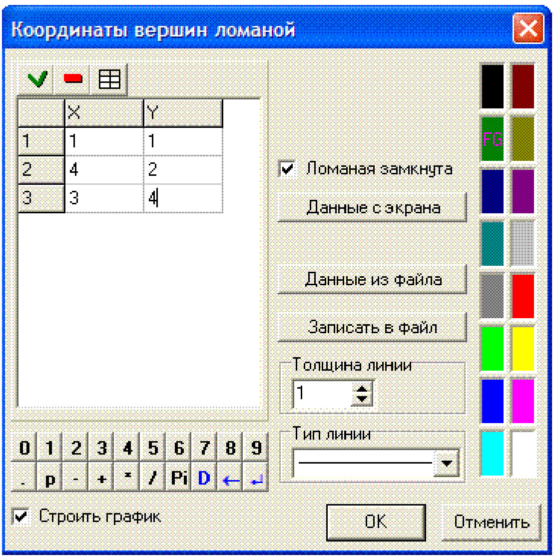


Рис. 6.4

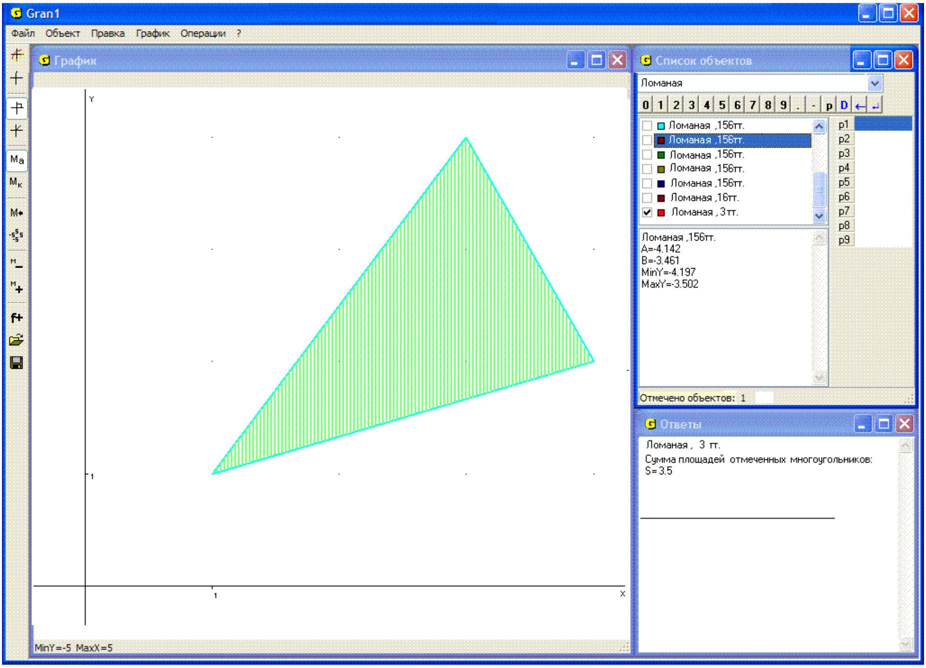

Gran1
Файл Объект Правка График Операции ?
График
Список объектов
Ломаная
Ломаная ,156тт.
Ломаная ,16тт.
Ломаная , 3 тт.
A=-4.142
B=-3.461
MinY=-4.197
MaxY=-3.502
Отмечено объектов: 1
Ответы
Ломаная , 3 тт.
Сумма площадей отмеченных многоугольников:
S=3.5
MinY=-5 MaxX=5

Рис. 6.5

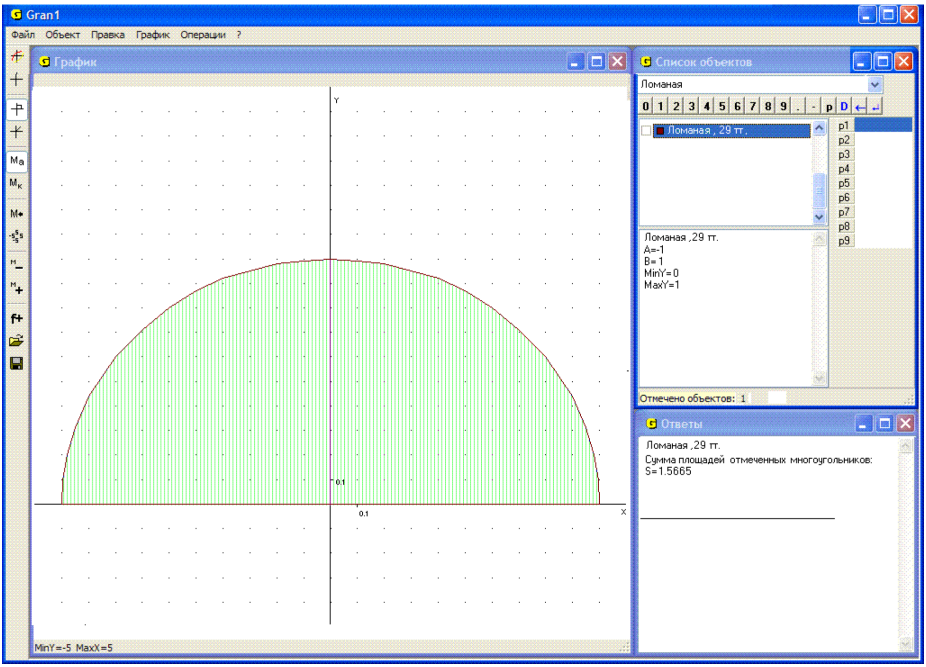

Gran1
Файл Объект Правка График Операции ?
График
Список объектов
Ломаная
Ломаная , 29 тт.
Ломаная ,29 тт.
A=-1
B=1
MinY=0
MaxY=1
Отмечено объектов: 1
Ответы
Ломаная ,29 тт.
Сумма площадей отмеченных многоугольников:
S=1.5665
MinY=-5 MaxX=5

Рис. 6.6

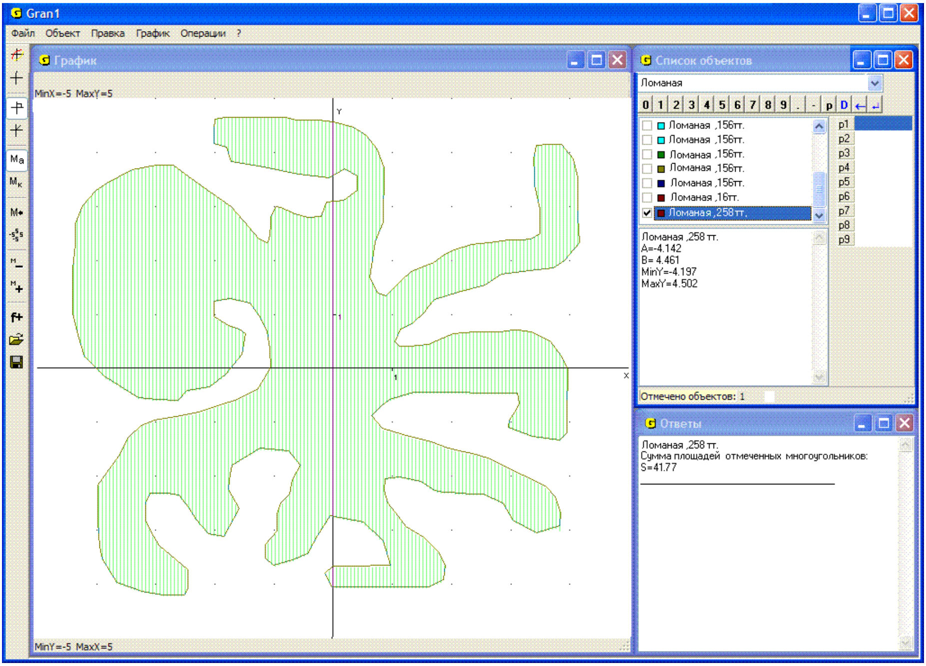


Рис. 6.7

Установив тип зависимости “Ломаная”, введем новую замкнутую ломаную с отмеченными 29 вершинами и построим ее изображение, обратившись к услуге “График / Построить”. Воспользовавшись затем услугой “Операции / Операции с ломаными / Площадь многоугольника”, получим: площадь рассмотренного 29-угольника равна 1.5665≈1.57 (Рис. 6.6).

Заметим, что найденная площадь приближенно равна площади полукруга радиуса 1, то есть $\dfrac{\pi}{2}$.

3. С экрана введены 258 вершин замкнутой ломаной. Найти площадь многоугольника, ограниченного этой ломаной.

Построив изображение заданной ломаной и обратившись к услуге “Операции / Операции с ломаными / Площадь многоугольника”, получим – площадь рассмотренного многоугольника равна 41.77 (Рис. 6.7).

При необходимости определить угол при некоторой вершине многоугольника достаточно сначала выполнить параллельный перенос этого многоугольного так, чтобы рассматриваемая вершина совпала с началом координат. Затем, установив тип координат “Полярные координаты” с помощью услуги “График / Параметры окна “График”” на закладке “График”, нужно определить углы, образованные сторонами многоугольника, которые выходят из отмеченной вершины (после параллельного переноса – из начала координат), с осью Ox, и найти их разность. В результате получим необходимый угол.

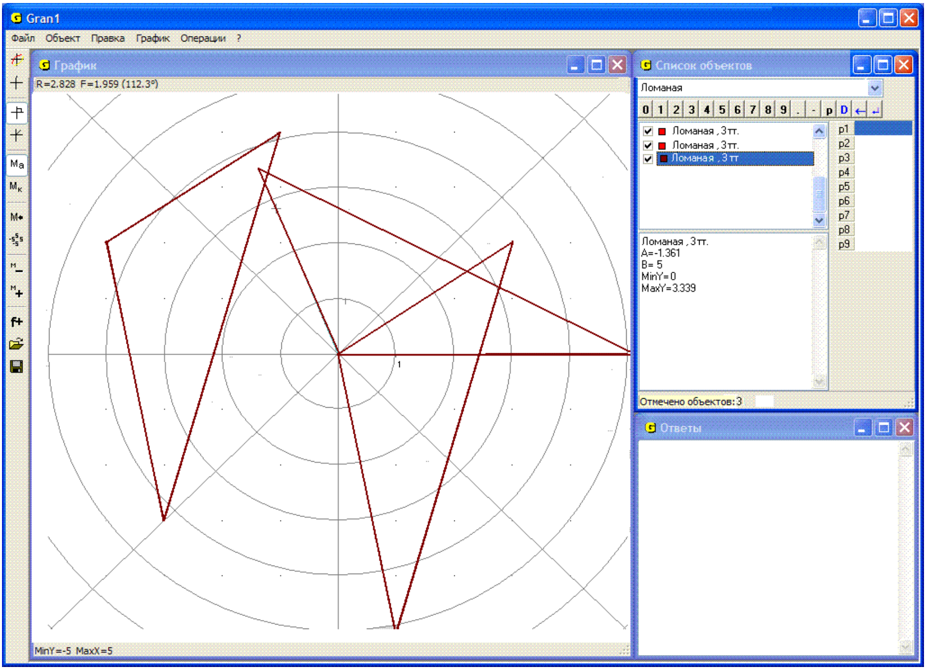

Gran1
Файл Объект Правка График Операции ?
График
R=2.828 F=1.959 (112.3°)
MinY=-5 MaxX=5
Список объектов
Ломаная
Ломаная , 3тт.
Ломаная , 3тт.
Ломаная , 3 тт
Ломаная , 3тт.
A=-1.361
B= 5
MinY=0
MaxY=3.339
Отмечено объектов: 3
Ответы

Рис. 6.8

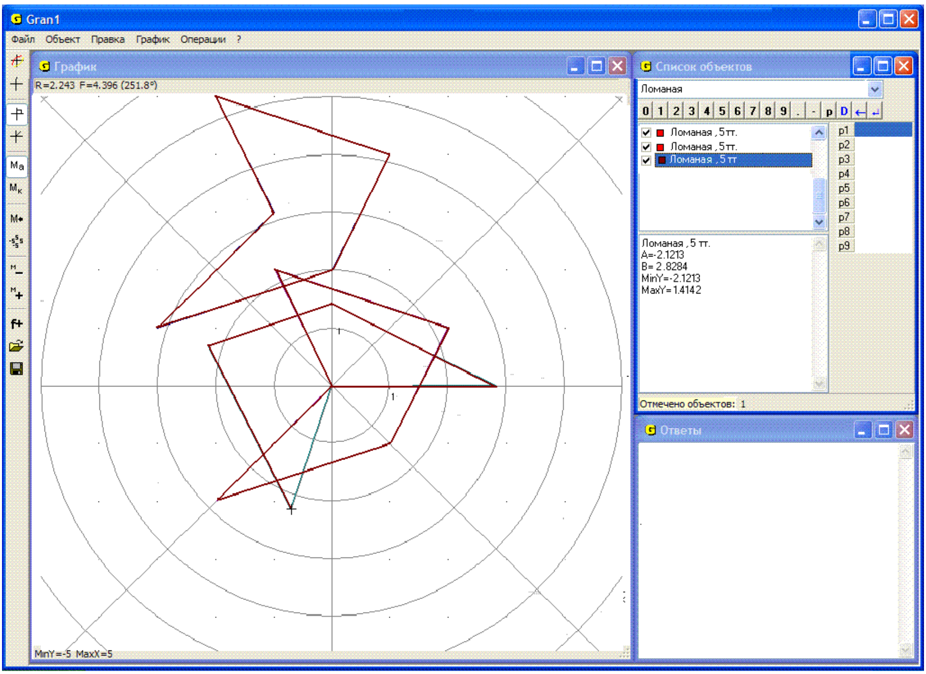

Gran1
Файл Объект Правка График Операции ?
График
R=2.243 F=4.396 (251.8°)
MinY=-5 MaxX=5
Список объектов
Ломаная
Ломаная , 5тт.
Ломаная , 5тт.
Ломаная , 5 тт
Ломаная , 5 тт.
A=-2.1213
B= 2.8284
MinY=-2.1213
MaxY=1.4142
Отмечено объектов: 1
Ответы

Рис. 6.9

Другой путь – после переноса рассмотренной вершины в начало координат выполнить поворот многоугольника так, чтобы направление одной из сторон, которая выходит из рассмотренной вершины (после параллельного переноса – из начала координат) совпало с направлением оси Ox. Для этого удобно при обращении к услуге "Операции / Операции с ломаными / Преобразование ломаной..." на закладке "Поворот" "нажать" кнопку "Выбор точек с экрана для определения угла" и указать начальное направление радиуса-вектора, через который определяется угол поворота, совпадающее с направлением одной из сторон, выходящей из рассмотренной вершины, а конечное направление – с направлением оси Ox. После поворота, установив полярные координаты с помощью услуги "График / Параметры окна "График"" на закладке "График", можно определить угол между другой стороной, выходящей из рассмотренной вершины, и осью Ox (а значит и с первой стороной).

Угол поворота можно ввести и с клавиатуры после параллельного переноса, предварительно установив тип координат "Полярные координаты" с помощью услуги "График / Параметры окна "График"".

4. Определить углы треугольника с вершинами (-4, 2) (-3, -3) (-1, 4).

Построим замкнутую ломаную с указанными вершинами. Перенесем по очереди вершины в начало координат, используя параллельный перенос, и повернем полученные треугольники до совпадения направления одной из сторон, выходящей из начала координат, с направлением оси Ox. Установив тип координат "Полярные координаты" с помощью услуги "График / Параметры окна "График"", получим (Рис. 6.8): угол при вершине (-4, 2) равен 1.96 радиан (112.3º) (Рис. 6.8); угол при вершине (-3,-3) равен 0.48 радиан (27.3º); угол при вершине (-1, 4) равен 0.70 радиан (40.4º).

5. Определить углы пятиугольника с вершинами (-3, 1) (0, 2) (1, 4) (-2, 5) (-1, 3).

Построив пятиугольник с указанными вершинами, последовательно определим углы при каждой из вершин, используя при необходимости услугу "Поворот" пункта "Операции / Операции с ломаными / Преобразования ломаной". Получим: угол при вершине (-3, 1) равен 0.47 (≈27º); угол при вершине (0, 2) равен 2.36 (≈135.2º); угол при вершине (1, 4) равен 1.43 (≈82º); угол при вершине (-2, 5) равен 0.78 (≈44.7º); угол при вершине (-1, 3) равен 4.40 (≈251.8º) (Рис. 6.9).

Вопросы для самоконтроля

1. Обязательно ли нужно построить многоугольник прежде, чем обращаться к услуге "Операции / Операции с ломаными / Площадь многоугольника"?
2. Сколько вершин должна содержать ломаная, ограничивающая многоугольник, площадь которого необходимо вычислить?
3. Могут ли у ломаной, ограничивающей многоугольник, площадь которого вычисляется с использованием услуги "Операции / Операции с ломаными / Площадь многоугольника", быть самопересечения?

4. Как, используя услугу “Операции / Операции с ломаными / Площадь многоугольника”, вычислить площадь треугольника? параллелограмма? трапеции? произвольного четырехугольника? пятиугольника?
5. Должен ли многоугольник, площадь которого вычисляется с использованием услуги “Операции / Операции с ломаными / Площадь многоугольника”, быть выпуклым?
6. Можно ли использовать услугу “Операции / Операции с ломаными / Площадь многоугольника”, если координаты вершин введены с экрана? из файла?
7. Как вычислить площади отдельных многоугольников, которые образуются при самопересечении ломаной?
8. Сколько вершин должно быть у ломаной, чтобы могло получиться самопересечение?

Упражнения для самостоятельного выполнения

1. Вычислить площади следующих многоугольников: треугольника с вершинами (-1, 3) (3 -2) (4, 5); трапеции с вершинами (0, 0) (2, 5) (4, 5) (6, 0); параллелограмма с вершинами (0, 0) (0, 3) (4, 4) (4, 7).
2. Вычислить площадь, ограниченную замкнутой ломаной с вершинами (0, 0), (0, 5), (4, 0), (4, 6), если вершины указаны в порядке их обхода.
3. Вычислить площадь, ограниченную замкнутой ломаной, координаты вершин которой равны $\left(x_i, \dfrac{1}{x_i}\right)$, если абсциссы x_i принимают значения 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
4. Вычислить площадь, ограниченную незамкнутой ломаной с вершинами из упражнения 3, а также прямыми $x = 1, x = 7, y = 0$.
5. Вычислить площади многоугольников, получаемых из указанных в упражнениях 1–4 их деформацией с коэффициентами: $dx = 1,\ dy = 2$; $dx = 2, dy = 2$; $dx = -2, dy = 1$; $dx = -2, dy = -2$.
6. Определить углы многоугольников, заданных координатами вершин в порядке их обхода: (-1, -4), (-4, 2), (4, 4); (0, 0), (4, 1), (1, 4); (-4, -4), (4 -2), (3, 4), (-4, 3), (0, 2), (-2, -1); (4, 4), (4, 7), (0, 3).
7. Найти сумму углов многоугольника с вершинами, указанными в порядке их обхода: (-5, -4), (0 -3), (-5, 4), (2 -1), (5, 2), (2, 2), (0, 5), (-2, 2), (-5, 2), (-2, -1).

§7. Простейшие планиметрические задачи на построение. Решение треугольников

Для решения многих планиметрических задач на построение необходимо иметь возможность построить окружность заданного радиуса и с заданным центром, или окружность с заданным центром и некоторой точкой на окружности, или окружность, которая проходит через три заданные точки и т.п. Имея возможность строить такие окружности, а также отрезки прямых, соединяющих заданные точки, выполнять параллельный перенос и поворот отрезков и ломаных, можно решать планиметрические задачи, для решения которых традиционно использовались циркуль и линейка.

Для построения окружности с использованием услуг программы GRAN1 следует установить тип объекта "Окружность" в окне "Список объектов". При обращении к услуге "Объект / Создать" появляется вспомогательное окно с двумя закладками.

Первая из закладок используется для задания окружности через координаты центра окружности и радиус. Необходимо ввести координаты центра окружности в строках "X0=" и "Y0=" и радиус в строке "R=" с клавиатуры или с использованием панели ввода данных (координаты центра и радиус окружности могут быть заданы через параметры $P1$, $P2$, …, $P9$) (Рис. 7.1). Строки, в которых вводятся координаты и радиус, представляют собой списки, которые раскрываются, и при создании нескольких окружностей все предыдущие значения координат центров и радиусов заносятся в эти списки.

Поэтому при повторном создании окружности координаты центра или радиус можно вводить с использованием данных из этого списка (Рис. 7.2). Для каждой строки ввода создается отдельный список значений. Использование кнопки "Выбор центра окружности с экрана" позволяет указать центр окружности на координатной плоскости с помощью "мыши" или клавиатуры.

Использование второй закладки окна "Окружность" позволяет создать окружность по координатам центра и любой точки, которая лежит на окружности (Рис. 7.3).

Для этого необходимо ввести координаты центра окружности в строках "X0=" и "Y0=" и координаты точки на окружности в строках "X1=" и "Y1=" с клавиатуры, с использованием панели ввода данных или из списка, если раньше создавались другие окружности. При этом координаты обеих точек могут быть заданы через параметры $P1$, $P2$, …, $P9$.

Указать обе точки можно и с экрана, воспользовавшись кнопкой "Выбор точек с экрана". После "нажатия" кнопки "Выбор точек с экрана" необходимо в окне "График" координатный курсор установить и зафиксировать сначала в центре окружности, а затем в некоторой точке на окружности (аналогично тому, как вводились с экрана точки при задании ломаной, вектора переноса ломаной и т.п.).

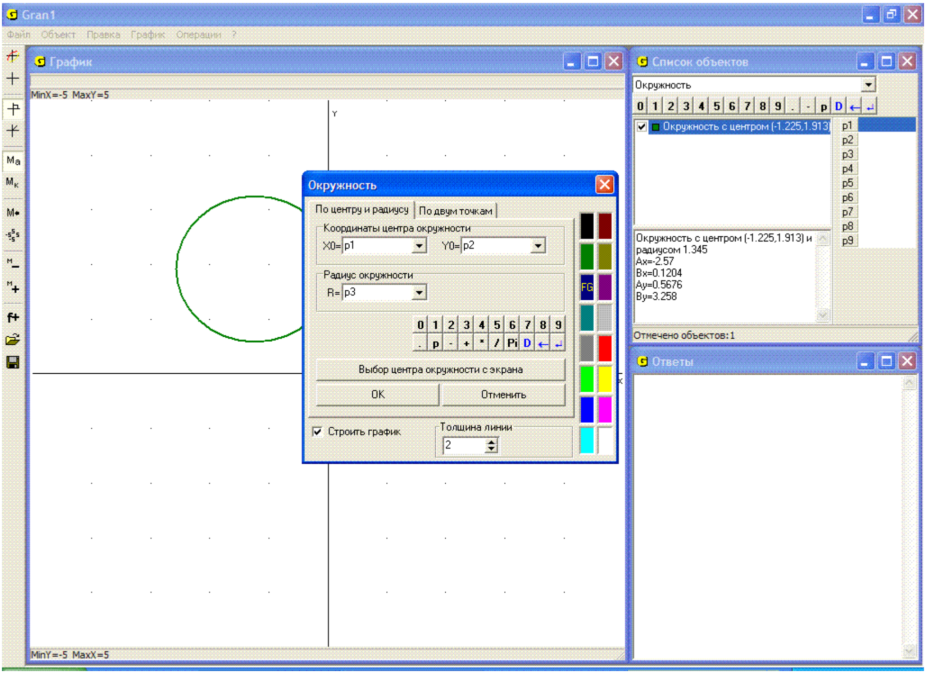

Gran1
Файл Объект Правка График Операции ?
График
MinX=-5 MaxY=5
MinY=-5 MaxX=5
Окружность
По центру и радиусу
По двум точкам
Координаты центра окружности
X0= p1
Y0= p2
Радиус окружности
R= p3
Выбор центра окружности с экрана
OK
Отменить
Строить график
Толщина линии
2
Список объектов
Окружность
Окружность с центром (-1.225,1.913)
Окружность с центром (-1.225,1.913) и радиусом 1.345
Ax=-2.57
Bx=0.1204
Ay=0.5676
By=3.258
Отмечено объектов:1
Ответы

Рис. 7.1

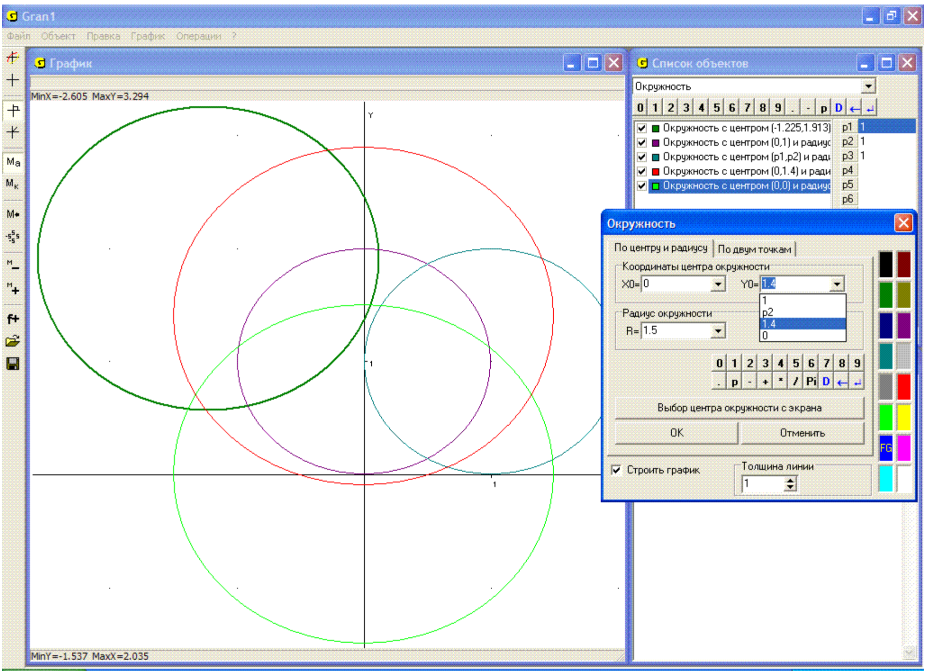

Gran1
Файл Объект Правка График Операции ?
График
MinX=-2.605 MaxY=3.294
MinY=-1.537 MaxX=2.035
Список объектов
Окружность
Окружность с центром (-1.225,1.913)
Окружность с центром (0,1) и радиус
Окружность с центром (p1,p2) и ради
Окружность с центром (0,1.4) и ради
Окружность с центром (0,0) и радиус
Окружность
По центру и радиусу
По двум точкам
Координаты центра окружности
X0= 0
Y0= 1.4
Радиус окружности
R= 1.5
Выбор центра окружности с экрана
OK
Отменить
Строить график
Толщина линии
1

Рис. 7.2

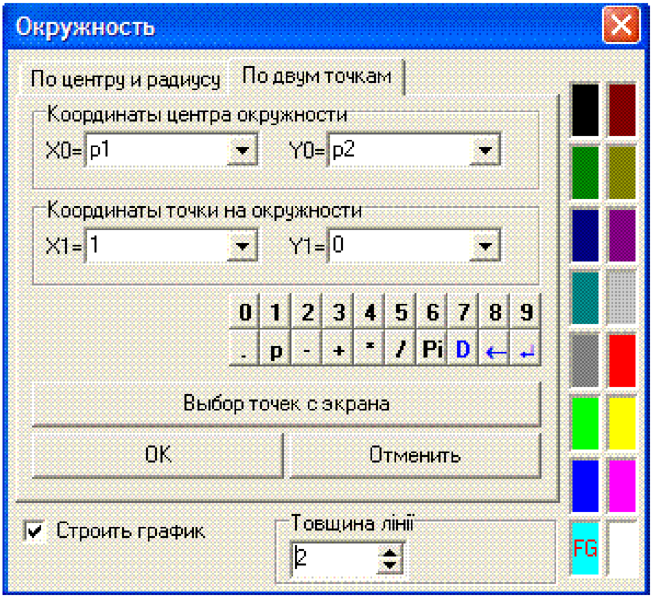

Окружность
По центру и радиусу
По двум точкам
Координаты центра окружности
X0= p1
Y0= p2
Координаты точки на окружности
X1= 1
Y1= 0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
. p - + * / Pi D
Выбор точек с экрана
OK
Отменить
Строить график
Товщина лінії
2
FG

Рис. 7.3

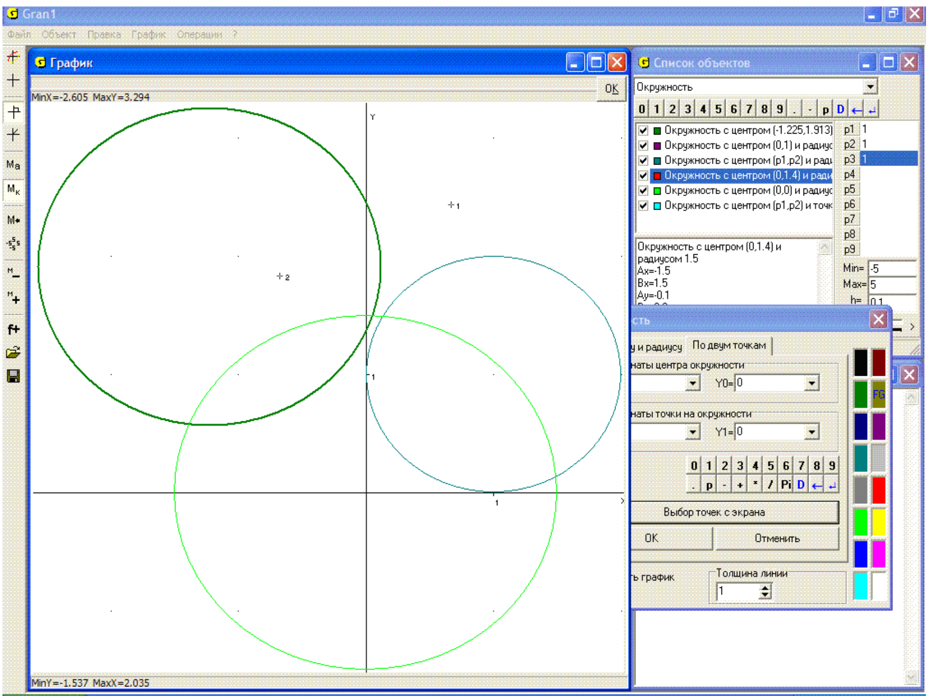

Gran1
Файл Объект Правка График Операции ?
График
OK
MinX=-2.605 MaxY=3.294
MinY=-1.537 MaxX=2.035
Список объектов
Окружность
Окружность с центром (-1.225,1.913)
Окружность с центром (0,1) и радиус
Окружность с центром (p1,p2) и ради
Окружность с центром (0,1.4) и ради
Окружность с центром (0,0) и радиус
Окружность с центром (p1,p2) и точк
p1 1
p2 1
p3 1
Окружность с центром (0,1.4) и радиусом 1.5
Ax=-1.5
Bx=1.5
Ay=-0.1
Min= -5
Max= 5
По двум точкам
Y0= 0
Y1= 0
Выбор точек с экрана
OK
Отменить
Толщина линии
1

Рис. 7.4

После “нажатия” в правом верхнем углу окна “График” кнопки “OK” создается новый объект – окружность, для которого в окне “Список объектов” выводятся координаты центра, радиус, наименьшее и наибольшее значения каждой из координат (Рис. 7.4).

После ввода нового объекта типа “Окружность” можно получить его графическое изображение, для чего достаточно обратиться к услуге “График / Построить”. Следует иметь в виду, что при построении окружностей масштабы вдоль осей Ox и Oy должны быть одинаковыми, так как в ином случае на экране будет изображен некоторый овал. Этого условия желательно придерживаться при построении графических образов и других объектов.

При решении некоторых задач удобным может оказаться использование услуги “Операции / Расстояние до точки”. При обращении к этой услуге необходимо указать две точки (аналогично вводу вершин ломаной с экрана). При перемещении на экране указателя “мыши” определяется расстояние от точки, которая была зафиксирована ранее, до точки, в которой находится указатель. В самом начале первой точкой считается начало координат, второй – точка, где находится указатель. Само расстояние указывается в левом верхнем углу окна “График”. При этом, если тип координат установлен “Декартовы координаты”, указываются координаты x, y позиции указателя и расстояние R между точками, если же избран тип координат “Полярные координаты”, то указываются полярные координаты точки, в которой находится указатель, и также расстояние R между точками.

При перемещении указателя на экране (с использованием клавиш управления курсором или манипулятора “мышь”) автоматически изменяются координаты второй точки и расстояние от нее до первой. При нажатии левой кнопки “мыши” фиксируется первая точка в позиции указателя и в дальнейшем расстояние будет вычисляться от этой новой точки до точки, в которой находится указатель (Рис. 7.5). После “нажатия” кнопки “OK” (в правом верхнем углу окна “График”) прерывается выполнение данной услуги.

Услугу “Операции / Расстояние до точки” удобно использовать при отыскании точки некоторого множества, наименее удаленной от заданной точки, например точки на прямой, на некоторой кривой и т.д., наименее удаленной от точки, которая не лежит на этой прямой или кривой. Это дает возможность определить, например, основание перпендикуляра, опущенного из заданной точки на прямую, высоту треугольника, параллелограмма и т.д.

Следует иметь в виду, что если масштабы вдоль осей Ox и Oy неодинаковые, то точка на некоторой прямой, наименее удаленная от точки вне этой прямой, визуально не будет лежать на перпендикуляре, опущенном на прямую из точки вне прямой.

На Рис. 7.5 точка, от которой вычисляется расстояние, отмечена буквой “А”. Такие метки удобно использовать для упрощения чтения рисунка при решении задач. Как метка используется один или несколько символов.

Поставить метку можно одним из двух способов:

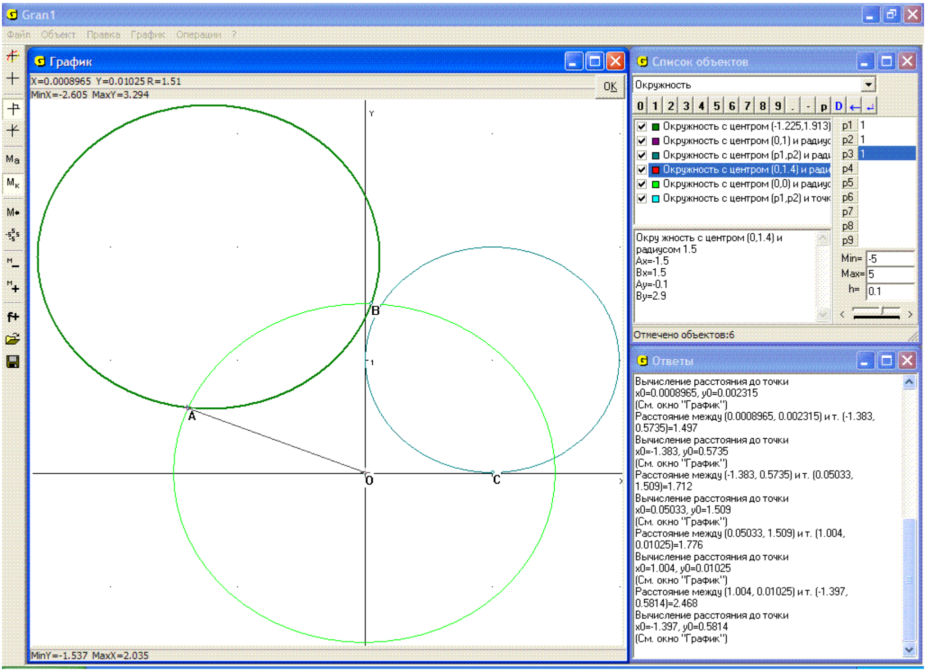


Рис. 7.5

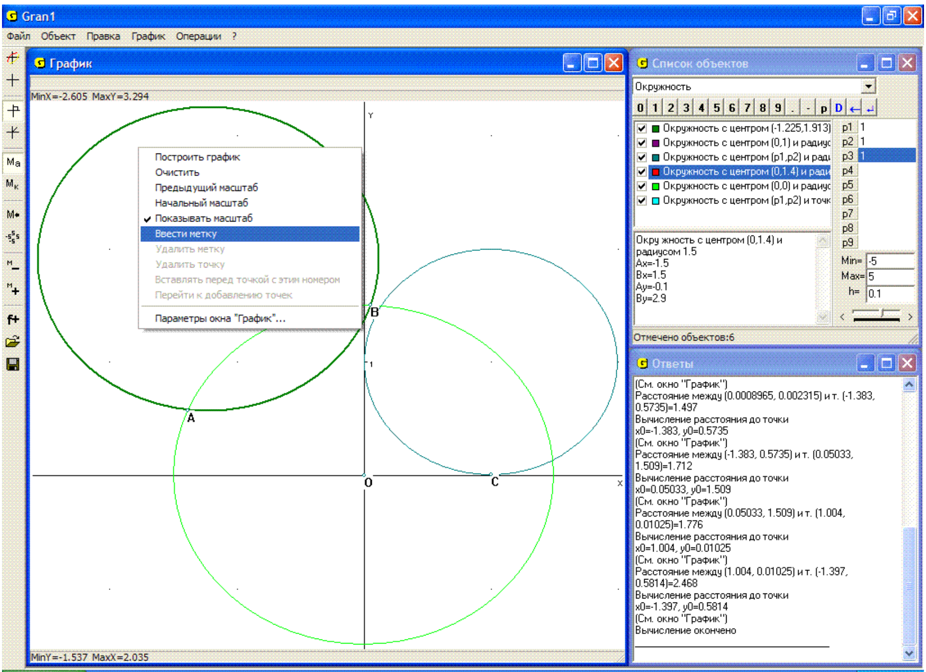


Рис. 7.6

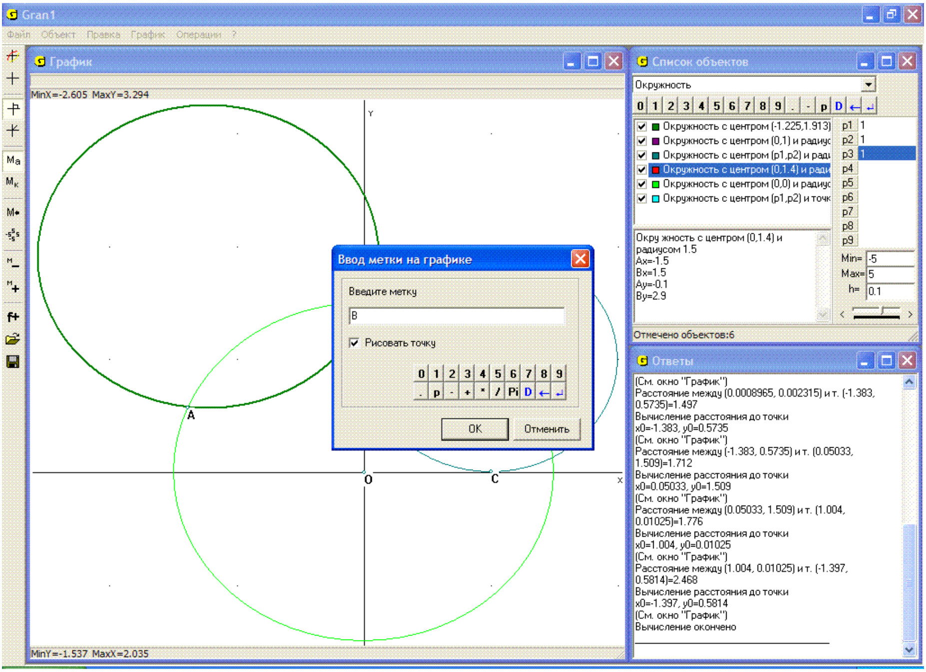


Рис. 7.6 а

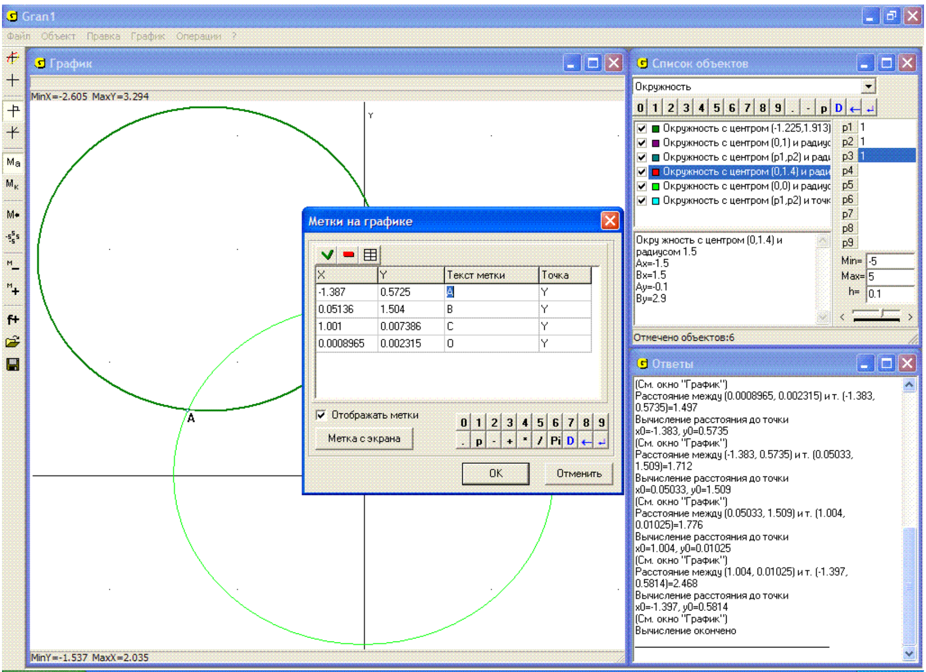


Рис. 7.7

- установить курсор “мыши” в нужную точку в окне “График”, и вызвать контекстное меню, нажав правую кнопку “мыши” (Рис. 7.6). Далее следует обратиться к услуге “Ввести метку”, после чего появится вспомогательное окно “Ввод метки на графике” (Рис. 7.6 а). В этом окне следует ввести с клавиатуры или панели ввода данных необходимую метку, а также установить флажок против надписи “Рисовать точку”, если необходимо отмечать на экране выбранную точку. Расположение метки (координаты левого верхнего угла надписи) совпадает с координатами точки, в которой было установлен указатель перед обращением к данной услуге;
- с помощью услуги “График / Метки…”. При этом появляется вспомогательное окно “Метки на графике”, в котором находится таблица меток (Рис. 7.7). В столбцах “X” и “Y” задаются координаты левого верхнего угла надписи.

При любом изменении масштаба метки остаются на экране, соответствующим образом смещаясь в окне “График” в зависимости от того, как выбран масштаб. Не влияет на написание меток и выбор объектов, изображения которых строятся в окне “График”. Вместе с объектами метки можно хранить в файле на диске.

Примеры

1. На экране построены три отрезка – ломаные, с двумя вершинами каждая. Построить треугольник, длины сторон которого равны длинам заданных отрезков (Рис. 7.8).

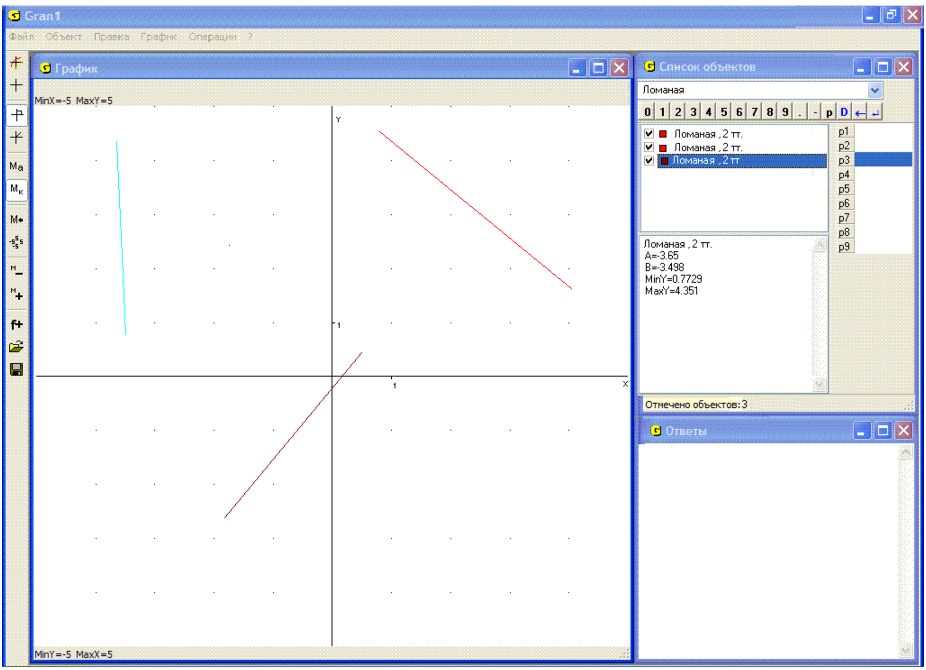


Рис. 7.8

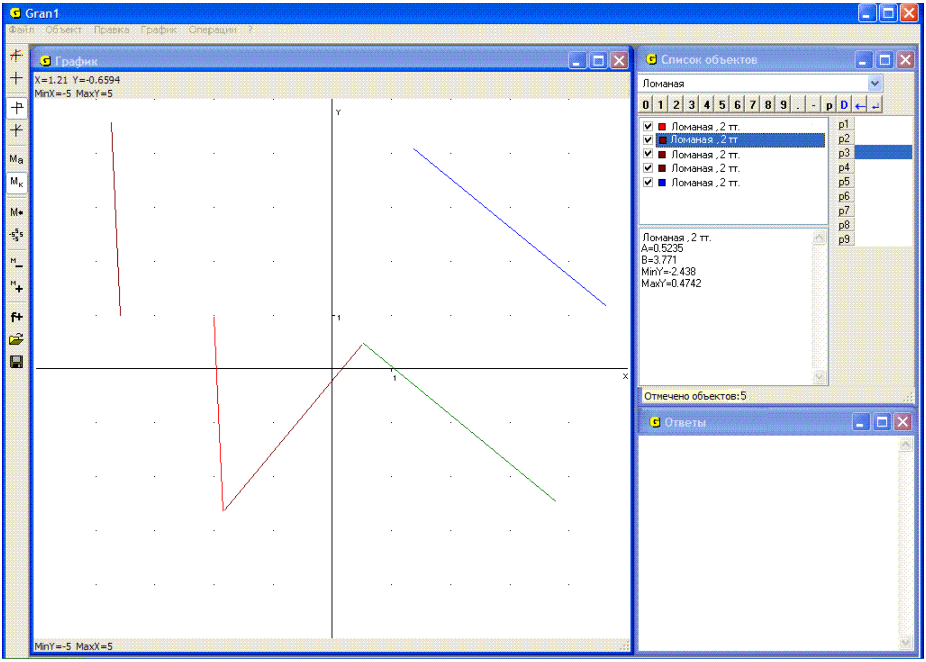


Рис. 7.9

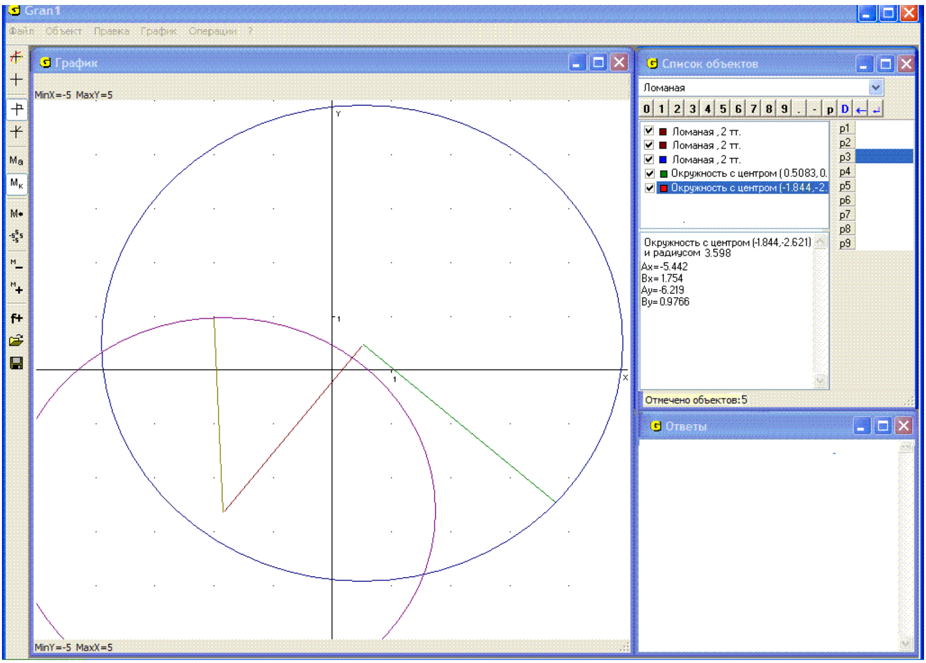


Рис. 7.10

Используя параллельный перенос (с помощью услуги “Операции / Операции с ломаными / Преобразования ломаной”), совместим один из концов какого-либо из отрезков с каким-либо концом любого другого отрезка, а один из концов третьего отрезка с каким-либо из концов, оставшихся свободными, одного из двух предыдущих отрезков (Рис. 7.9). Удалим теперь (сняв метки  около пункта “Строить график” в контекстных меню соответствующих объектов в окне “Список объектов”, сначала установив указатель на обозначение каждого такого объекта, то есть сделав его текущим) исходные отрезки, образы которых получены с использованием параллельного переноса. Далее построим две окружности с центрами в концах отрезка, к которому присоединены два другие, и которые проходят через свободные концы отрезков, выходящих из центров (Рис. 7.10).

Если эти окружности пересекаются, то через их центры вместе с точкой пересечения определяются вершины искомого треугольника. Удалим теперь отрезки, которые не соединяют центры окружностей, и построим новую замкнутую ломаную с вершинами в указанных точках (центрах и точке пересечения окружностей) (Рис. 7.10). Это и будет искомый треугольник (таких треугольников существует два) (Рис. 7.11).

2. Заданы длины сторон треугольника: 3, 4, 5. Определить площадь треугольника, углы и высоты.

Не ограничивая общность, можно считать, что одна из вершин треугольника совпадает с началом координат (0, 0) .Тогда, выбрав на оси Ox точку с абсциссой, равной длине одной из сторон треугольника, построим две окружности с так определенными центрами на оси Ox и радиусами, равными по длине двум сторонам, которые остались. Точка пересечения этих окружностей будет третьей вершиной треугольника. Через ординату этой точки определяется высота треугольника, опущенной на сторону, отложенную вдоль оси Ox. Создав объект ломаная (ломаная должна быть замкнутая), построим треугольник с так определенными вершинами и затем обратимся к услуге “Операции / Операции с ломаными / Площадь многоугольника”. В результате получим – площадь данного треугольника равна $S \approx 6$ (Рис. 7.12).

Высота, опущенная на сторону длиной 5, отложенную вдоль оси Ox, равна 2.39 (Рис. 7.13), угол при вершине, которая совпадает с началом координат, приближенно равен 0.64 радиан (36.7º) (Рис. 7.14).

По очереди будем совмещать вершины треугольника с началом координат, при этом одну из сторон располагая вдоль оси Ox (используя операции параллельного переноса и поворота услуги “Операции / Операции с ломаными / Преобразования ломаной...”).

Получим: высота, опущенная на сторону длиной 5, равна 2.39, на сторону длиной 4 – 3, на сторону длиной 3 – 4, к стороне длиной 5 прилегают углы величиной 0.93 и 0.64, к стороне длиной 4 – 1.57 и 0.64, к стороне длиной 3 – 1.57 и 0.93.

3. На экране построен отрезок. Необходимо построить отрезок, перпендикулярный к заданному и проходящий через его середину.

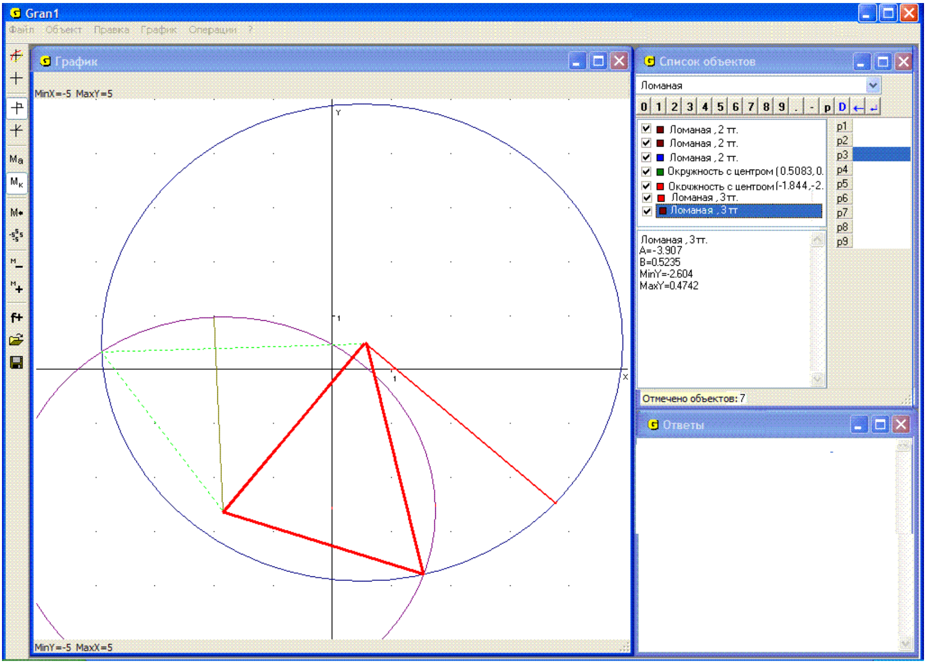


Рис. 7.11

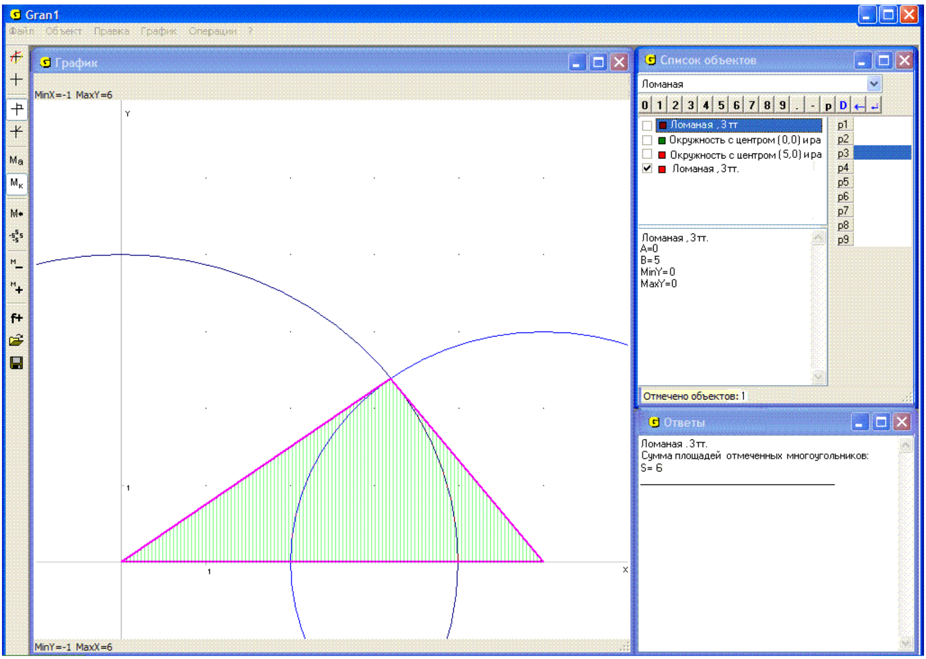


Рис. 7.12

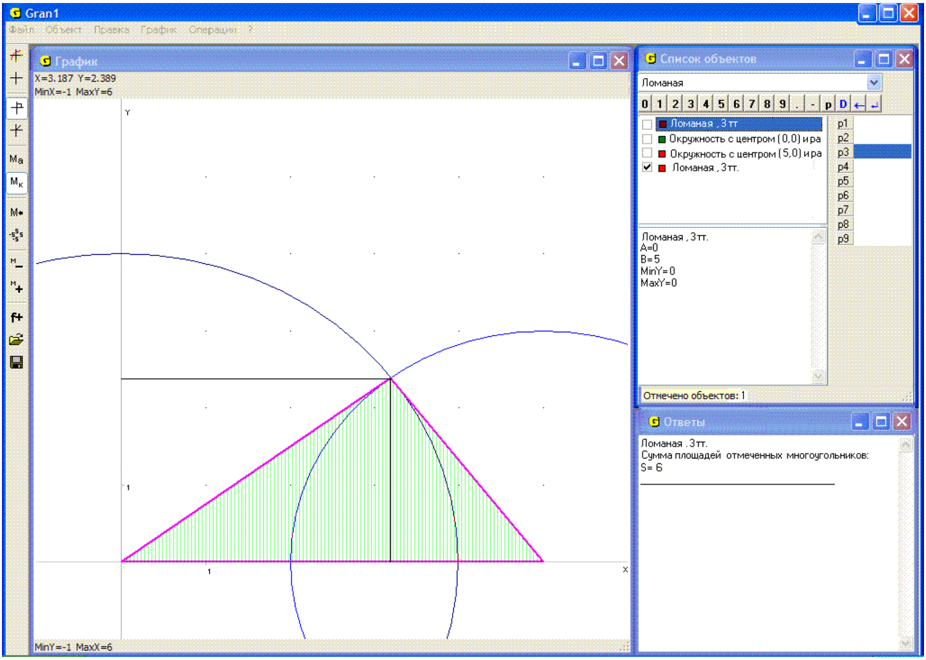


Рис. 7.13

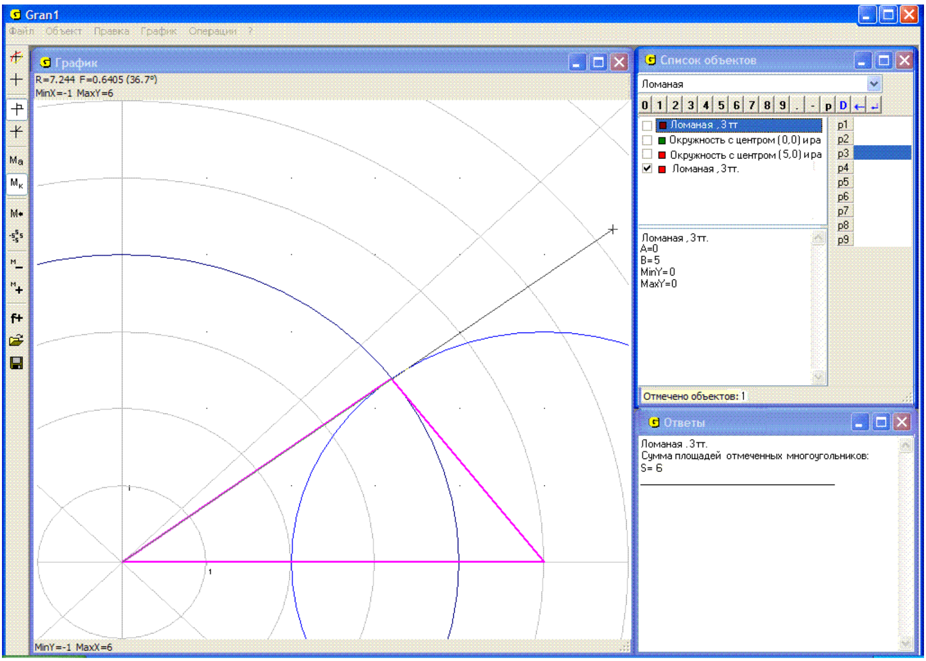


Рис. 7.14

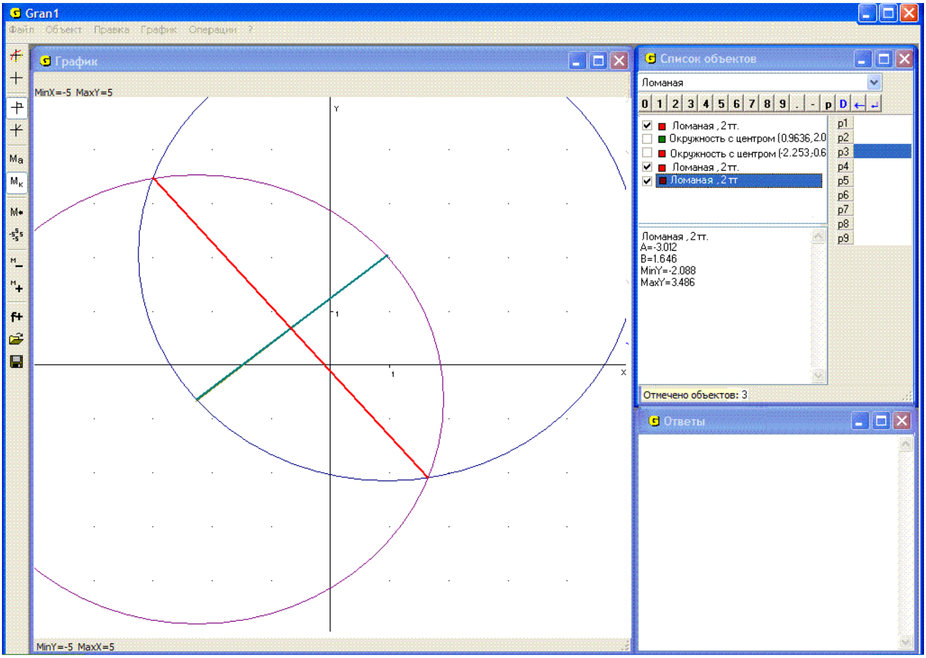


Рис. 7.15

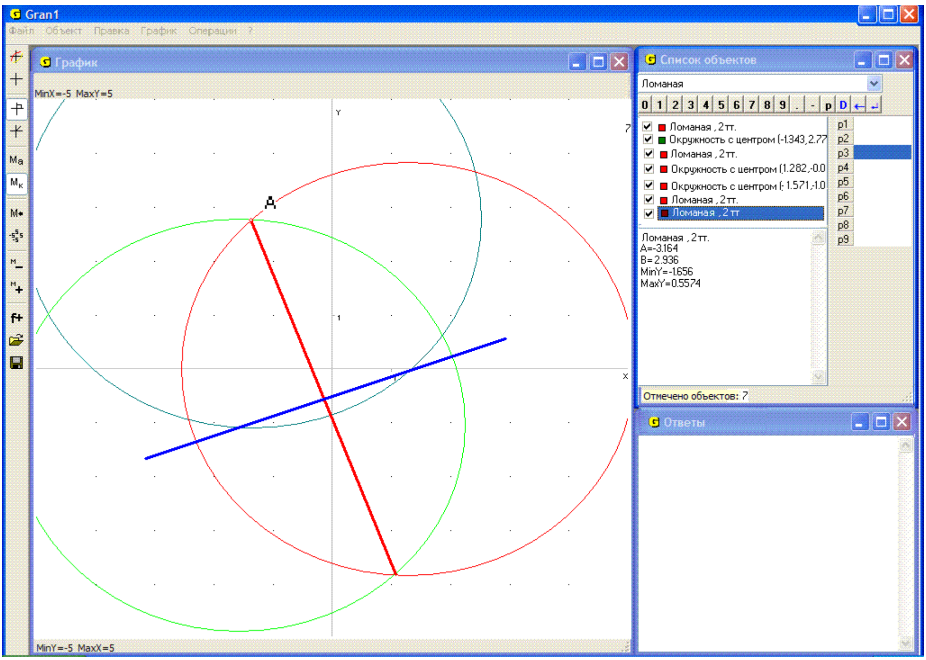


Рис. 7.16

Построив две окружности одинакового радиуса (не меньшего половины длины заданного отрезка) с центрами в концах отрезка, построим новую ломаную (с двумя вершинами), проходящую через точки пересечения указанных окружностей. Это и будет искомый перпендикуляр (Рис. 7.15).

4. На экране изображены некоторая прямая линия и точка вне её. Нужно построить перпендикуляр к прямой, проходящий через заданную точку.

Используя услуги программы GRAN1, эту задачу можно решить разными способами. Один из них – с центром в заданной точке вне прямой провести окружность, которая пересекает прямую в двух точках. Отрезок (хорду) между точками пересечения разделить пополам (как в примере 3), указывая как центры окружностей (x_0, y_0) концы полученной хорды, а как точку (x_1, y_1) на окружности – заданную точку вне прямой. Построив отрезок (новую ломаную с двумя вершинами), которым соединяются точки пересечения таких двух окружностей, получим искомый перпендикуляр (Рис. 7.16).

Другой способ – используя услугу "Операции / Расстояние до точки", укажем как первую заданную точку вне прямой, а вторую будем выбирать на прямой. Перемещая вторую точку вдоль прямой, найдем такую из них, которая будет наименее удалена от точки вне прямой. Это и будет основание искомого перпендикуляра. Построение перпендикуляра осуществляется как и раньше (Рис. 7.17).

Третий способ – точку B на прямой, через которую проходит искомый перпендикуляр можно определить и как точку, в которой окружность некоторого радиуса с центром в точке A касается заданной прямой.

Задав окружность с центром в точке A и радиусом $P1$, и подбирая параметр $P1$ так, чтобы окружность касалась заданной прямой, найдем точку B (Рис. 7.17).

5. На заданном отрезке найти точку, наименее удаленную от заданной точки вне отрезка.

Очевидно решением будет точка, которая лежит на отрезке и окружности наименьшего радиуса с центром в заданной вне отрезка точке и у которой с отрезком есть общая точка. Искомую на отрезке точку (тем самым и радиус окружности) можно определить, используя услугу "Операции / Расстояние до точки" или задав окружность с центром в заданной точке и радиусом $P1$ и подобрав параметр $P1$ так, чтобы на окружности и на отрезке была общая точка и при этом радиус окружности был наименьшим (Рис. 7.18).

6. На экране изображены два отрезка. Нужно найти расстояние между ними, то есть наименьшее среди расстояний между двумя точками, одна из которых лежит на одном отрезке, а другая – на другом.

Очевидно, если отрезки пересекаются, то расстояние между ними равно нулю. Если отрезки не пересекаются, тогда нужно определить расстояния от обеих концов одного из них до другого, и наоборот. Из таких найденных 4-х чисел выбрать наименьшее. Это и будет расстояние между отрезками (Рис. 7.19). В заданном примере получим $\rho \approx 1.60$.

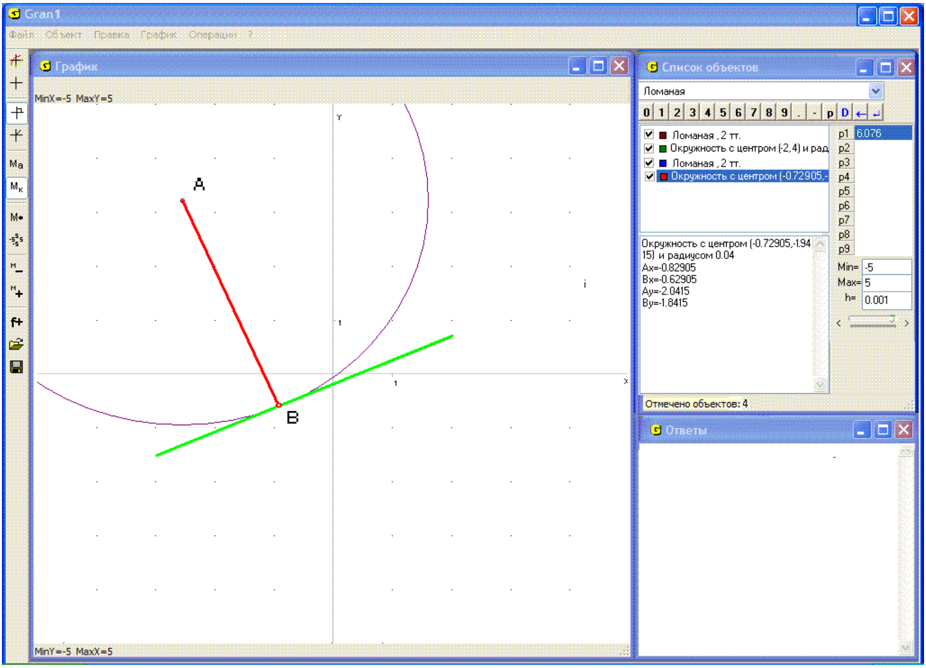


Рис. 7.17

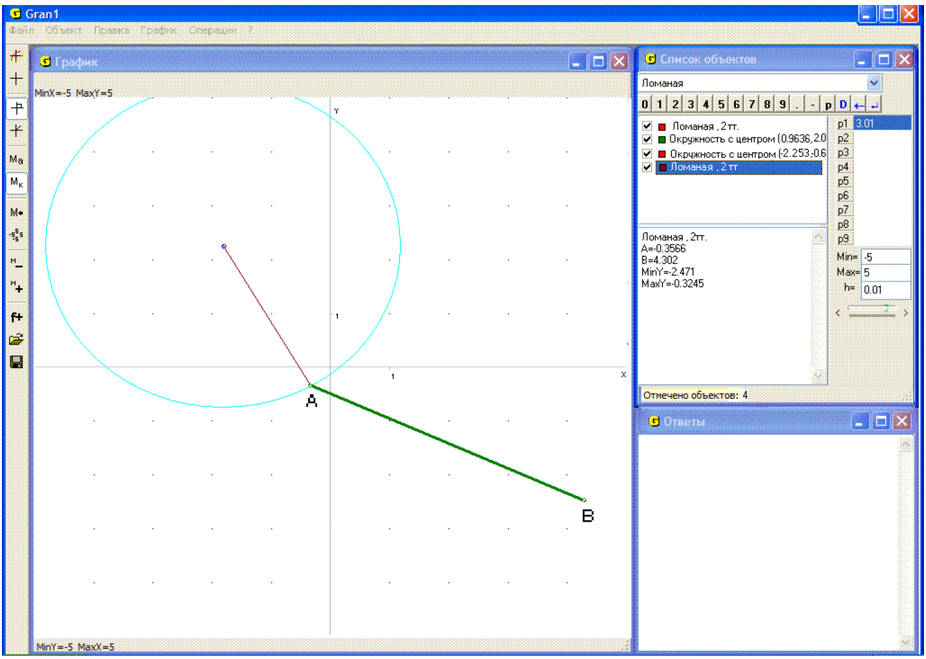


Рис. 7.18

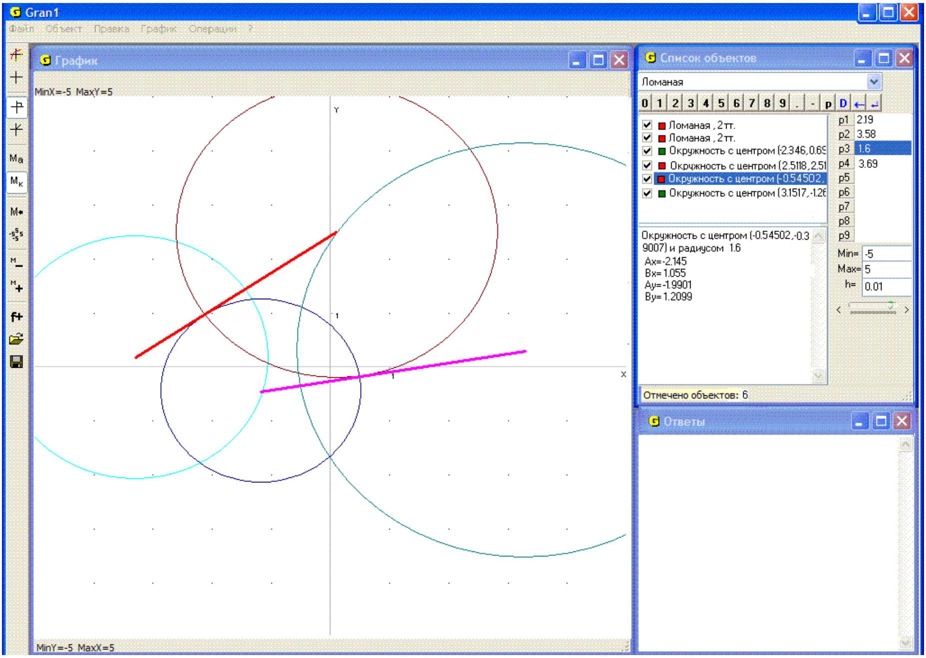


Рис. 7.19

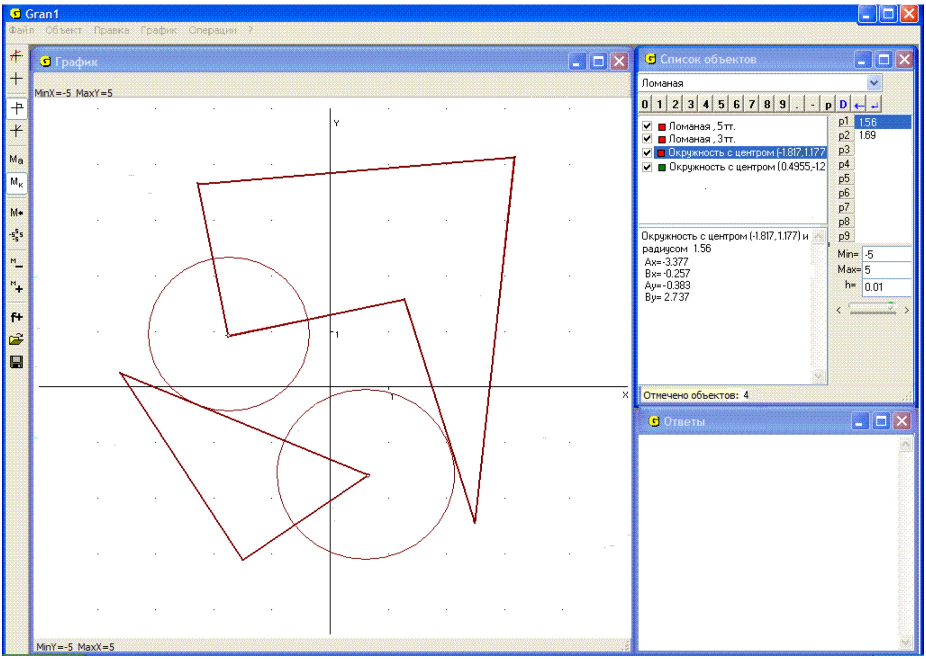


Рис. 7.20

7. На экране изображены треугольник и пятиугольник, заданные координатами своих вершин. Нужно найти расстояние между замкнутыми областями, ограниченными указанными ломаными линиями (без самопересечений), то есть наименьшее среди расстояний между двумя точками, которые лежат в разных областях.

Очевидно, что если в областях, ограниченных замкнутыми ломаными линиями, есть общие точки, то есть их контуры пересекаются (на них есть по крайней мере одна общая точка) или одна область (вместе с границей) лежит внутри другой, то расстояние между ними равно нулю. Если же области непересекающиеся (не имеют общих точек), то вычислив расстояния всех сторон граничной ломаной одной из них от всех сторон другой граничной ломаной и выбрав наименьшее среди них, найдем расстояние между так заданными областями.

В приведенном примере вычислим расстояния каждой из трех сторон треугольника до всех пяти сторон пятиугольника и выберем наименьшее из так полученных 15 чисел. В результате получим 1.56. Это и будет искомое расстояние (Рис. 7.20).

8. Задан угол с помощью ломаной из двух отрезков, на которых есть общая точка. Нужно построить биссектрису так образованного угла.

Построив окружность с центром в общей точке обеих отрезков и которая пересекается с обеими отрезками, построим две окружности с центрами в точках пересечения первой окружности и отрезков и которые проходят через общую точку отрезков. Соединив точки пересечения двух последних окружностей, получим отрезок, который лежит на искомой биссектрисе (Рис. 7.21).

9. К окружности некоторого радиуса построить касательные, проходящие через заданную точку вне окружности.

Разделив пополам отрезок между центром окружности O и заданной точкой A вне окружности, проведем окружность с центром O_1 в середине этого отрезка, проходящую через центр заданной окружности и точку вне её. Точки C и D пересечения окружностей будут искомыми точками касания (Рис. 7.22).

10. Даны две окружности и отрезок. Построить отрезок с концами на заданных окружностях, равный заданному по длине и параллельный заданному отрезку.

Выполним параллельный перенос заданного отрезка AB так, чтобы один из его концов совпал с центром одной из окружностей O. С центром на другом конце $O1$ перенесенного отрезка построим окружность такого же радиуса, как и с центром на первом конце.

Если на так построенной (параллельно перенесенной) окружности и на заданной окружности есть хотя бы одна общая точка, тогда перенесем параллельно заданный отрезок так, чтобы один его конец лежал в общей точке отмеченных окружностей $B1$, а другой ($A1$) – на окружности, которую переносили параллельно заданному отрезку на расстояние, равное длине заданного отрезка. Очевидно, это можно сделать (Рис. 7.23).

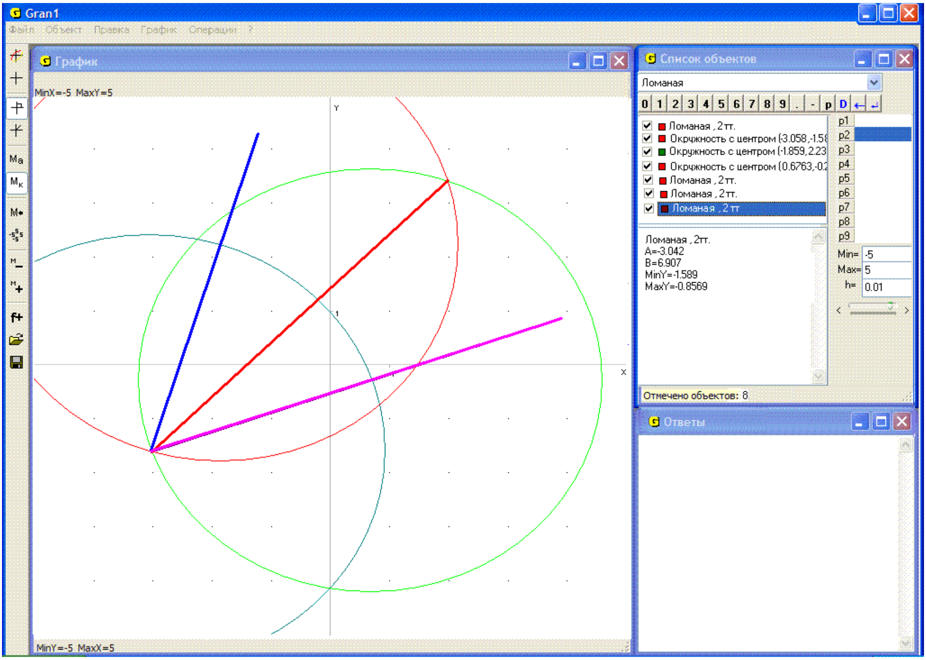


Рис. 7.21

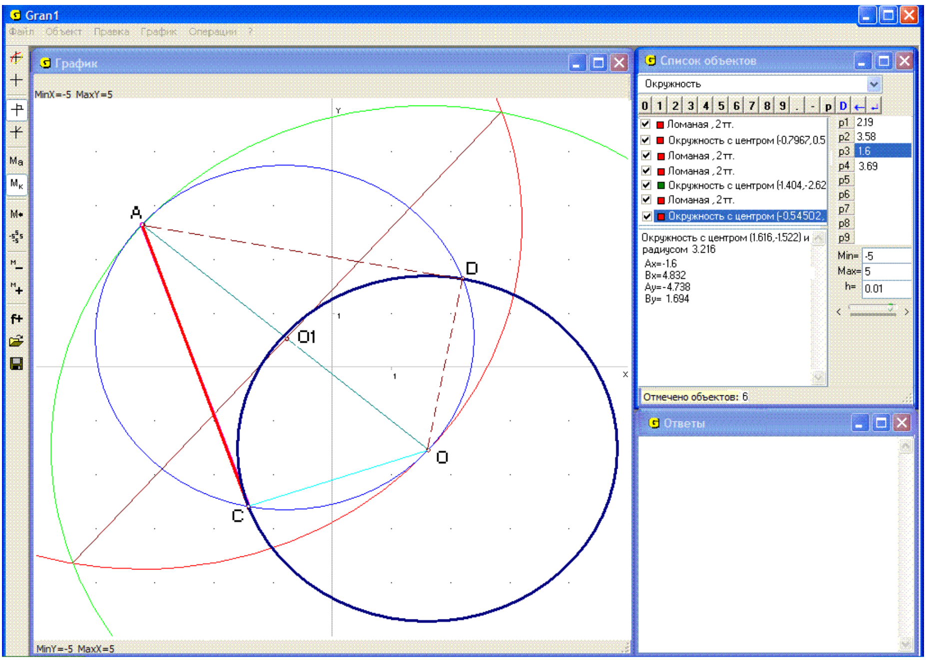


Рис. 7.22

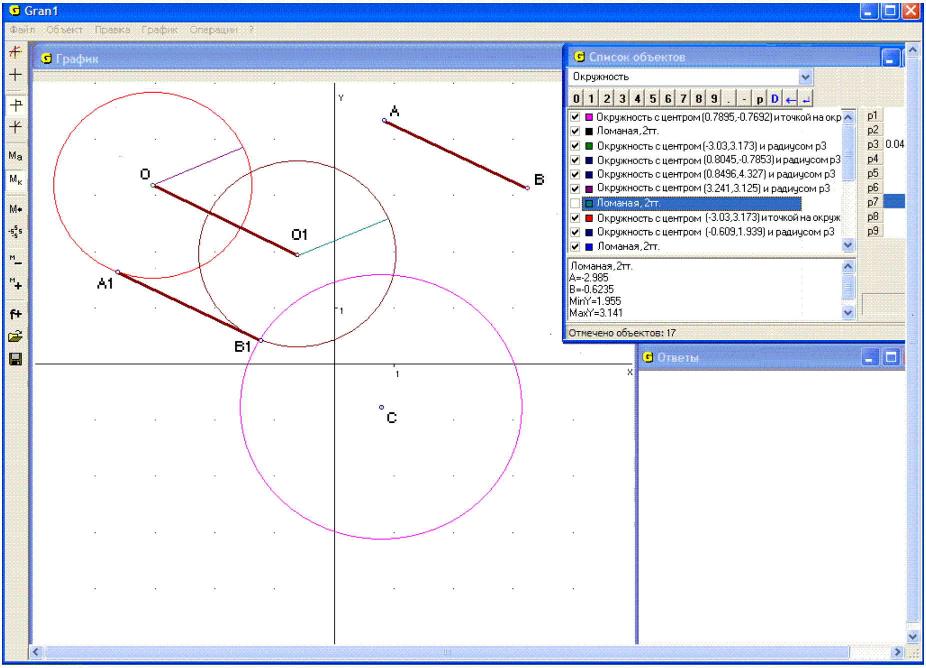


Рис. 7.23

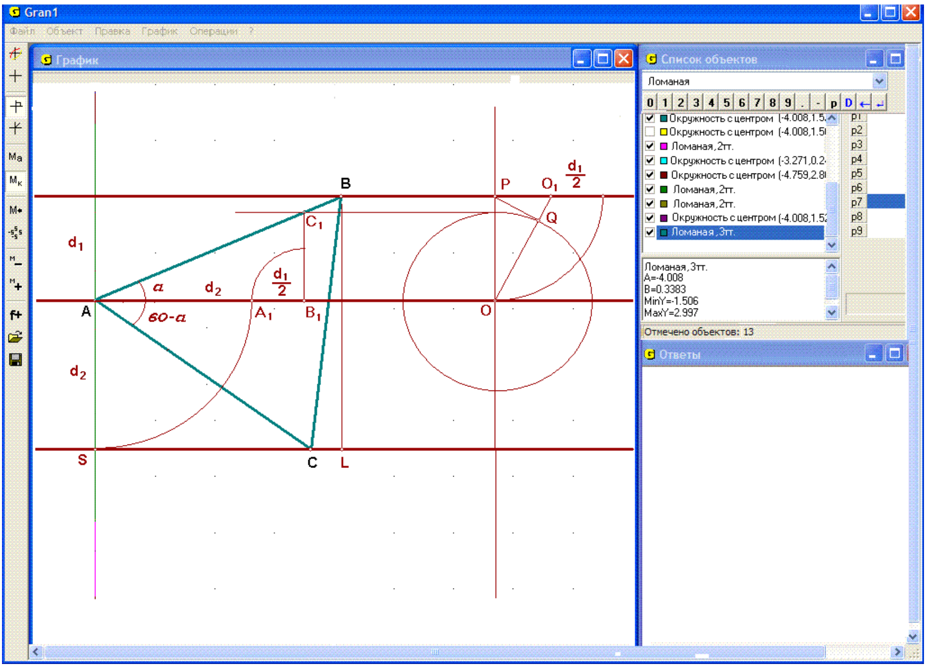


Рис. 7.24

Если общих точек две, то получаются два соответствующие решения, если общая точка одна (касание извне или изнутри) – решение единственное, если общих точек нет, то решений не существует.

11. Построить равносторонний треугольник так, чтобы его вершины лежали на трех заданных параллельных прямых.

Пусть такой треугольник построен (Рис. 7.24). Обозначим расстояние от средней прямой до верхней через d_1, до нижней – через d_2, угол, между стороной AB треугольника и средней прямой – через α, длину стороны треугольника через x. Тогда

$$d_1 = x\sin\alpha\ ,$$

$$d_2 = x\sin(60^\circ - \alpha) = x(\sin 60^\circ \cos\alpha - \cos 60^\circ \sin\alpha) = x(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha)\ ,$$

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{tg\alpha}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}tg\alpha}\text{, откуда } tg\alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}d_1}{d_2 + \frac{1}{2}d_1} = \frac{d_1\sin 60^\circ}{d_2 + \frac{1}{2}d_1}\ .$$

Отсюда следует построение:

а) от точки A вдоль средней прямой откладываем отрезок AB_1 длиной $d_2 + \frac{1}{2}d_1$;

б) через точку B_1 проводим перпендикуляр к средней прямой и на нем вверх от средней прямой откладываем отрезок B_1C_1 длиной $d_1\sin 60^\circ$. Угол B_1AC_1 равен α – искомому углу;

в) через точки A и C_1 проводим прямую до пересечения с верхней прямой. Получим вторую вершину B искомого треугольника;

г) с центром в точке A и через точку B проводим окружность до пересечения с нижней прямой.

Получим третью вершину C искомого треугольника. Заметим, что для того, чтобы получить отрезок длиной $d_1\sin 60^\circ$, достаточно построить прямоугольный треугольник OPO_1 с катетами длиной d_1 и $\frac{d_1}{2}$, а затем из вершины P прямого угла этого треугольника опустить перпендикуляр PQ на его гипотенузу OO_1 (Рис. 7.24). Длина катета OQ будет равна $d_1\sin 60^\circ$.

Очевидно, треугольников с вершиной A на средней прямой, которые удовлетворяют указанным требованиям, два – другой получается симметричным отображением треугольника ABC относительно перпендикуляра к средней прямой, проходящего через точку A.

Из равенства $tg\alpha = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}d_1}{d_2 + \dfrac{1}{2}d_1}$ следует $tg(60^\circ - \alpha) = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}d_2}{d_1 + \dfrac{1}{2}d_2}$.

Таким образом, если $d_1 \to 0$, $d_2 \neq 0$, то $tg\alpha \to 0$, $tg(60^\circ - \alpha) \to \sqrt{3}$, то есть $\alpha \to 0$, $(60^\circ - \alpha) \to 60^\circ (= \dfrac{\pi}{3})$. При этом средняя и верхняя прямая совпадут, вершины A и B треугольника будут лежать на этой общей прямой, а угол между стороной AC и верхней прямой будет равен 60°.

Если же $d_1 \neq 0$, а $d_2 \to 0$, тогда $tg\alpha \to \sqrt{3}$, $tg(60^\circ - \alpha) \to 0$, $\alpha \to 60^\circ$, $60^\circ - \alpha \to 0$. При этом нижняя и средняя прямая совпадут, вершины A и C треугольника будут лежать на этой общей прямой, а угол между стороной AB и нижней прямой будет равен 60°.

Так как $CL = \sqrt{x^2 - (d_1 + d_2)^2}$,

$$SC = \sqrt{x^2 - d_2^{\,2}},$$

$$SL = \sqrt{x^2 - d_1^{\,2}},$$

$SL = SC + CL$, то есть $\sqrt{x^2 - d_1^{\,2}} = \sqrt{x^2 - d_2^{\,2}} + \sqrt{x^2 - (d_1 + d_2)^2}$, то из $d_1 \to 0$, $d_2 \to 0$, $d_1 + d_2 \to 0$ следует $x \to 2x$, что возможно, когда $x \to 0$. Это значит, что если и $d_1 \to 0$, и $d_2 \to 0$, то треугольник ABC стягивается в точку – все три точки A, B, C будут совпадать.

Если на координатной плоскости xOy разместить рисунок так, что точка A на средней прямой будет совпадать с началом координат, средняя прямая расположена вдоль оси Ox, тогда, учитывая, что $tg\alpha = \dfrac{\sqrt{3}d_1}{d_1 + 2d_2}$, $tg(60^\circ - \alpha) = \dfrac{\sqrt{3}d_2}{d_2 + 2d_1}$, получим уравнение верхней прямой $y = d_1$, уравнение средней прямой $y = 0$, уравнение нижней прямой $y = -d_2$, уравнение прямой, проходящей через точки A и B – $y = \dfrac{\sqrt{3}d_1}{d_1 + 2d_2}x$, уравнение прямой, проходящей через точки A и C – $y = -\dfrac{\sqrt{3}d_2}{d_2 + 2d_1}x$, откуда получим координаты вершин треугольника:

$$A - (0,\ 0);\ B - (\frac{d_1 + 2d_2}{\sqrt{3}},\ d_1),\ C - (\frac{d_2 + 2d_1}{\sqrt{3}},\ -d_2).$$

Заметим, что если $d_1 \to 0$, $d_2 \to 0$, то обе координаты точки B и обе координаты точки C стремятся к 0, и таким образом обе точки B и C при $d_1 \to 0$ и $d_2 \to 0$ стремятся к точке A.

Один из вариантов решения этой задачи может быть таким. Выберем вершину треугольника на средней прямой в начале координат. Повернем теперь верхнюю прямую вокруг вершины A треугольника на средней прямой на угол $300°$ (на $60°$ по часовой стрелке). Точка C пересечения повернутой прямой с нижней прямой будет второй вершиной искомого треугольника. Проведя окружность с центром в вершине A, которая проходит через вершину C треугольника, найдем третью вершину B треугольника на верхней прямой как точку пересечения этой прямой с указанной окружностью (Рис. 7.25).

Существуют и другие варианты решения рассматриваемой задачи.

12. Заданы три точки, которые не лежат на одной прямой и есть основаниями высот некоторого треугольника. Нужно построить такой треугольник.

Пусть заданы точки A, B, C. Выберем одну из этих точек (например, точку A) и соединим ее с двумя другими точками. Продлим теперь каждый отрезок в противоположную сторону от выбранной точки, отложив на нем расстояние до третьей точки, которая не лежит на этом отрезке. Получим точки D и E (Рис. 7.26).

Построим теперь срединные перпендикуляры к отрезкам, один из которых соединяет две точки из трех заданных, оставшиеся не соединенными, а второй – две не соединенные точки, полученные по заданным указанным выше способом (отрезки BC и DE на Рис. 7.26). С центром в точке O пересечения этих перпендикуляров построим окружность, которая проходит через концы указанных отрезков. Концы диаметра, который проходит через избранную точку A, будут вершинами искомого треугольника (точки K и L) (Рис. 7.27).

Третью вершину M треугольника находим как точку пересечения продолжений катетов KC и LB прямоугольных треугольников KLB и KLC, которые опираются на указанный диаметр, как на гипотенузу, и вершины прямых углов которых совпадают с заданными точками B и C (Рис. 7.27).

Можно показать, что отрезок, который соединяет так полученную третью вершину с первой из заданных точек (точкой A), перпендикулярен к указанному диаметру окружности. Если как первую точку указать произвольную из трех заданных точек, образуется тот же треугольник, поэтому задача имеет единственное решение.

13. Построить треугольник, если заданы его медианы.

Построим сначала треугольник ABC со сторонами, равными заданным медианам (Рис. 7.28). Выбрав какую-либо точку, отложим в обе стороны от нее отрезки, параллельные и равные по длине сторонам построенного треугольника. На полученных шести отрезках есть одна общая точка, а соедив ломаной линией другие концы этих отрезков, получим шестиугольник $KLMNPQ$ с центром в избранной точке.

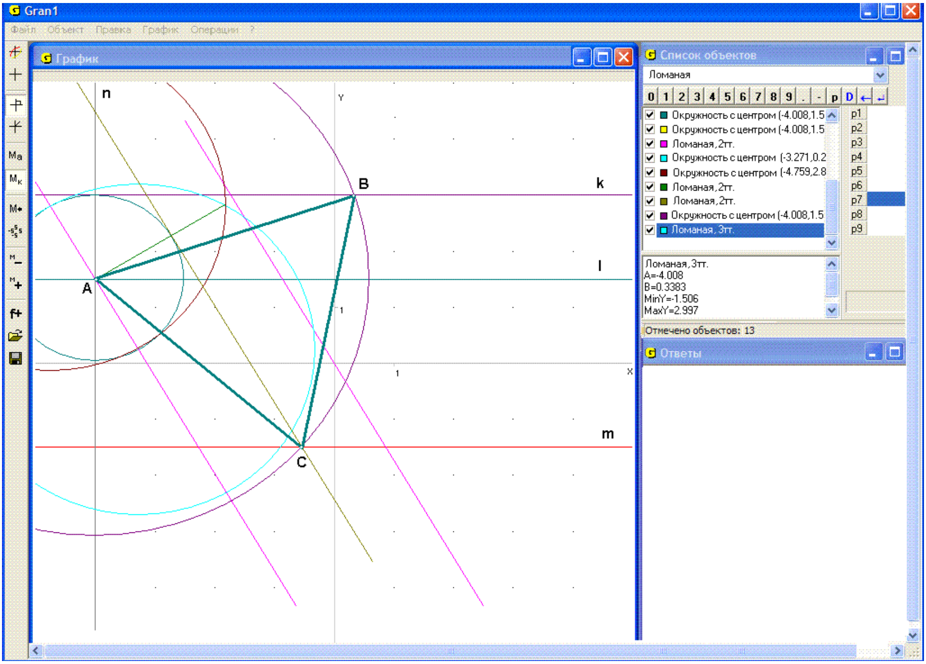


Рис. 7.25

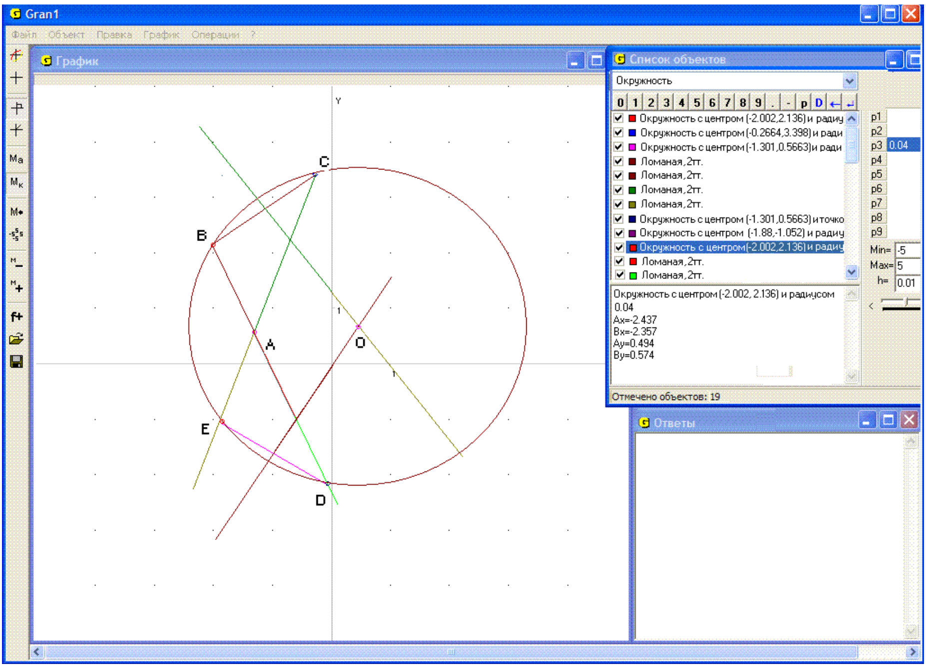


Рис. 7.26

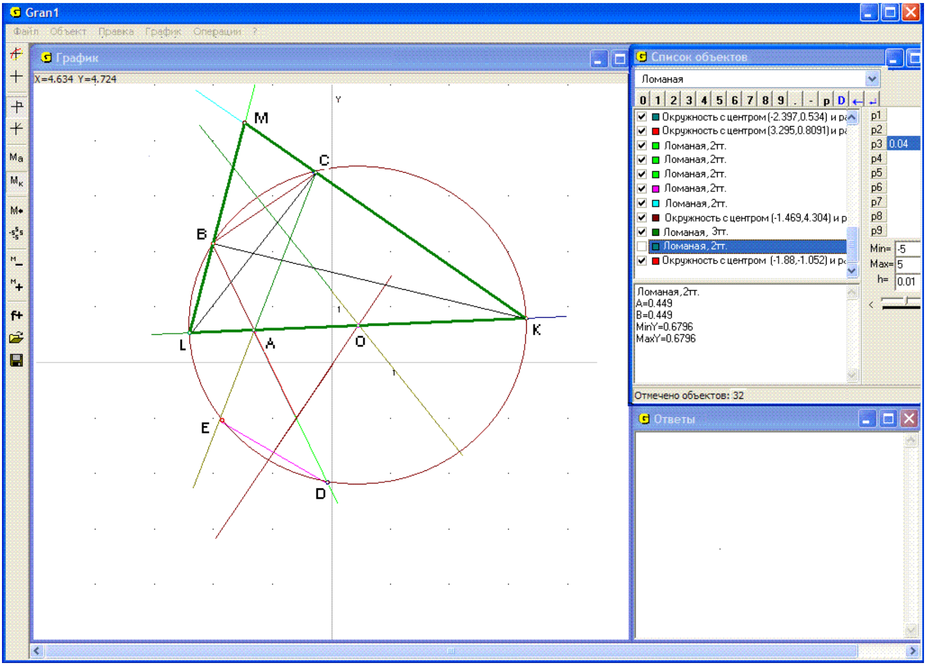


Рис. 7.27

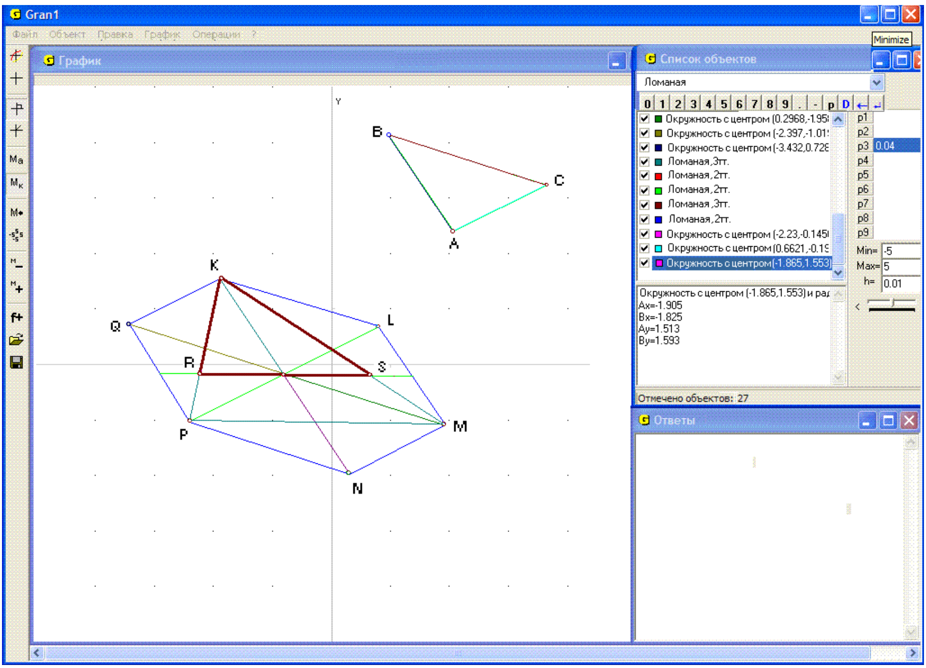


Рис. 7.28

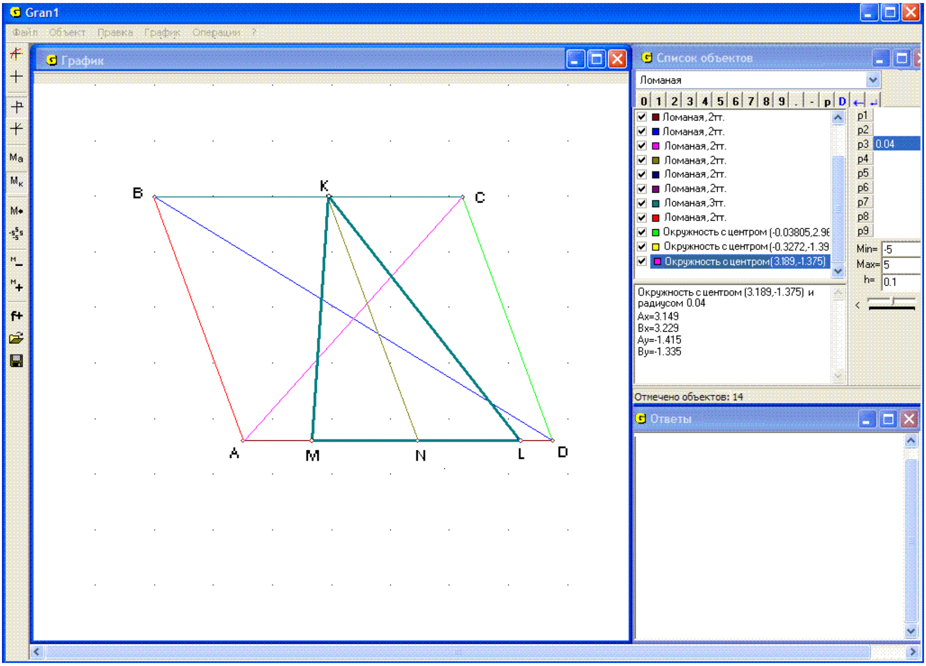


Рис. 7.29

Соединив какие-либо три вершины шестиугольника через одну, получим треугольник, медианы которого будут в полтора раза длиннее заданных – ΔKPM на рисунке. Проводя через центр шестиугольника прямую, параллельную любой стороне указанного треугольника, до пересечения с двумя другими его сторонами, получим искомый треугольник KRS (Рис. 7.28).

14. Построить треугольник по заданным стороне и медианам к двум другим сторонам.

Построим параллелограмм $ABCD$ с диагоналями, равными удвоенным медианам, и стороной, длина которой равна $\frac{3}{2}$ от длины заданной стороны (Рис. 7.29).

На стороне параллелограмма указанной длины берем произвольную точку K как одну из вершин искомого треугольника и через нее проводим прямую KN, параллельную двум другим сторонам, до пересечения с противоположной стороной. На этой стороне от точки пересечения в обе стороны откладываем отрезки LN и NM длиной $\frac{a}{2}$. Так полученные две точки определяют еще две вершины искомого треугольника KLM (Рис. 7.29).

Другой путь – строим параллелограмм со сторонами длиной, равной медианам, и диагональю, равной $\frac{3}{2}$ заданной стороны. Отложим на этой диагонали от одного из ее концов отрезок длиной a и для так полученной точки построим ей симметричную относительно вершины параллелограмма, которая не лежит на диагонали. Эта точка и концы указанного отрезка длиной a и будут тремя вершинами искомого треугольника.

Вопросы для самоконтроля

1. Как, используя услуги программы GRAN1:

1.1 построить: окружность? отрезок? угол?

1.2 найти расстояние от заданной точки до другой заданной точки? до прямой? до отрезка? до круга? до границы треугольника? до незамкнутой ломаной?

1.3 найти середину отрезка? дуги?

1.4 построить биссектрису угла? медиану треугольника?

1.5 определить углы треугольника? высоты треугольника? площадь треугольника?

2. Как, используя услуги программы GRAN1, приближенно найти наименьшее расстояние между точками двух линий, которые не пересекаются?
3. Можно ли использовать услугу “Операции / Расстояние до точки”, если в окне “График” масштабы вдоль осей Ox и Oy неодинаковые?

Упражнения для самостоятельного выполнения

1. Заданы координаты вершин треугольника: (-3, -4), (4, 4), (-4, 3). Определить: длины сторон треугольника; периметр; углы; высоты; медианы; площадь. Как изменятся результаты, если треугольник деформировать с коэффициентами: $dx = 0.5, dy = 1$; $dx = 1, dy = 0.5$; $dx = 0.5, dy = 0.5$.
2. Заданы координаты концов двух отрезков: (1, 1), (3, 2) и (2, 2) (4, 5). Построить параллелограмм со сторонами, равными по длине и параллельными заданным отрезкам и вычислить его площадь, углы, высоты, длины диагоналей, периметр.
3. Построить окружности, описанные вокруг треугольников из задания 1 и вписанные в них. Найти координаты их центров и радиусы.
4. Построить треугольник по двум сторонам a и b и медиане m_a, проведенной к стороне a.
5. Построить треугольник по углу A, высоте h_a и биссектрисе l_a, проведенной из вершины A.
6. Определить длину касательной, проведенной к заданной окружности из заданной точки вне окружности, а также расстояние от заданной точки вне окружности до центра окружности и расстояние между точками касания. Как будет изменяться расстояние между точками касания, если точку вне окружности постепенно приближать к центру окружности.
7. Построить треугольник по его высоте h и медиане m, проведенным из одной вершины, и радиусу r описанной окружности.
8. Построить прямоугольный треугольник по катету a и разности m между гипотенузой и другим катетом.

9. Построить треугольник по двум сторонам a и b и медиане m_c, проведенной к третьей стороне.
10. Построить треугольник по двум сторонам a и b и высоте h_a.
11. Задан отрезок и две точки. Найти расстояния от этих точек до отрезка, а также расстояние точек от прямой, на которой лежит отрезок.

§8. Построение графиков зависимостей. Вычисление значений выражений

Для построения графиков зависимостей между переменными (разных типов задания) и выполнения некоторых других операций над графическими построениями предназначен пункт “График”.

Подпункт “Построить” используется при необходимости построить графики одной или нескольких введенных зависимостей. Если график некоторой введенной зависимости строить не нужно, тогда с помощью манипулятора “мышь” следует снять метку ☑ около пункта “Строить график” в контекстном меню для данного объекта или в окне “Ввод выражения зависимости” (Рис. 8.2, Рис. 8.3), обратившись к услуге “Объект / Изменить”. Зависимости, против обозначений которых стоит знак ☑ в окне “Список объектов”, будут учитываться при выполнении операций над объектами.

Выражения зависимостей представлены в окне “Список объектов” символами того же цвета, что и соответствующие им графики, изображаемые в окне “График”. Количество объектов не ограничивается (ограничивается лишь аппаратными ресурсами компьютера).

Для задания явной зависимости между переменными x и y в декартовой системе координат необходимо сначала установить тип задания зависимости “Явная: Y=Y(X)” в окне “Список объектов” (Рис. 8.1). Затем следует обратиться к услуге “Объект / Создать” или “нажать” кнопку “f+” на панели инструментов.

В результате появляется вспомогательное окно “Ввод выражения зависимости”. В строку “Y(X)=” нужно ввести выражение зависимости (Рис. 8.2). Эта строка входит в список, который раскрывается, и при создании новой зависимости соответствующее выражение заносится в этот список. Поэтому при создании следующего объекта можно вводить выражение с использованием данных из этого списка (Рис.8.3). Если выражение записано неправильно, то будет выведено сообщение об ошибке.

Явная зависимость задается на определенном всегда конечном отрезке. В окне “Ввод выражения зависимости” в строке “A=” необходимо ввести выражение, через которое определяется левый конец отрезка, а в строке “B=” – выражение, через которое определяется правый конец отрезка. При этом должно выполняться условие $A < B$. При невыполнении этого условия выводится сообщение об ошибке.

Ввод данных можно осуществить как с клавиатуры, так и с помощью “мыши”, используя панель ввода данных, которая выводится во вспомогательном окне (Рис. 8.2, Рис. 8.3).

Как в выражения зависимостей, так и в выражения, через которые определяются пределы задания зависимостей, могут входить параметры $P1$, $P2$, …, $P9$ (Рис. 8.2). При изменении этих параметров (с помощью ползунка или ввода значений с панели ввода данных) соответствующим образом изменяются выражения зависимостей и пределы их задания.

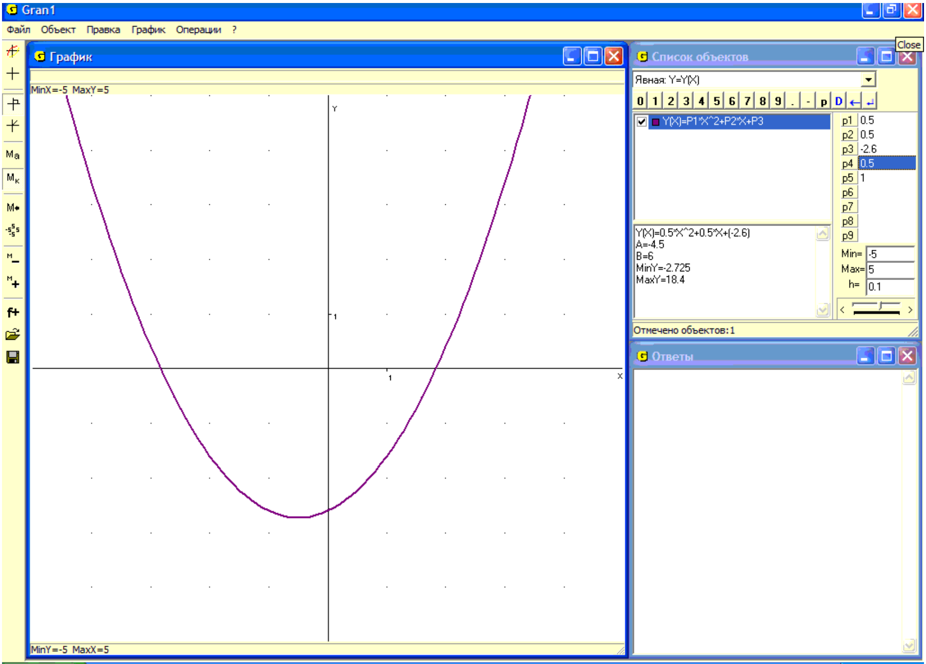

Gran1
Файл Объект Правка График Операции ?
График
MinX=-5 MaxY=5
MinY=-5 MaxX=5
Список объектов
Явная: Y=Y(X)
Y(X)=P1*X^2+P2*X+P3
p1 0.5
p2 0.5
p3 -2.6
p4 0.5
p5 1
Y(X)=0.5*X^2+0.5*X+(-2.6)
A=-4.5
B=6
MinY=-2.725
MaxY=18.4
Min= -5
Max= 5
h= 0.1
Отмечено объектов:1
Ответы
Close

Рис. 8.1

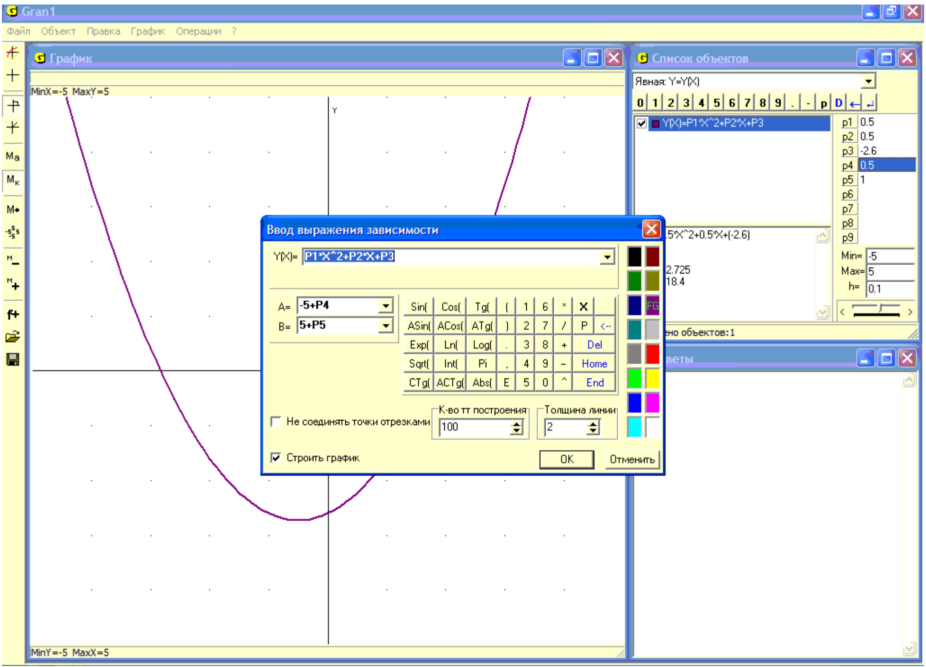

Gran1
Файл Объект Правка График Операции ?
График
MinX=-5 MaxY=5
MinY=-5 MaxX=5
Список объектов
Явная: Y=Y(X)
Y(X)=P1*X^2+P2*X+P3
Ввод выражения зависимости
Y(X)= P1*X^2+P2*X+P3
A= -5+P4
B= 5+P5
Sin(Cos(Tg(
ASin(ACos(ATg(
Exp(Ln(Log(
Sqrt(Int(Pi
CTg(ACTg(Abs(
Del
Home
End
Не соединять точки отрезками
К-во тт построения
100
Толщина линии
2
Строить график
OK
Отменить

Рис. 8.2

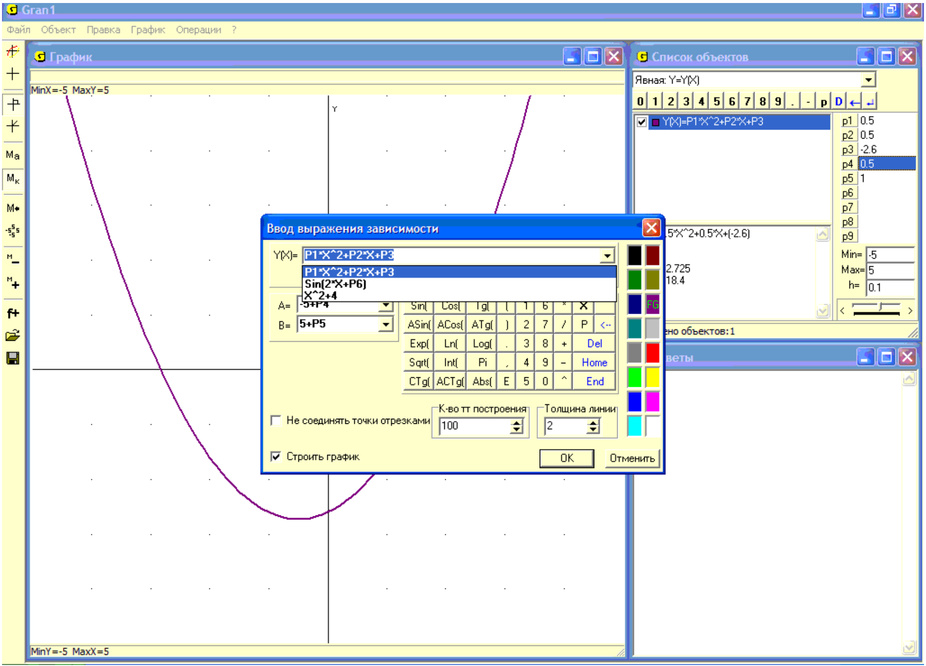


Рис. 8.3

Если нужно зафиксировать объект при некоторых значениях параметров, следует обратиться к услуге *Объект / Новый объект с зафиксированными параметрами*. В результате создается новый объект с фиксированными значениями параметров, а в исходном объекте значения параметров можно дальше изменять.

После ввода выражения можно указать цвет, которым в окне “График” будет представлен график зависимости (для чего необходимо установить переключатель “FG” в соответствующее положение, указав нужный цвет курсором “мыши”), и толщину линии графика (Рис. 8.2).

Во вспомогательном окне также указывается количество точек построения графика (от 10 до 1000, по умолчанию 100). С увеличением количества точек построения скорость вычислений и построений графиков уменьшается. Вместе с тем с уменьшением количества точек построения уменьшается точность графических построений.

Иногда удобно не строить весь график, а прорисовать лишь узловые точки. В этом случае нужно установить метку ☑ рядом с надписью “Не соединять точки отрезками” (Рис. 8.3, Рис. 8.4).

На Рис. 8.1 показан непрерывный график зависимости $y = 0.5x^2 + 0.5x - 2.6$ (100 точек на графике соединены отрезками прямых), на Рис. 8.4 – набор точек на графике той же зависимости, не соединенных отрезками прямых, а на Рис. 8.5 график той же зависимости, но количество точек построения равно 10.

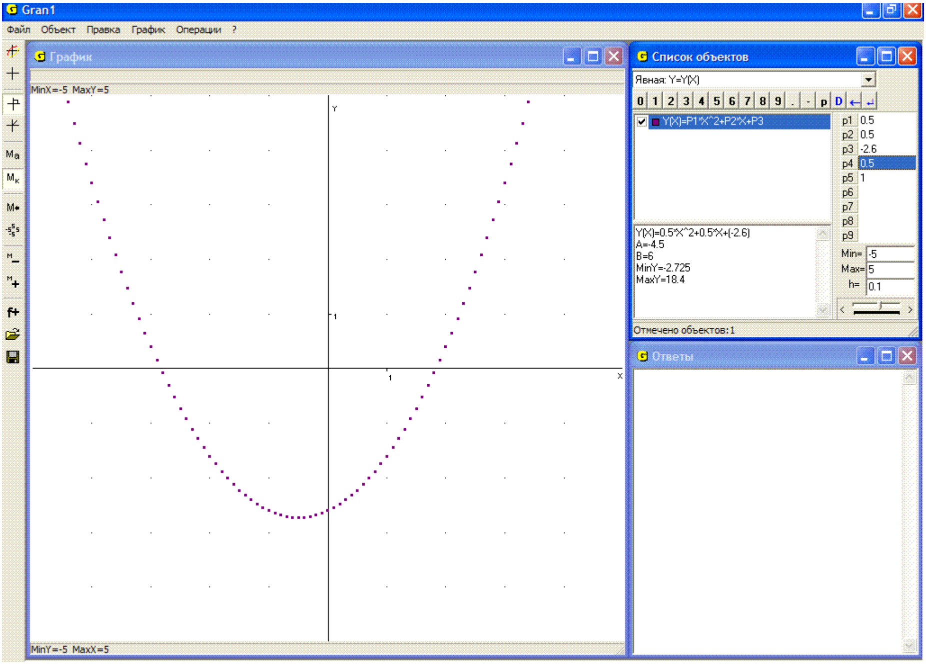

Gran1
Файл Объект Правка График Операции ?
График
MinX=-5 MaxY=5
MinY=-5 MaxX=5
Список объектов
Явная: Y=Y(X)
Y(X)=P1*X^2+P2*X+P3
p1 0.5
p2 0.5
p3 -2.6
p4 0.5
p5 1
Y(X)=0.5*X^2+0.5*X+(-2.6)
A=-4.5
B=6
MinY=-2.725
MaxY=18.4
Min= -5
Max= 5
h= 0.1
Отмечено объектов: 1
Ответы

Рис. 8.4

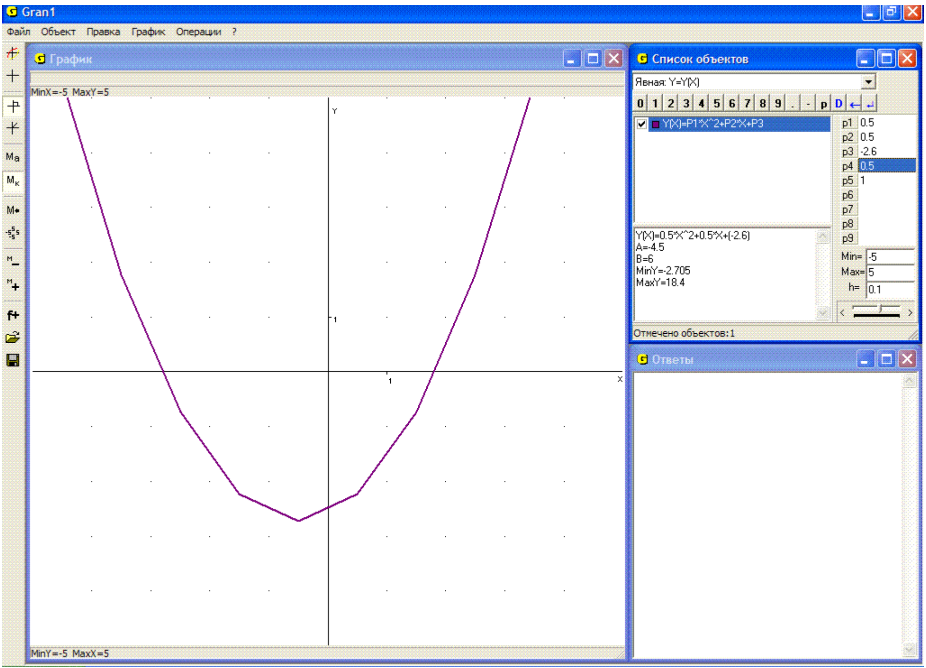

Gran1
Файл Объект Правка График Операции ?
График
MinX=-5 MaxY=5
MinY=-5 MaxX=5
Список объектов
Явная: Y=Y(X)
Y(X)=P1*X^2+P2*X+P3
p1 0.5
p2 0.5
p3 -2.6
p4 0.5
p5 1
Y(X)=0.5*X^2+0.5*X+(-2.6)
A=-4.5
B=6
MinY=-2.705
MaxY=18.4
Min= -5
Max= 5
h= 0.1
Отмечено объектов: 1
Ответы

Рис. 8.5

Если в выражения зависимостей, графики которых построены, входят какие либо из параметров $P1$, $P2$, …, $P9$, или в выражения, через которые заданы пределы отрезков, входят такие параметры, то при изменении значений какого либо из параметров соответствующие графики автоматически перестраиваются.

Если при некоторых значениях параметров обратиться к услуге "*Объект / Новый* объект с фиксированными параметрами", то создается новый объект с фиксированными значениями параметров, а также фиксируется соответствующий график. На Рис. 8.6 базовым есть первый объект. Следующие объекты получены из первого изменением значений одного из параметров $P1$, $P2$, $P3$ и созданием соответствующего объекта при фиксированных значениях параметров.

При нажатии кнопки "ОК" завершается создание нового объекта в окне "Список объектов", а при нажатии кнопки "Отменить" отменяются все действия относительно создания объекта (Рис. 8.2).

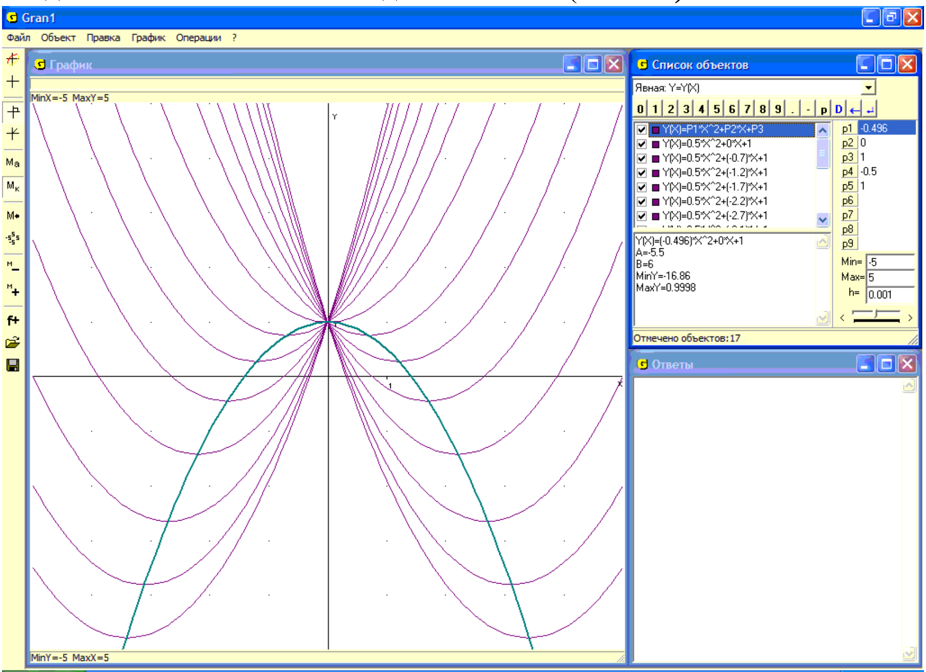


Рис. 8.6

Примеры

1. Пусть на промежутке $[A; B]$ задан квадратный трёхчлен $y = P1 \cdot x^2 + 2 \cdot P2 \cdot x + P3$, при этом $A = -5 - p4$, $B = 5 + p5$. Пусть зафиксированы значения параметров $p1 = 1$, $p3 = 1$, $p4 = -0.5$, $p5 = 1$.

Тогда при изменении параметра $p2$ вершина параболы $y = x^2 + 2p2 \cdot x + 1$ будет перемещаться по параболе $y = 1 - x^2$ (Рис. 8.6).

В самом деле $x^2+2\cdot p2\cdot x+1=(x+p2)^2+(1-p2^2)$. Поэтому координаты вершины параболы $y=(x+p2)^2+(1-p2^2)$ будут $x_b=-p2$, $y_b=(1-p2^2)=(1-(-p2)^2)$, и таким образом $y_b=1-x_b^2$.

2. Пусть необходимо построить график функции $y=x^2-3$ на некотором отрезке задания.

Установим в окне “Список объектов” тип зависимости “Явная: Y=Y(X)”. Затем обратимся к услуге “Объект / Создать...”. В результате появится вспомогательное окно “Ввод выражения зависимости” (Рис. 8.2). Введем выражение $x\verb|^|2-3$ в строке “Y(X)=”.

В строке “A=” введем выражение для определения левого предела отрезка задания функции “$-1-P1$”, а в строке “B=” введем выражение для определения правого предела отрезка задания “$1+P2$”. В дальнейшем через значения динамических параметров $P1$ и $P2$ будут определяться пределы отрезка, на котором строится график функции. Цвет и количество точек построения графика оставим заданными по умолчанию, толщину линии укажем 2 и нажмем кнопку “OK”.

В результате в окне “Список объектов” получим: новый объект $Y(X)=x\verb|^|2-3$. Установим значения динамических параметров $P1=1.7$, $P2=0.4$, что будет соответсвовать отрезку заданяя [–2.7, 1.4]. В нижней части этого окна показаны некоторые характеристики зависимости при указанных значениях параметров: $A=-2.7$, $B=1.4$, $MinY=-3$, $MaxY=4.29$.

Обратимся теперь к услуге главного меню “График / Построить”. В результате в окне “График” будет построен график зависимости $y=x^2-3$ на отрезке [–2.7, 1.4] (Рис. 8.7).

Если очистить окно “График”, воспользовавшись услугой “График / Очистить”, а затем обратиться к услуге “График / Построить”, то будут построены графики зависимостей, при вводе выражений которых была установлена метка  против надписи “Строить график”. Снять такую метку или установить в случае ее отсутствия можно, воспользовавшись контекстным меню, предварительно установив указатель в окне “Список объектов” на нужный объект.

3. Пусть на промежутке [–7, 7] зависимость $y=f(x)$ задана таким образом:

$$y(x)=\begin{cases} 1/(x^2/6)-2, & \text{когда} \quad x\le -1, \\ 4\cdot|x|, & \text{когда} \quad -1\le x\le 1, \\ 4-10\lg(x), & \text{когда} \quad x\ge 1. \end{cases}$$

Указав тип задания зависимости “Явная: Y=Y(X)”, введем три зависимости:

- $1/(x\verb|^|2/6)-2$ на промежутке [−7, -1];
- $4*abs(x)$ на промежутке [−1, 1];
- $4-10*\log(10,x)$ на промежутке [1, 7].

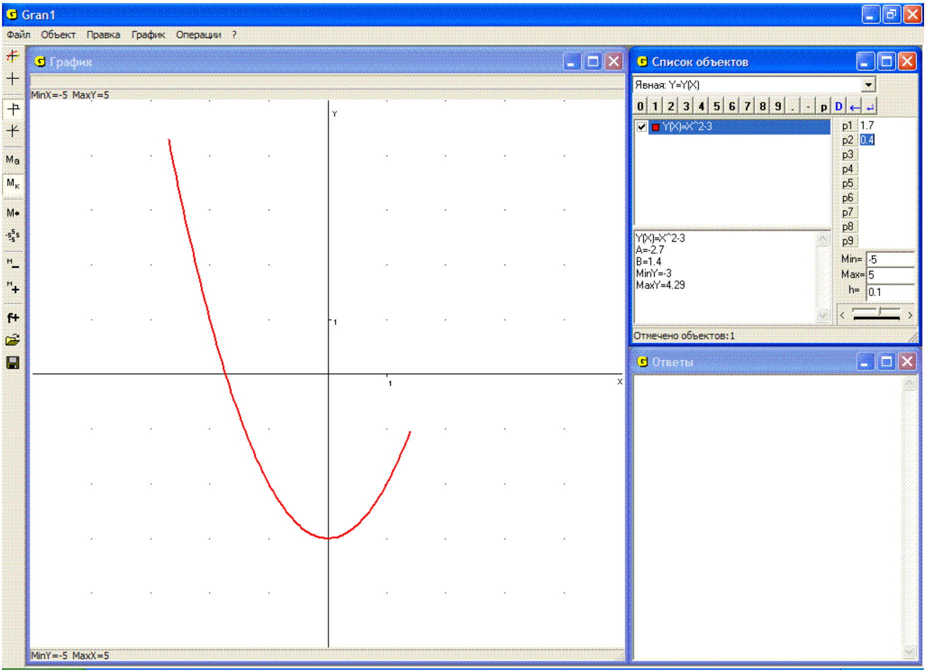

Gran1
Файл Объект Правка График Операции ?
График
MinX=-5 MaxY=5
Y
X
1
1
MinY=-5 MaxX=5
Список объектов
Явная: Y=Y(X)
Y(X)=X^2-3
Y(X)=X^2-3
A=-2.7
B=1.4
MinY=-3
MaxY=4.29
p1 1.7
p2 0.4
Min= -5
Max= 5
h= 0.1
Отмечено объектов:1
Ответы

Рис. 8.7

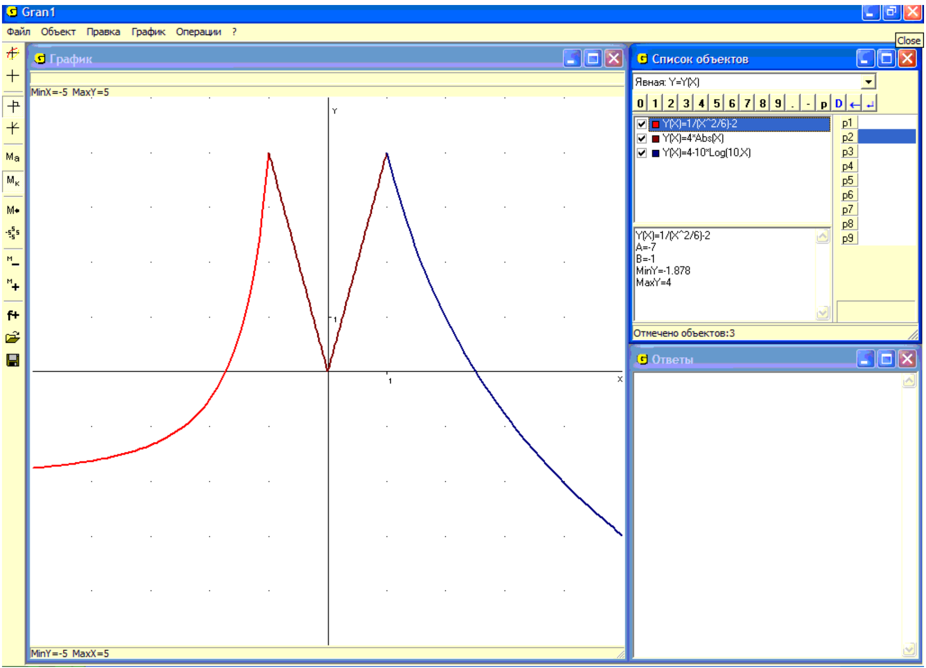

Gran1
Файл Объект Правка График Операции ?
Close
График
MinX=-5 MaxY=5
Y
X
1
1
MinY=-5 MaxX=5
Список объектов
Явная: Y=Y(X)
Y(X)=1/(X^2/6)-2
Y(X)=4*Abs(X)
Y(X)=4-10*Log(10,X)
Y(X)=1/(X^2/6)-2
A=-7
B=-1
MinY=-1.878
MaxY=4
Отмечено объектов:3
Ответы

Рис. 8.8

Если при вводе выражений зависимостей против надписи “Строить график” были установлены метки , то после обращения к услуге “График / Построить” в окне “График” будут построены графики указанных зависимостей (Рис. 8.8). Если очистить окно “График”, воспользовавшись услугой “График / Очистить”, то чтобы опять построить графики, следует обратиться к услуге “График / Построить”.

Иногда бывает необходимо увеличить изображение в некоторой части окна “График” до размеров всего окна. Для этого следует установить прямоугольник, в котором размещена часть изображения, которая увеличивается. Эта операция осуществляется с помощью манипулятора “мышь”. Курсор “мыши” нужно установить в одну из вершин необходимого прямоугольника, затем нажать левую кнопку “мыши” и, не отпуская ее, указатель “мыши” переместить в точку, которая будет противоположной вершиной прямоугольника.

Как только кнопка “мыши” будет отпущена, автоматически будет выполнено изменение масштаба вдоль осей Ox и Oy. В окне “График” строится увеличенная до размеров всего окна часть изображения, которая была заключена внутри прямоугольника. Эта услуга используется при необходимости уточнить вид графика в некоторой его части, координаты характерных его точек и т.п.

4. Пусть необходимо выяснить, есть ли на графике зависимости $y(x) = \sin(x) + 2 - \ln(x)$ и на оси Ox общая точка в области, ограниченной прямоугольником на Рис. 8.9.

На первый взгляд ответ утвердительный (если точность вычислений небольшая). Однако, если увеличить график в некоторой окрестности исследуемой точки, окажется, что общей точки на указанных линиях в указанной окрестности нет (Рис. 8.10).

Увеличение масштаба, в котором строится график, фактически приводит к увеличению точности вычислений в окрестности исследуемой точки.

Чтобы после операции увеличения вернуться к предыдущему изображению, следует обратиться к услуге “График / Масштаб / Предыдущий масштаб” или воспользоваться кнопкой “М$_{\leftarrow}$” на панели инструментов.

При необходимости удалить из окна “График” построенные там изображения используется услуга “График / Очистить”.

При необходимости вычислить значение некоторого выражения вида $f(x)$ для заданного значения x можно воспользоваться графиком зависимости $y = f(x)$. Для этого следует подвести указатель “мыши” к соответствующей точке на графике функции в окне “График” и в левом верхнем углу этого окна прочитать координаты x, y точки (Рис. 8.11). Тот же результат можно получить с помощью клавиатуры, воспользовавшись услугой “График / Координаты с клавиатуры”. При этом чем больший масштаб построения, тем более точные результаты.

На Рис. 8.11 курсор установлен на графике функции в точке с абсциссой $x \approx 6.9$. При этом значение $y \approx 6.4$.

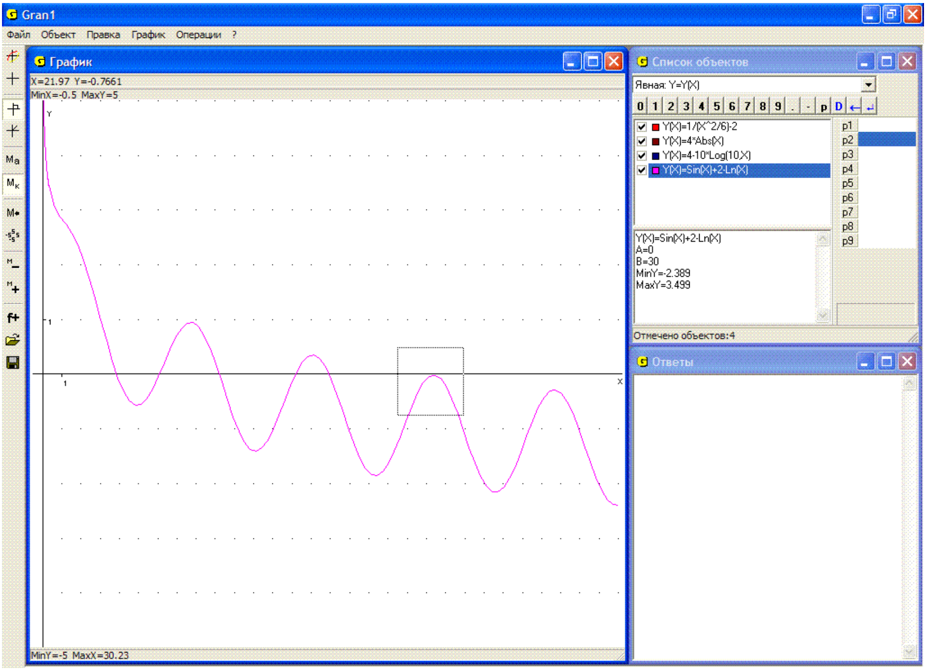


Рис. 8.9

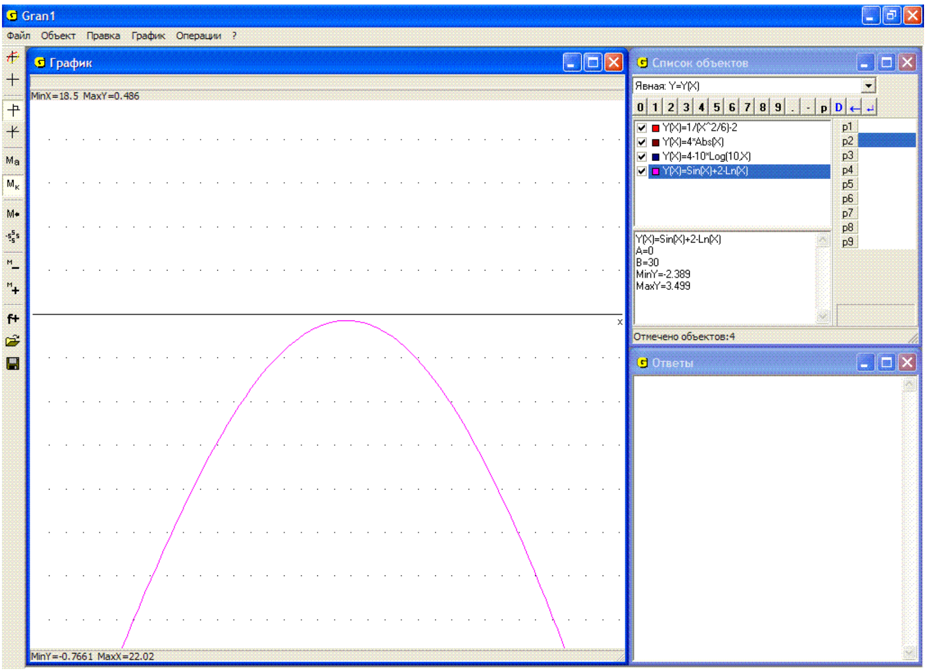


Рис. 8.10

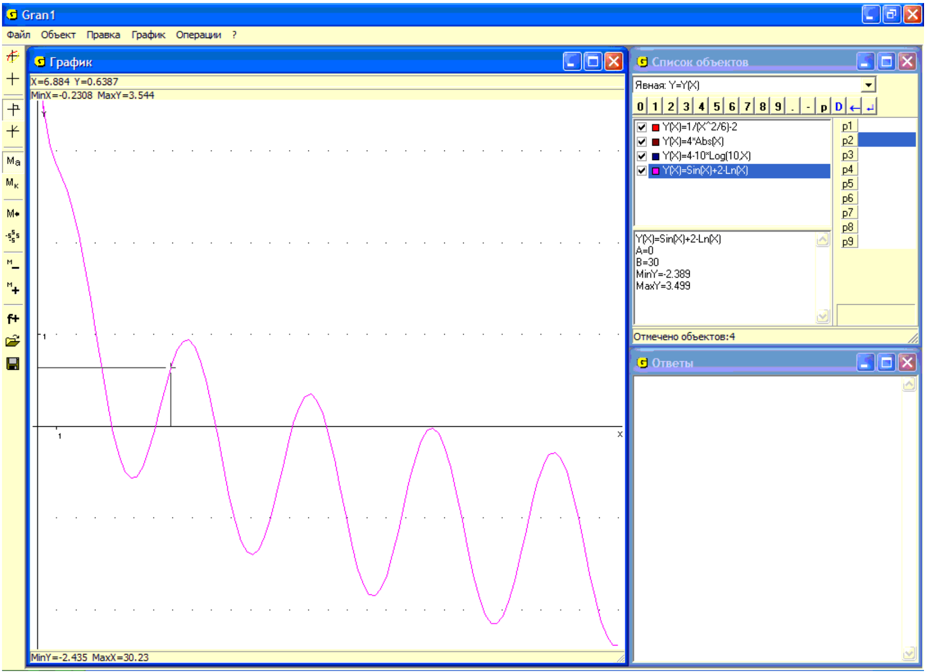


Рис. 8.11

Другой способ вычисления значения того же выражения – обратиться к услуге “Операции /Калькулятор”. При обращении к этой услуге появляется окно “Калькулятор”, в котором представлены панель ввода данных, поле с надписью “Выражение:” в начале строки ввода и поле ответов (Рис. 8.12). Чтобы получить искомое значение выражения, нужно ввести его в строку ввода (как и любые другие выражения)

В выражение, которое вводится и отображается в строке “Выражение:”, могут входить любые функции, обозначения которых имеются на панели ввода данных, однако не могут входить переменные, то есть вместо аргументов должны быть указаны их конкретные значения.

Ввод выражений осуществляется, как и раньше, с клавиатуры или с использованием панели ввода данных.

После ввода выражения для получения ответа нужно “нажать” кнопку “Вычислить”. В поле, которое находится ниже строки “Выражение:”, появляется ответ – значение введенного выражения. В случае необходимости ответ можно скопировать в буфер обмена для последующего использования в других программах.

Кнопка “Очистить” предназначена для очистки строки “Выражение:” и поля ответов. Кнопка “Закрыть” используется в случае необходимости закрыть окно калькулятора.

5. Пусть необходимо вычислить значение выражения $\lg(x)+\cos(x)$ при значении $x=2.38$.

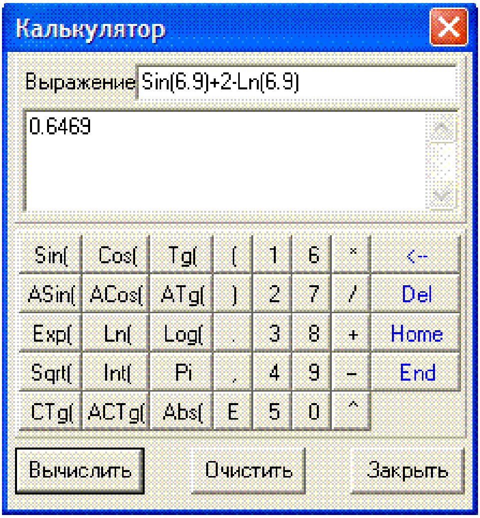


Рис. 8.12

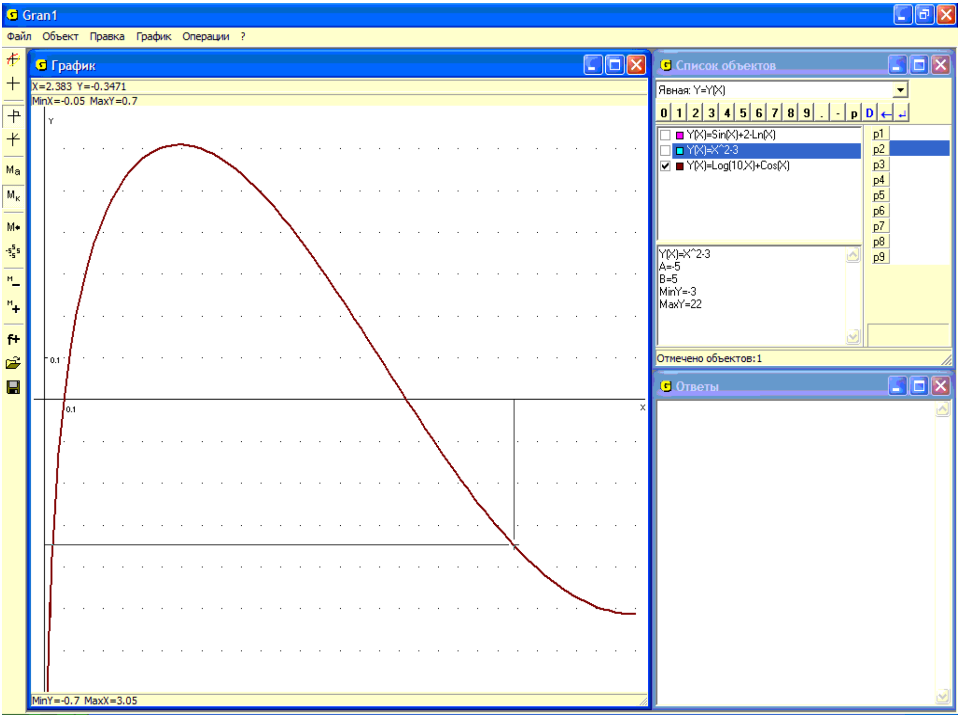


Рис. 8.13

Построив график зависимости $\lg(x)+\cos(x)$ на промежутке [0, 3] и обратившись к услуге “Координаты”, следует установить курсор в точку с абсциссой $x=2.38$, после чего переместить курсор вверх или вниз в точку на построенном графике. Ордината этой точки и будет искомым значением выражения $\log(10{,}2.38)+\cos(2.38)$ – $y=-0.347$ (Рис. 8.13). Использование калькулятора дает значение $y=-0.3472$.

Если необходимо увеличить точность вычислений, следует изменить отрезок, на котором выбирается x, например, положить $A=2.3$, $B=2.5$ и т.п., или же воспользоваться услугой увеличения части графика.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая услуга программы GRAN1 предназначена для построения графиков зависимостей между переменными?
2. Сколько графиков можно построить одновременно?
3. Как узнать, какой график соответствует тому или другому выражению?
4. Как построить графики лишь двух зависимостей, если введены больше двух выражений?
5. Обязательно ли все зависимости, графики которых строятся, должны иметь один и тот же тип задания?
6. Как можно увеличить часть графика?
7. Как возобновить график, если часть графика увеличивали?
8. Как можно определить значение выражения $f(x)$ при заданном значении переменной x, используя услуги программы GRAN1?
9. Как построить график зависимости, определенной через разные аналитические выражения на нескольких соседних промежутках?
10. Как увеличить точность определения координат точек, которые лежат на графике в окрестности некоторой точки?
11. Как удалить все построения из окна “График”?
12. Как удалить часть построений из окна “График” и оставить лишь некоторые из них?

Упражнения для самостоятельного выполнения

1. Построить графики приведенных ниже зависимостей. Для указанных значений x определить соответствующие значения $y=f(x)$.

1.1. $y=2\sin x$; $x=$0; 1; 1.57; 2; 3; 3.14.

1.2. $y=\cos 2x$; $x=$0; 1; 1.57; 2; 3; 3.14.

1.3. $y=2^x$; $x=$0; 1; 2; 3.

1.4. $y=\log_2 x$; $x=$1; 2; 4; 8.

1.5. $y=\left||x-1|-|x-2|\right|$; $x=$-2; -1; 0; 1; 2.

1.6. $y=\dfrac{x-1}{x+2}$; $x=$-3; -1; 0; 1; 2; 3.

1.7. $y=(x-1)^2(x-2)^3$; $x=$-3; -1; 0; 1; 2; 3; 4.

1.8. $y=\sqrt[3]{x}$; $x=$-8; -4; -2; 0; 1; 2; 4; 8.

1.9. $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$; $x=$ -4; -2; -1; 0; 1; 2; 4 (гиперболический косинус).

1.10. $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$; $x=$ -4; -2; -1; 0; 1; 2; 4 (гиперболический синус).

1.11. $y=\frac{\sin x}{x}$; $x=$ -4; -2; -1; 0; 1; 2; 4.

1.12. $y=(1+x)^x$; $x=0$; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8.

2. Построить на экране одновременно графики двух зависимостей $y_1=P2(P1^2-x^2)(5P1^2-x^2)$, $(P2<0)$; $y_2=P2(P1^2-x^2)^2$ для значений x, изменяющихся в пределах от $-P1$ до $+P1$. Рассмотреть несколько значений $P1$: 2, 4, 6 и при каждом значении $P1$ несколько значений $P2$: – 0.1, – 0.5, – 1, – 2.
3. Построить на экране одновременно графики функций: $y=\sin x$, $y=2\sin x$, $y=\sin 2x$, $y=\sin(x+2)$. Воспользоваться параметрами $P1$, $P2$, $P3$, $P4$ введя выражение $y=P1\cdot sin(P2\cdot+P3)+P4$ и фиксируя нужные объекты.
4. Построить на экране одновременно графики функций: $y=1.1^x$, $y=1.2^x$, $y=2^x$, $y=3^x$, $y=4^x$. Воспользоваться параметром $P1$, введя выражение $y=P1^x$ и фиксируя соответствующие объекты.
5. Построить на экране одновременно графики функций: $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$, $y=\log_4 x$, $y=\lg x$, $y=\log_{1/2} x$, $y=\log_{1/4} x$. Воспользоваться параметром $P7$, введя выражение $y=\log(P7,x)$.
6. Построить на экране одновременно графики функций: $y=x^2-3$, $y=\frac{1}{x^2-3}$.
7. Построить график функции $f(x)=\frac{x}{\ln x}$. Куда стремится значение функции $f(x)$, если значение аргумента x стремится к $+\infty$?
8. Какая функция на промежутке $[0,\infty)$ возрастает быстрее: x^n или n^x ? (положить $n=2$, 3, 4).
9. Доказать, что при изменении значений параметра $P2$ и любых фиксированных $P1$, $P3$ вершины парабол $P1\cdot x^2+P2\cdot x+P3$ перемещаются по параболе (см. Рис. 8.6). Рассмотреть случаи $P1>0$, $P1<0$.

§9. Неявно заданные зависимости

Если зависимость между переменными x и y задана в виде $G(x, y) = 0$, где $G(x, y)$ некоторое выражение от двух переменных x и y, определенное в некоторой области изменения значений x и y, тогда говорят, что зависимость переменной y от переменной x (или, наоборот, переменной x от переменной y) задана неявно. Если для каждого значения x из некоторого промежутка существует значение y, которое вместе с x удовлетворяет уравнение $G(x, y) = 0$, то тем самым определяется зависимость $y = f(x)$, для которой равенство $G(x, f(x)) = 0$ удовлетворяется при всех значениях x из указанного промежутка (становится тождественным относительно x). В выражение $G(x, y)$ могут входить некоторые из параметров $P1$, $P2$, …, $P9$.

Прежде чем вводить выражение $G(x, y) = 0$, следует установить в окне “Список объектов” тип задания зависимости “Неявная: $0 = G(X, Y)$” (Рис. 9.1). Дальше создание объекта осуществляется аналогично тому, как и при задании явной зависимости.

При обращении к услуге “Объект / Создать” появляется окно “Ввод выражения зависимости” (Рис. 9.2). В строке “0=” записывается выражение $G(x, y)$, в которое могут входить две переменные x и y или только одна из них, а также некоторые из параметров $P1$, $P2$, …, $P9$.

В отличие от задания явной зависимости, при задании неявной нужно указать отрезки задания каждой из переменных x и y. В строках “A=” и “B=” необходимо указать соответственно нижний и верхний пределы отрезка, на котором изменяется переменная x, в строках “Ay=” и “By=” нижний и верхний пределы отрезка, на котором изменяется переменная y. В выражения, через которые определяются пределы изменения переменных x и y, также могут входить параметры (Рис. 9.2).

Переключатель “Качество построения графика” предназначен для ускорения построения графика зависимости. Если переключатель установлен в самое левое положение, то скорость построения графика растет, но при этом уменьшается точность графических построений.

Все другие правила, касающиеся графических построений, остаются такими же, как и раньше.

Примеры

1. Уравнением вида $ax + by + c = 0$ описывают прямую линию. Поставив в соответствие параметру a уравнения динамический параметр $P1$, параметру b − $P2$ и параметру c − $P3$, создадим объект $P1x + p2y + p3 = 0$. При конкретных значениях параметров $P1$, $P2$, $P3$ данному объекту будут соответствовать разные прямые. На Рис. 9.3 изображены прямые $P1x + P2y + P3 = 0$ при разных значениях параметров $P1$, $P2$, $P3$.

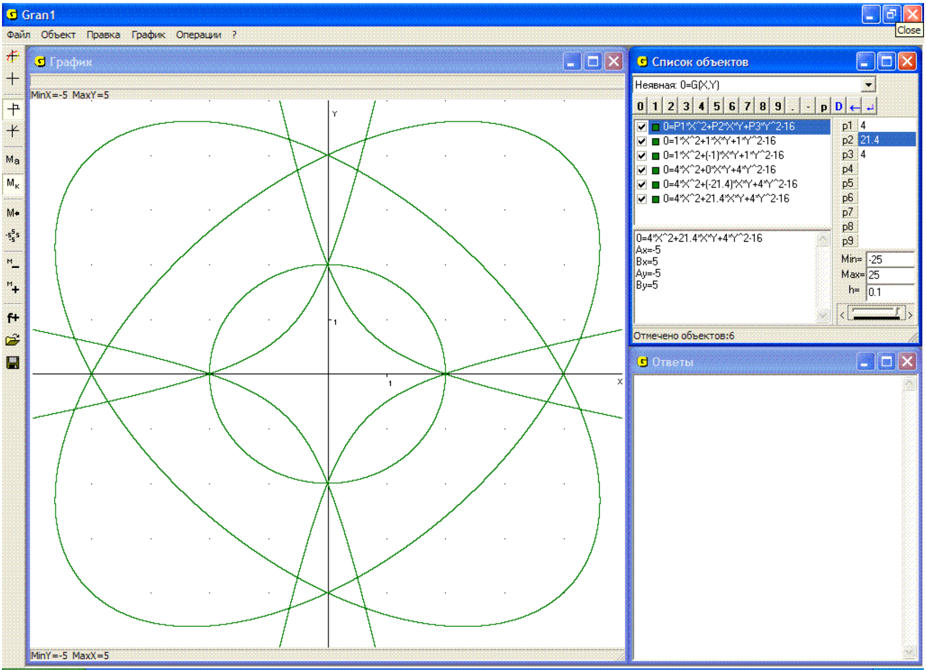


Рис. 9.1

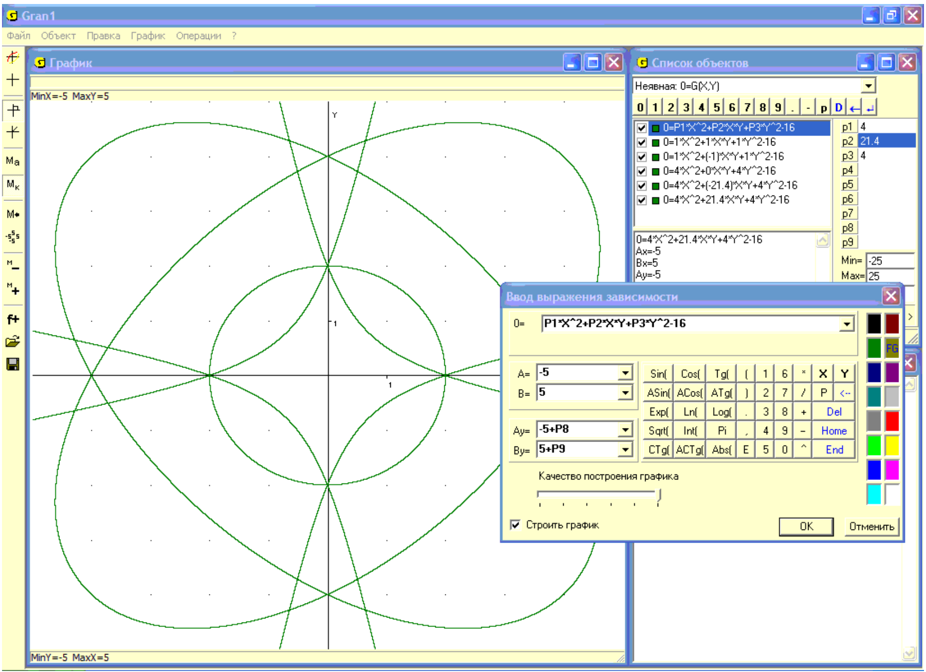


Рис. 9.2

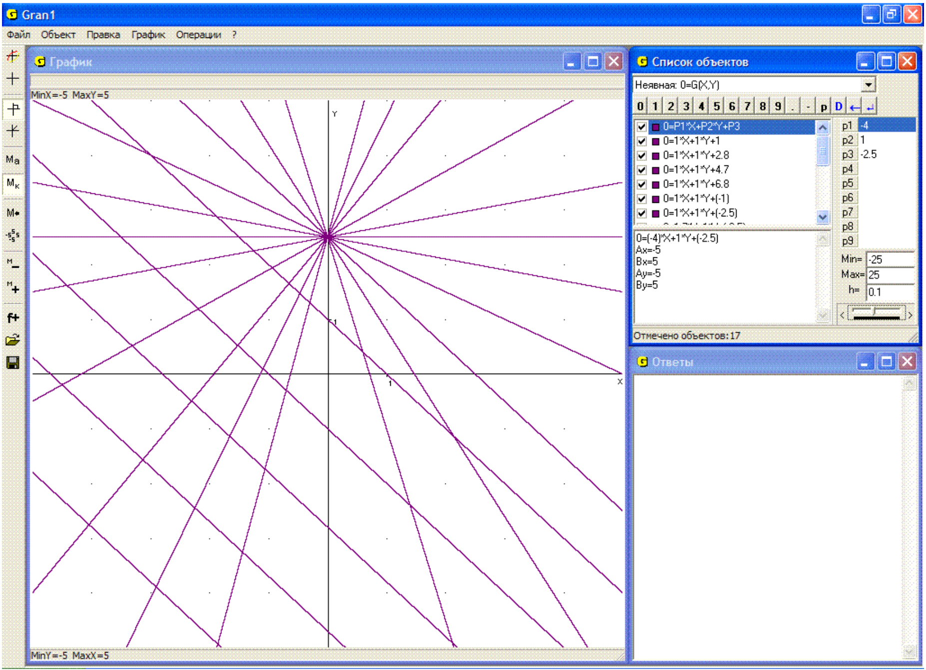


Рис. 9.3

2. Уравнением вида $(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$ описывают окружность радиуса r с центром в точке с координатами $x=a$, $y=b$. На Рис. 9.4 представлены изображения окружностей $(x-P1)^2+(y-P2)^2=P3^2$ при разных значениях параметров $P1$, $P2$, $P3$.

3. Уравнение вида $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ есть уравнением эллипса с центром симметрии в начале координат и полуосями a и b вдоль осей Ox и Oy. На Рис. 9.5 представлены изображения эллипсов $\dfrac{x^2}{P1^2}+\dfrac{y^2}{P2^2}-1=0$ при разных значениях параметров $P1$ и $P2$.

4. На Рис. 9.6 представлено изображение кривой $x^3+y^3-3axy=0$ – так называемый лист Декарта – при разных значениях параметра a, которому соответствует динамический параметр $P1$.

5. На Рис. 9.7 представлено графическое изображение зависимости $0=\sin(\sin x^2+\cos y^2)$.

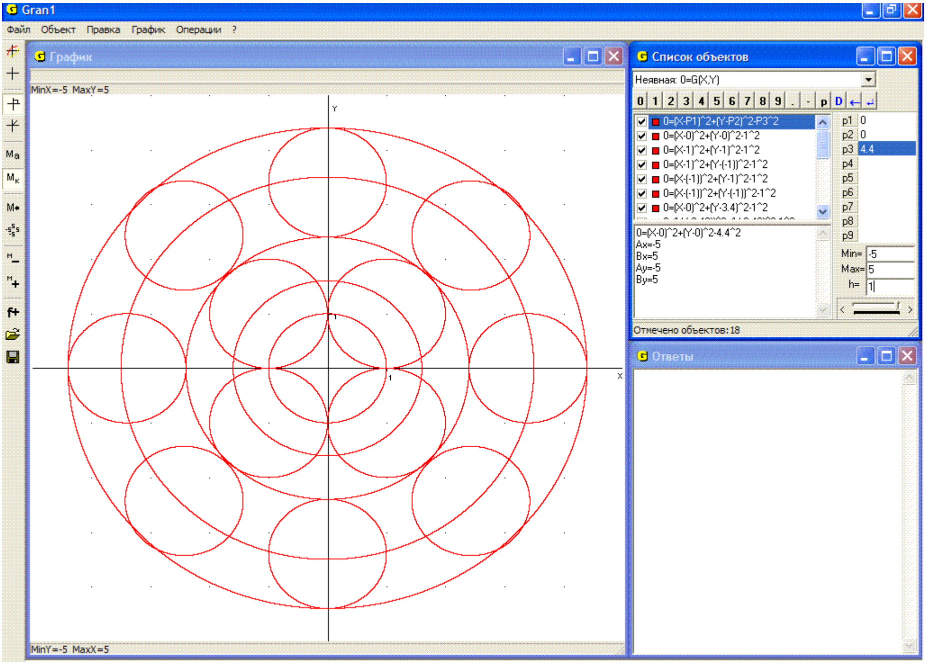

Gran1
Файл Объект Правка График Операции ?
График
MinX=-5 MaxY=5
Список объектов
Неявная: 0=G(X,Y)
0=(X-P1)^2+(Y-P2)^2-P3^2
0=(X-0)^2+(Y-0)^2-1^2
0=(X-1)^2+(Y-1)^2-1^2
0=(X-1)^2+(Y-(-1))^2-1^2
0=(X-(-1))^2+(Y-1)^2-1^2
0=(X-(-1))^2+(Y-(-1))^2-1^2
0=(X-0)^2+(Y-3.4)^2-1^2
p1 0
p2 0
p3 4.4
0=(X-0)^2+(Y-0)^2-4.4^2
Ax=-5
Bx=5
Ay=-5
By=5
Min= -5
Max= 5
h= 1
Отмечено объектов:18
Ответы
MinY=-5 MaxX=5

Рис. 9.4

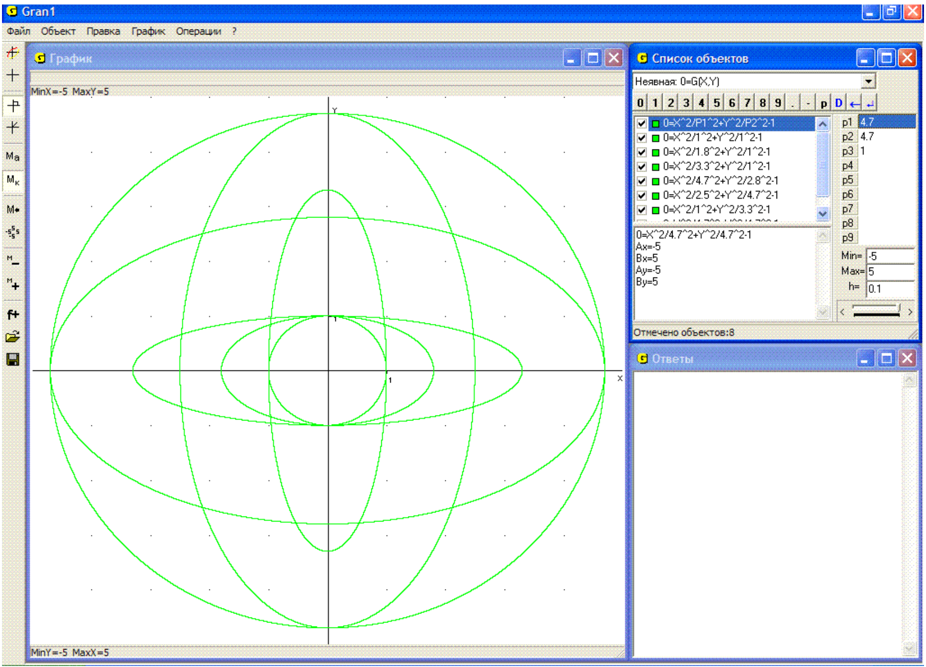

Gran1
Файл Объект Правка График Операции ?
График
MinX=-5 MaxY=5
Список объектов
Неявная: 0=G(X,Y)
0=X^2/P1^2+Y^2/P2^2-1
0=X^2/1^2+Y^2/1^2-1
0=X^2/1.8^2+Y^2/1^2-1
0=X^2/3.3^2+Y^2/1^2-1
0=X^2/4.7^2+Y^2/2.8^2-1
0=X^2/2.5^2+Y^2/4.7^2-1
0=X^2/1^2+Y^2/3.3^2-1
p1 4.7
p2 4.7
p3 1
0=X^2/4.7^2+Y^2/4.7^2-1
Ax=-5
Bx=5
Ay=-5
By=5
Min= -5
Max= 5
h= 0.1
Отмечено объектов:8
Ответы
MinY=-5 MaxX=5

Рис. 9.5

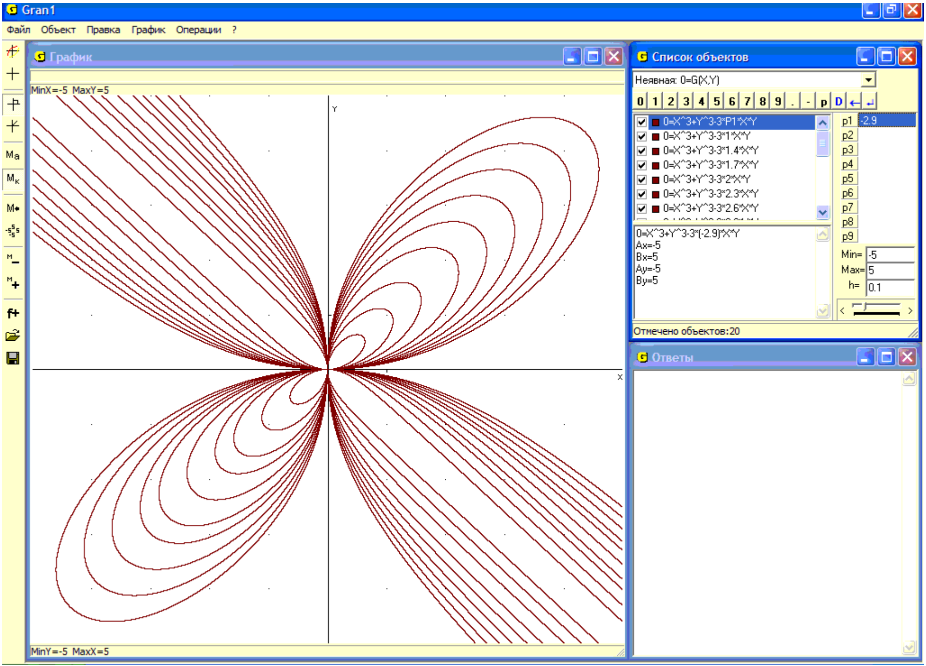

Gran1
Файл Объект Правка График Операции ?
График
MinX=-5 MaxY=5
MinY=-5 MaxX=5
Список объектов
Неявная: 0=G(X,Y)
0=X^3+Y^3-3*P1*X*Y
0=X^3+Y^3-3*1*X*Y
0=X^3+Y^3-3*1.4*X*Y
0=X^3+Y^3-3*1.7*X*Y
0=X^3+Y^3-3*2*X*Y
0=X^3+Y^3-3*2.3*X*Y
0=X^3+Y^3-3*2.6*X*Y
0=X^3+Y^3-3*(-2.9)*X*Y
Ax=-5
Bx=5
Ay=-5
By=5
Отмечено объектов:20
Ответы

Рис. 9.6

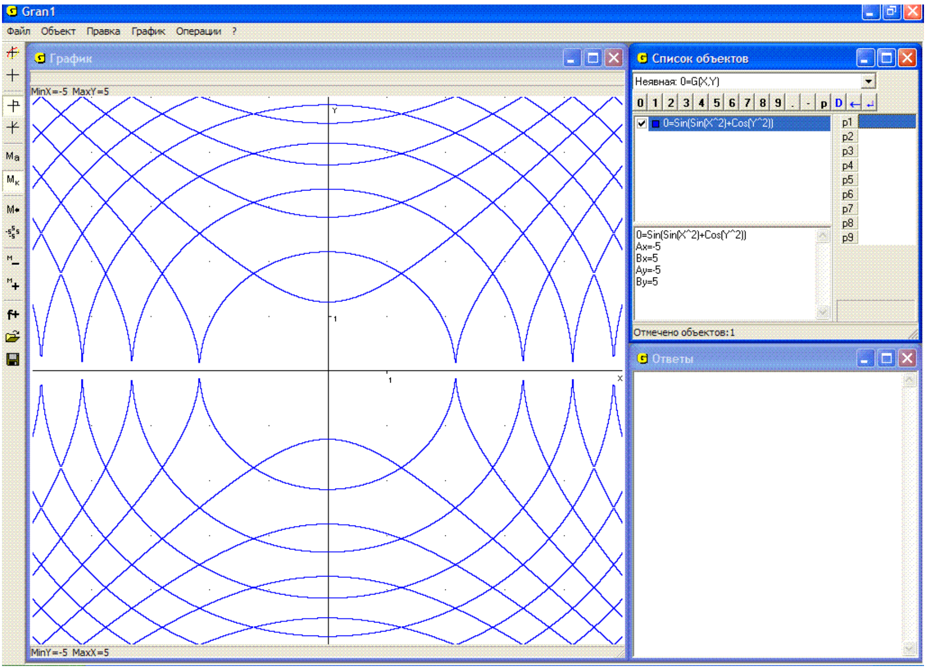

Gran1
Файл Объект Правка График Операции ?
График
MinX=-5 MaxY=5
MinY=-5 MaxX=5
Список объектов
Неявная: 0=G(X,Y)
0=Sin(Sin(X^2)+Cos(Y^2))
Ax=-5
Bx=5
Ay=-5
By=5
Отмечено объектов:1
Ответы

Рис. 9.7

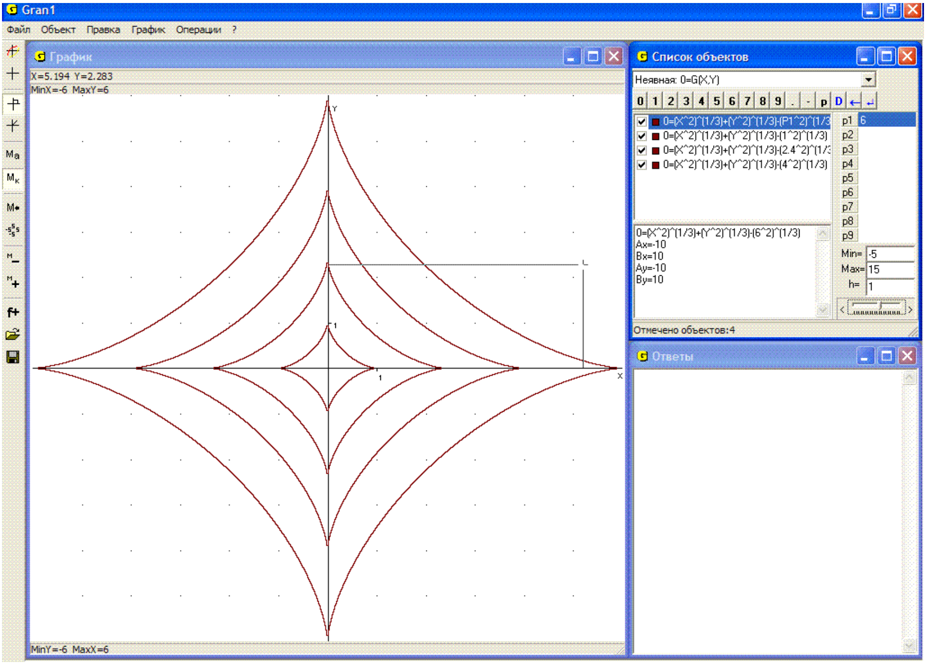


Рис. 9.8

6. На Рис. 9.8 представлено графическое изображение зависимости $(x^2)^{1/3} + (y^2)^{1/3} = (a^2)^{1/3}$, ($a > 0$), при разных значениях параметра a, которому соответствует динамический параметр $P1$. Такую кривую называют астроидой.

7. На Рис. 9.9 представлено изображение зависимостей $|x|^q + |y|^q = 1$, $(q > 0)$, при разных значениях параметра q, которому соответствует динамический параметр $P1$.

При необходимости вычислить значение выражения (от двух аргументов) $G(x, y)$ в некоторой точке (x, y) можно воспользоваться услугой “Операции / значение выражения G(x, y)” (Рис. 9.10).

При обращении к этой услуге в поле окна “График” появляется курсор, а над окном “График” координаты x и y точки, в которой установлен курсор, и значение функции $z = G(x, y)$, на обозначении которой установлен курсор в окне “Список объектов” (Рис. 9.11).

При перемещении курсора на плоскости xOy изменяются координаты точки, в которую устанавливается курсор, и одновременно соответствующее значение $z = G(x, y)$.

Для вычисления значения $G(x, y)$ при заданных значениях x и y можно воспользоваться также калькулятором (услуга “Операции / Калькулятор”).

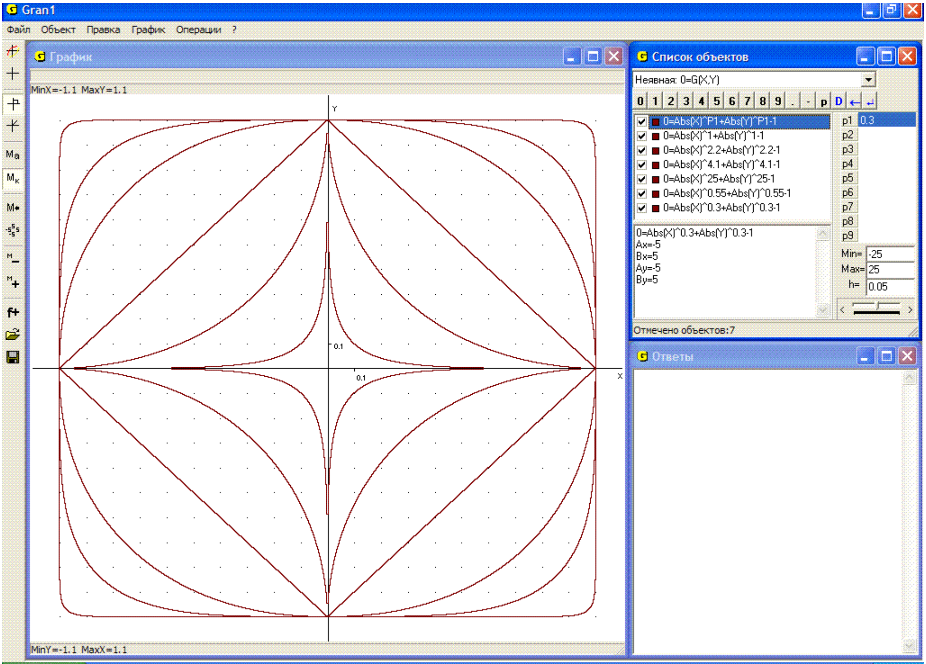


Рис. 9.9

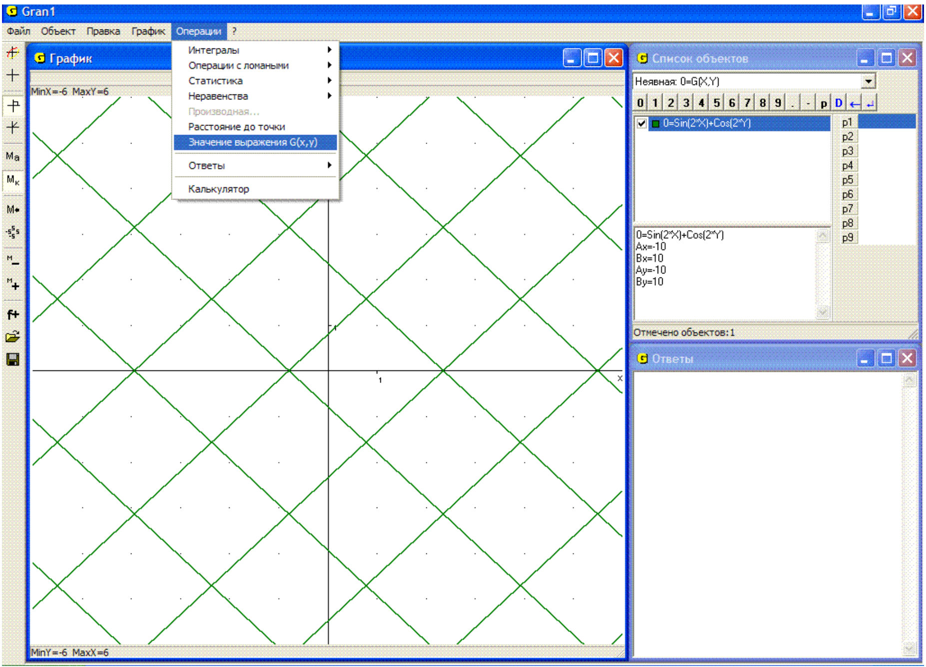


Рис. 9.10

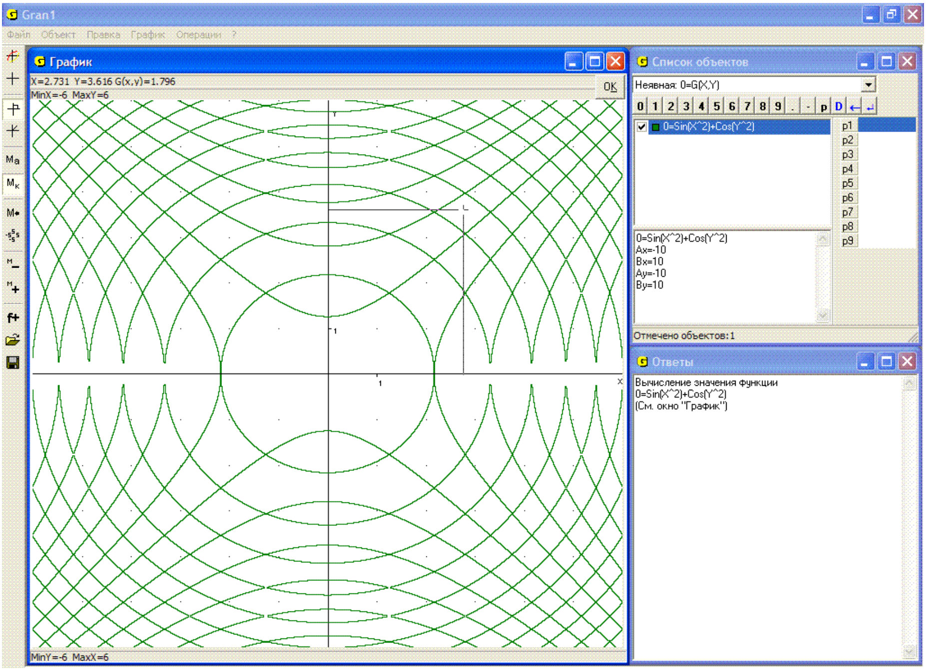


Рис. 9.11

Вопросы для самоконтроля

1. В каких случаях говорят, что зависимость между переменными x и y задана неявно?
2. Как построить график зависимости между переменными x и y, заданной в виде $G(x, y) = 0$?
3. Нужно ли выражать явно переменную y через переменную x в виде $y = f(x)$ (или наоборот переменную x через переменную y в виде $x = g(y)$, чтобы построить график зависимости между переменными x и y?
4. Сколько графиков зависимостей вида $G(x, y) = 0$ можно построить на экране одновременно?
5. Может ли выражение $G(x, y)$ быть константой? Каким будет графическое изображение зависимости в таком случае?
6. Может ли в выражении $G(x, y)$ отсутствовать переменная x или переменная y?
7. Как от явного задания зависимости между переменными x и y в виде $y = f(x)$ перейти к ее неявному заданию в виде $G(x, y) = 0$?
8. Как с использованием услуг программы GRAN1 можно вычислить значение функции от двух аргументов?

Упражнения для самостоятельного выполнения

1. Установив тип зависимости между переменными x и y в виде $G(x, y) = 0$ и обратившись к услуге “Объект / Создать”, в строке “0=” ввести постоянную 0 (нуль) и затем построить график так заданной зависимости (услуга “График / Построить”). Объяснить полученный результат.
2. При тех же условиях, что и в упражнении 1, ввести произвольную постоянную, отличающуюся от нуля, и обратиться к услуге “График / Построить”. Объяснить полученный результат.
3. Используя неявное задание зависимости между переменными x и y (тип $G(x, y) = 0$), построить графики зависимостей:

   - $y = \frac{1}{x}$;
   - $y = x^2$;
   - $y = \sqrt[3]{x}$;
   - $y = \sin x$;
   - $y = x \ln x$;
   - $y = \sqrt{x}$;
   - $y = \frac{\sin x}{x}$;
   - $y^2 = x$;
   - $y = (1 + x)^x$.
   - $y = \log_2(1 - x)$;
   - $y = \frac{1}{\log_2(1 - x)}$;

   Объяснить полученные результаты.
4. Построить графики зависимостей, используя в случае необходимости динамические параметры:

   - $0 = 1 - \log_2(xy)$
   - $0 = \frac{\sin 32|xy|}{2} + x^{20} + y^{20} - 1$
   - $\sin(2(|x| + |y|)) = 0$
   - $0 = \frac{\sin 32|xy|}{2} + x^2 + y^2 - 1$
   - $\sin(\sin(xy) + \cos(xy)) = 0$
   - $0 = x^{20} + y^{20} - 1 + \sin(8(x + y))$
   - $\sin(2(x^2 + y^2)) = 0$
   - $0 = x^2 + y^2 - 1 + \sin(32xy)$
   - $\sin(2\sqrt{x^2 + y^2}) = 0$

5. Построить графики зависимостей: $0 = xy - P1$ для разных значений параметра $P1$ в пределах от -5 до 5 через шаг изменения $h = 0.1$;
6. $\sin((x^2 + y^2)^k) = 0$ для значений $k = 1/4,\ 1/2,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16$;
7. $\cos((|x| + |y|)^k) = 0$ для значений $k = 1/4,\ 1/2,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 20,\ 25,\ 32$.
8. Построить графики зависимостей, используя в случае необходимости динамические параметры:
   - $y^2 - ax^3 = 0$ для значений $a = 0.5;\ 1;\ 1.5;\ 2;\ 2.5$ (так называемая полукубическая парабола);

- $(y-x^2)^2-x^5=0$;
- $y^2-y^4-x^4+x^6=0$;
- $y^2-x^4+x^6=0$;
- $y^2-x^2(x-1)=0$.

9. Построить графики зависимостей $G(x,y)=0$, если:
   - $G(x,y)=y^2-3$;
   - $G(x,y)=|y|$;
   - $G(x,y)=\sin y$;
   - $G(x,y)=tgy$.

   Объяснить полученные результаты.

10. Вычислить значения функции $G(x,y)=\dfrac{x}{y}$ в точках пересечения линий $xy-1=0$, $\dfrac{x}{y^2+1}-0.1=0$.

§10. Обратные зависимости и их графики

Пусть зависимость $y = f(x)$ задана на некотором множестве X (область задания функции $f(x)$), и пусть Y множество тех значений выражения $f(x)$, которые оно принимает, когда переменная x принимает значения из множества X. Если выбрать некоторое значение y_0 из множества Y, то во множестве X найдется такое значение x_0, при котором выражение $f(x)$ принимает значение y_0, то есть $f(x_0) = y_0$. Таким образом, каждому значению $y \in Y$ ставится в соответствие некоторое значение $x \in X$. Этим определяется на множестве Y зависимость $x = g(y)$, которая называется обратной к зависимости $y = f(x)$. При этом если соответствие (зависимость) $y = f(x)$, согласно которому множество X отображается во множество Y (пишут $f: X \to Y$), взаимно однозначное, то есть каждому $x \in X$ по правилу $f(x)$ ставится в соответствие единственное значение $y \in Y$, и разным значениям $x \in X$ ставятся в соответствие разные значения $y \in Y$, то обратная зависимость определяется однозначно. Если же соответствие $f: X \to Y$ не взаимно однозначное, то и обратная зависимость будет неоднозначной.

Если соответствие $f: X \to Y$ ($g: Y \to X$) однозначное, тогда говорят о функциональной зависимости $y = f(x)$ ($x = g(y)$) или функции $y = f(x)$ (обратной функции $x = g(y)$). Обратную функцию иногда обозначают $f^{-1}: Y \to X$.

Примерами, когда обратная зависимость определяется однозначно, могут быть:

1) линейная функция ($y = ax + b$, $a \neq 0$);

2) степенная функция $y = x^n$ при нечетных n ($n = 2k + 1$, $k =$ 0, 1, 2…);

3) показательная функция $y = a^x$, ($a > 0$, $a \neq 1$);

4) логарифмическая функция $y = \log_a x$, ($a > 0$, $a \neq 1$);

5) функция $y = \dfrac{a}{x}$, ($a \neq 0$, $x \neq 0$);

6) любая монотонно возрастающая или монотонно убывающая функция.

В приведенных примерах всегда каждому допустимому значению x (из области задания выражения $f(x)$) соответствует единственное значение y из области значений $f(x)$, и каждое значение y из области значений $f(x)$ соответствует только одному значению x из области задания выражения $f(x)$. Таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие $f: X \to Y$ между элементами (точками) множества X (области задания выражения $f(x)$) и элементами (точками) множества Y (области значений $f(x)$).

При взаимно однозначном соответствии $f: X \to Y$ всегда существует единственная обратная к $y = f(x)$ функция $x = g(y)$, ($g: Y \to X$), такая, что для любого $x \in X$ $g(f(x)) = x$, ($x \in X$, $f(x) \in Y$, $g(f(x)) \in X$), и для любого $y \in Y$ $f(g(y)) = y$, ($y \in Y$, $g(y) \in X$, $f(g(y)) \in Y$). В рассмотренном случае функции $f: X \to Y$ и $g: Y \to X$ взаимно обратные одна к другой.

Примерами, когда обратная зависимость определяется неоднозначно, могут быть такие:

1. $f(x) = a$, ($a = const$), когда область задания содержит больше чем одну точку.

Поскольку одно и то же значение $y = a$ ставится в соответствие каждому значению x из области задания выражения $f(x)$, то невозможно однозначно определить значение x, которому отвечает значение $y = a$. В этом случае обратной функции не существует (но обратная зависимость существует).

2. Любая функция, которая принимает одно и то же значение на некотором интервале (или на нескольких интервалах). В частности так называемые кусочно-постоянные функции (Рис. 10.1).

3. Функция $f(x) = x^2$.

Если $x \in [0;+\infty)$, тогда через эту функция устанавливается взаимно однозначное соответствие $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$, причем каждому значению $x \in [0;+\infty)$ ставится в соответствие единственное значение $y \in [0;+\infty)$, и разным x из $[0,+\infty)$ ставятся в соответствие разные y из $[0,+\infty)$. Таким образом в данном случае обратная к $f(x)$ функция определяется однозначно: $x \in \{+\sqrt{y}\} = \{g_1(y)\}$, $y \in [0,+\infty)$.

Если $x \in (-\infty,0]$ и $f: (-\infty,0] \to [0,+\infty)$, то рассуждая аналогично, можно сделать вывод, что и в данном случае обратная к $f(x)$ функция определяется однозначно: $x \in \{-\sqrt{y}\} = \{g_2(y)\}$, $y \in [0,+\infty)$.

Если же как область задания функции $f(x)$ взять множество $(-\infty,+\infty)$, тогда однозначно определить функцию $g(y)$, обратную к $f(x)$, невозможно, так как одно и то же значение $y \in [0,+\infty)$ ставится в соответствие двум разным значениям $x \in (-\infty,+\infty)$.

Поэтому обратная зависимость $x = g(y) = \pm\sqrt{y}$ не будет однозначной: из $y = f(x)$, $x \in (-\infty,+\infty)$, следует $x \in \{-\sqrt{y}, +\sqrt{y}\}$, $y \in [0,+\infty)$.

Таким образом:

$g_1(y) \in [0,+\infty)$, $f(g_1(y)) = y$ для $y \in [0;+\infty)$

и $g_1((f(x)) \in \{x\}$ для $x \in [0;+\infty)$;

$g_2(y) \in (-\infty,0)$, $f(g_2(y)) = y$ для $y \in [0;+\infty)$

и $g_2((f(x)) \in \{x\}$ для $x \in (-\infty,0]$;

$g(y) \in (-\infty,+\infty)$, $f(g(y)) = y$ для $y \in [0;+\infty)$

и $g((f(x)) \in \{-x,+x\}$ для $x \in (-\infty;+\infty)$;

следовательно $x = g_1(y)$ и $x = g_2(y)$ – функции, а $g(y)$ не является функцией, так как зависимость x от y неоднозначна – одному и тому же значению $y \in (0,+\infty]$ соответствует два разных значения x: $x = -\sqrt{y}$, $x = +\sqrt{y}$.

4. $y = \sin x$. Рассуждая аналогично предыдущему, можно сделать выводы: если область задания функции $f(x) = \sin x$ такова, что двум разным значениям x не ставится в соответствие одно и то же значение y, то обратная зависимость $x = g(y)$ определяется однозначно. Как правило такой областью выбирают промежуток $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Если же область задания зависимости $y = f(x)$ такова, что разным значениям x по правилу $f(x)$ может быть поставлено в соответствие одно и то же значение y, то обратная зависимость $x = g(y)$ не является функциональной. Если же рассматривать функцию $y = f(x)$ на разных частях области задания, на которых функция $y = f(x)$ или только убывает, или только возрастет, то на таких разных частях у функции $y = f(x)$ будут разные обратные функции.

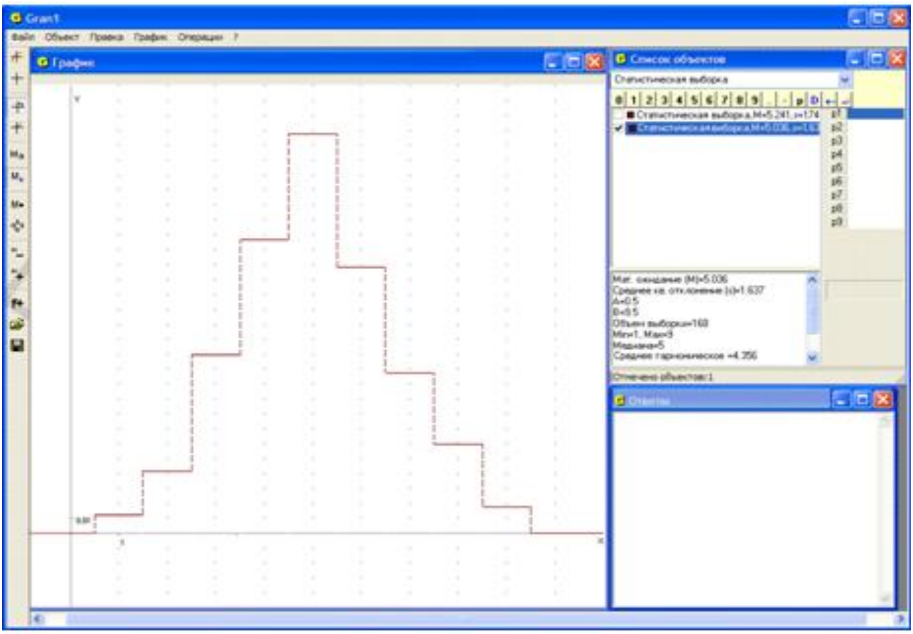


Рис. 10.1

Пусть задана некоторая зависимость $y = f(x)$ в некоторой области. Если построить график этой зависимости, то по графику можно определить обратную зависимость $x = g(y)$ следующим образом: на оси Oy выбрать значение y (аргумент для $g(y)$ из области значений $f(x)$) и через выбранную точку на оси Oy параллельно оси Ox провести прямую, точки пересечения этой прямой с графиком зависимости $y = f(x)$ спроектировать на ось Ox. Так получаются значения $x = g(y)$ такие, что $f(x) = f(g(y)) = y$. Таким образом, если аргумент выражения $g(y)$ выбирать на оси Oy (в области значений $f(x)$), то график зависимости $y = f(x)$ будет в то же время и графиком обратной зависимости $x = g(y)$. Если же этот аргумент откладывать на оси Ox, то нужно поменять ролями переменные x и y и сначала построить график зависимости $x = f(y)$, после чего на оси Ox выбирать аргумент зависимости $y = g(x)$ (из области значений $f(y)$), через выбранную точку на оси Ox провести прямую параллельно оси Oy, точки пересечения этой прямой с графиком зависимости $x = f(y)$ спроектировать на ось Oy, и так будут получены значения $y = g(x)$. Таким образом, график зависимости $x = f(y)$ есть в то же время и графиком зависимости $y = g(x)$, обратной к зависимости $x = f(y)$.

Следовательно график зависимости $y = g(x)$ получается как зеркальное отображение графика $y = f(x)$ относительно прямой $y = x$ (биссектрисы первого координатного угла).

Чтобы построить графики зависимости $y = f(x)$ и обратной к ней зависимости $y = g(x)$ с использованием услуг программы GRAN1, удобно представить зависимости между переменными x и y в виде $0 = y - f(x) = G_1(x, y)$ и $0 = x - f(y) = G_2(x, y)$, после чего построить графики зависимостей $G_1(x, y) = 0$ и $G_2(x, y) = 0$.

Примеры

1. Построить графики зависимостей: $0 = y - \ln(x)$, $0 = x - \ln(y)$.

Легко видеть (Рис. 10.2), что график зависимости $x - \ln(y) = 0$ есть в то же время и графиком зависимости $y = e^x$, обратной к которой является зависимость $y = \ln(x)$. При этом $g(f(x)) = e^{\ln x} = x$, $f(g(x)) = \ln(e^x) = x$.

2. Построив графики зависимостей $0 = y - \cos(x)$ и $0 = x - \cos(y)$, легко убедиться (Рис. 10.3), что график зависимости $0 = x - \cos(y)$ есть в то же время графиком зависимости $y = \arccos(x)$ (определенной на промежутке [-1, 1]), если областью задания функции $y = \cos(x)$ является промежуток [0, π].

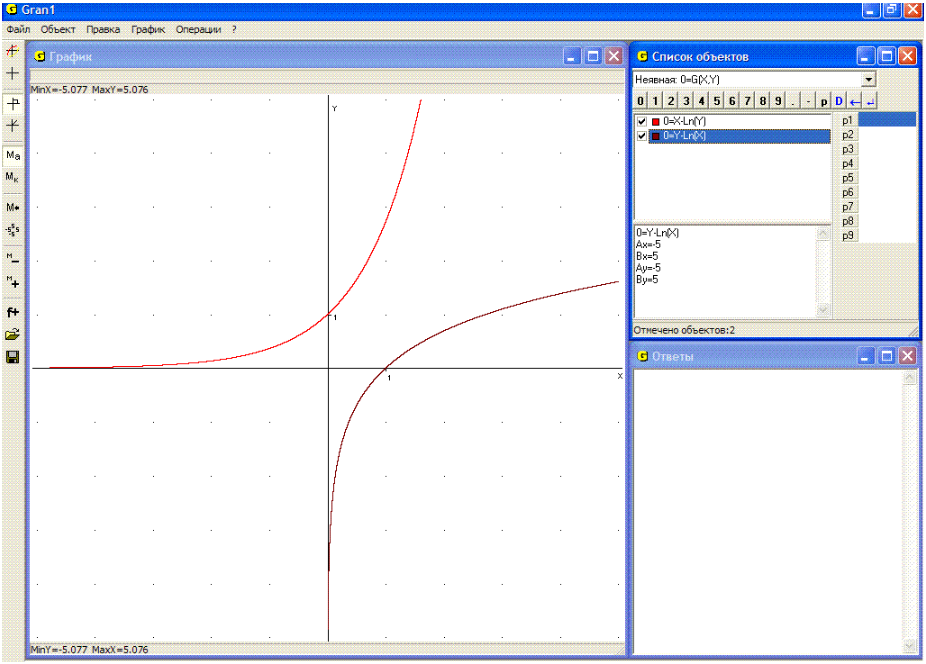


Рис. 10.2

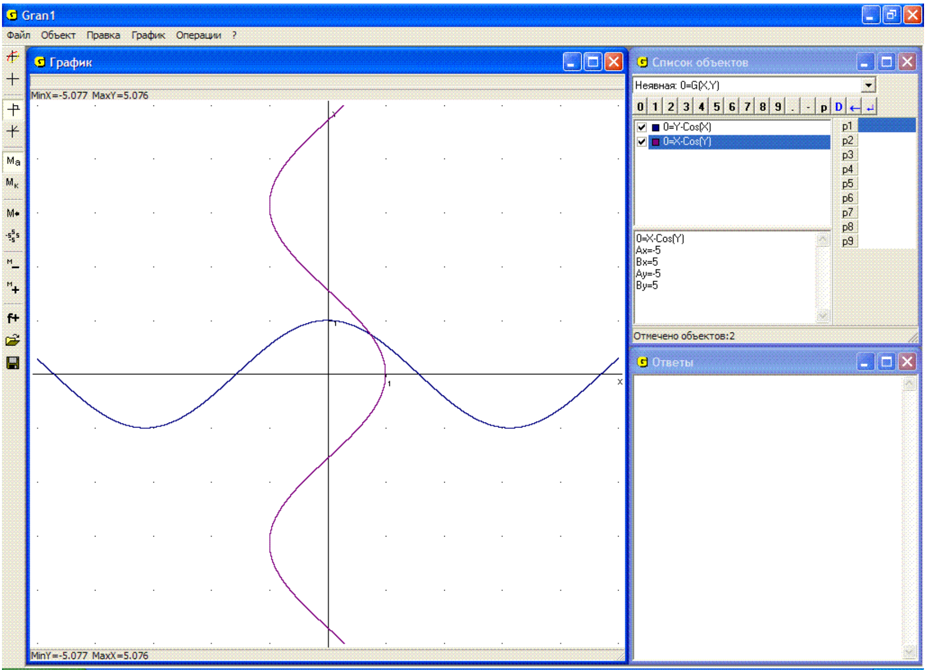


Рис. 10.3

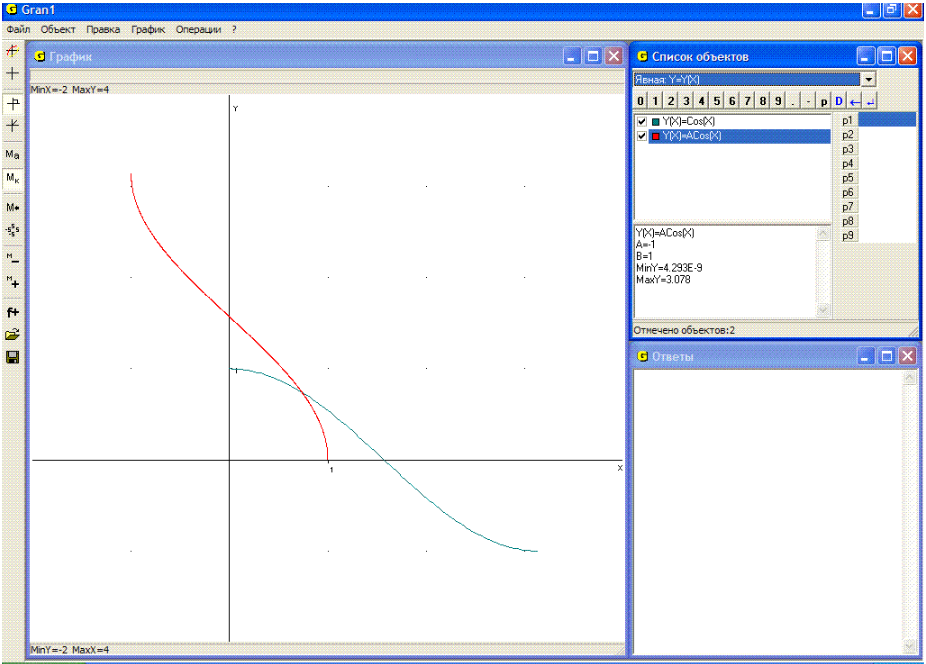


Рис. 10.4

В таком случае между множествами [0, π] и [-1, 1] устанавливается взаимно однозначное соответствие: через функцию $y = \cos(x)$ отображается отрезок [0, π] в отрезок [-1, 1], через функцию $y = \arccos(x)$ отображается отрезок [-1, 1] в отрезок [0, π] (Рис. 10.4). При этом $\cos(\arccos(x)) = x$, $\arccos(\cos(x)) = x$.

Вопросы для самоконтроля

1. Когда зависимость $y = g(x)$ будет обратной к зависимости $y = f(x)$?
2. Может ли зависимость быть обратной сама к себе? Привести примеры.
3. Когда обратная к $y = f(x)$ зависимость определяется однозначно?
4. Зависит ли существование обратной зависимости от того, в какой области задана зависимость $y = f(x)$?
5. Как можно определить значения $x = g(y) \in X$, которые соответствуют значению $y = f(x) \in Y$, если построен лишь график зависимости $y = f(x)$?
6. Можно ли график зависимости $y = f(x)$ считать одновременно и графиком обратной зависимости $x = g(y)$?
7. Как построить график зависимости $y = g(x)$, обратной к зависимости $y = f(x)$?

8. Как располагаются на плоскости xOy графики зависимости $y = f(x)$ и обратной к ней зависимости $y = g(x)$?
9. Как изменится график зависимости $G(x, y) = 0$, если поменять местами переменные x и y?

Упражнения для самостоятельного выполнения

10. Построить графики заданных и обратных к заданным зависимостям $y = x$; $y = \frac{1}{x}$; $y = \sin x$; $y = \frac{1}{x^2+1}$; $y = 2^x$; $y = tgx$.
11. Построить графики зависимостей:
12. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$ и $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - 1 = 0$;
13. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0$ и $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} - 1 = 0$;
14. $|x|^{P1} + |y|^{P1} = 1$ для значений $P1 =$ -3, -2, -1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$.

§11. Параметрическое задание зависимостей

Часто бывает удобно зависимость между переменными x и y выражать не непосредственно в виде равенства некоторых выражений, в которые входят переменные x и y, а выразить переменные x и y через некоторую вспомогательную переменную t в виде: $x = \varphi(t), y = \phi(t)$.

Если при этом зависимость $t = \omega(x)$, обратная к зависимости $x = \varphi(t)$, такая, что $\varphi(\omega(x)) = x$, $\omega(\varphi(t)) = t$, тогда можно установить непосредственную связь между переменными x и y в виде $y = \phi(\omega(x))$.

Задание зависимости между переменными x и y в виде $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$ называют параметрическим, а переменную t параметром. Исключая тем или иным способом параметр t из равенств $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, можно получить выражение зависимости непосредственно между переменными x и y. Параметрическое представление зависимостей бывает особенно удобным при исследовании траекторий движущихся точек, координаты которых x и y изменяются с изменением времени t. Через зависимости $x = \varphi(t)$ и $y = \phi(t)$ описывают траекторию движения точки (x, y) на плоскости xOy.

Чтобы с помощью услуг программы GRAN1 построить график зависимости между переменными x и y, заданной через параметр t в виде $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, нужно указать в окне “Список объектов” тип задания зависимости “Параметрическая: Y=Y(T), X=X(T)” (Рис. 11.1). При обращении к услуге создания нового объекта появляется вспомогательное окно “Ввод выражения зависимости” (Рис. 11.2). В строке “X(T)=” нужно ввести выражение для $x(t)$, в строке “Y(T)=” – выражение для $y(t)$. В строках “A=” и “B=” необходимо указать соответственно нижний и верхний пределы изменения параметра t (Рис. 11.2).

Все правила, касающиеся графических построений, остаются такими же, как и раньше.

Примеры

1. Уравнениями $x = P1\cos t$, $y = P1\sin t$ при изменении параметра t в пределах $[0;2\pi]$ определяют окружность радиуса $P1$ с центром в начале координат. Действительно $x^2 + y^2 = P1^2\cos^2 t + P1^2\sin^2 y = P1^2$. Для разных значений $P1$ соответствующие изображения показаны на Рис. 11.1.

2. Окружность радиуса $P1$ катится без скольжения вдоль прямой (оси Ox). На окружности фиксируется точка, которая в начальный момент $t = 0$ совпадает с началом координат и является точкой касания прямой и окружности.

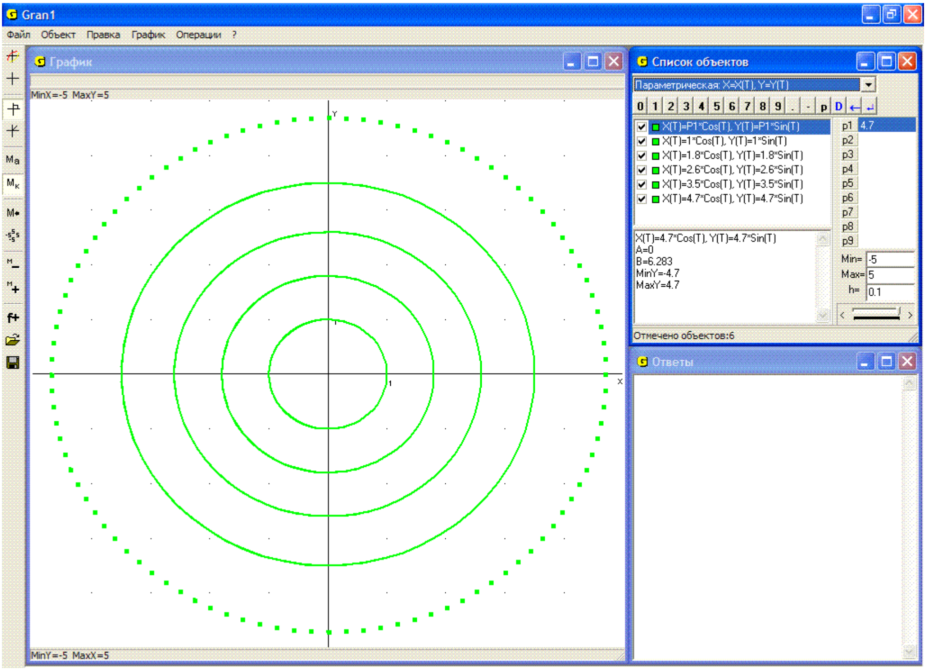


Рис. 11.1

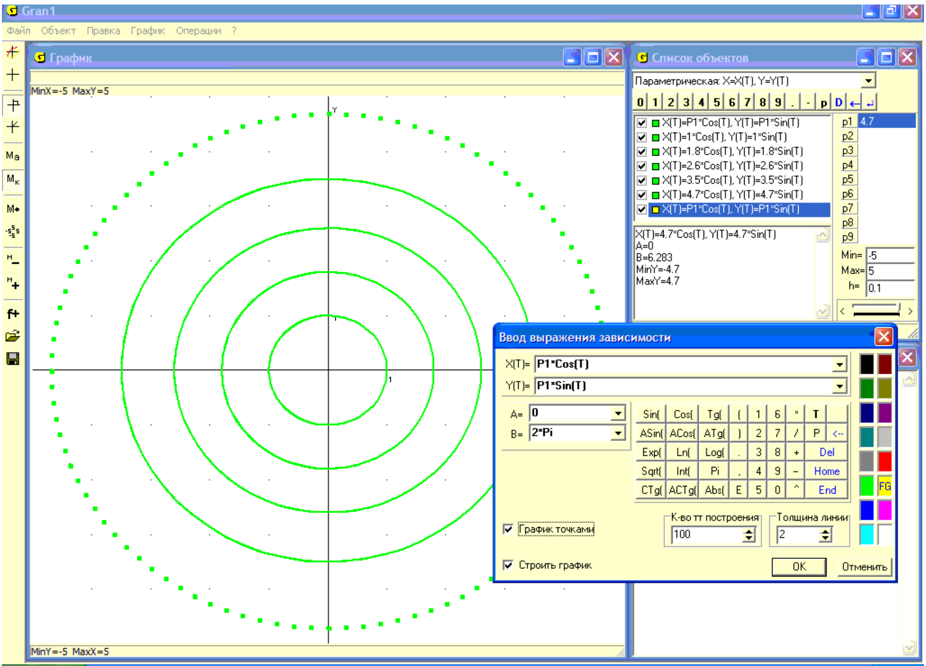


Рис. 11.2

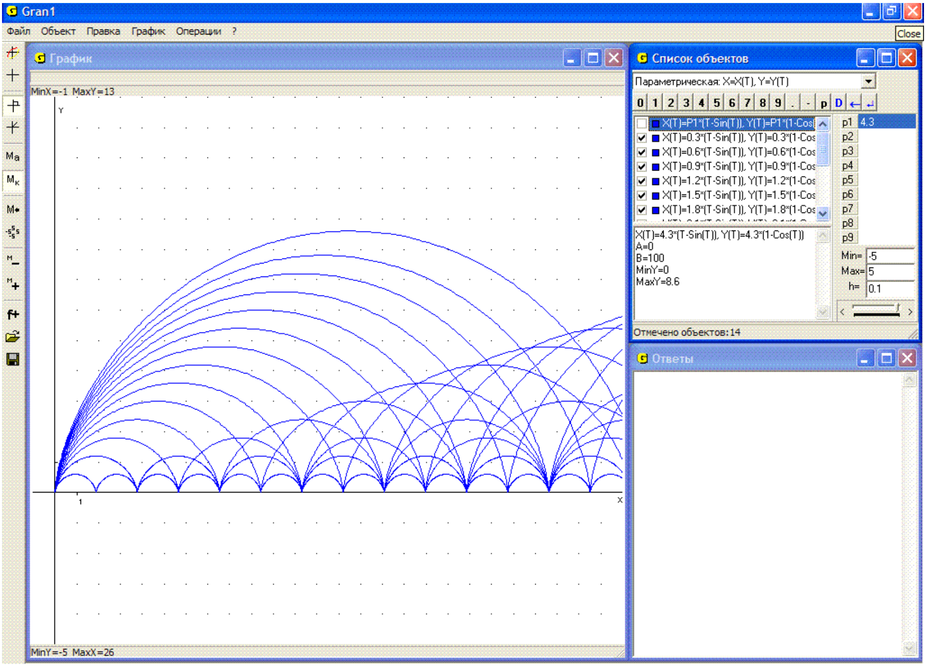


Рис. 11.3

Параметр t – это угол, на который поворачивается радиус, соединяющий центр окружности с указанной точкой на окружности.

Траекторию этой точки описывают уравнениями $x = P1t - P1\sin t = P1(t - \sin t)$, $y = P1 - P1\cos t = P1(1 - \cos t)$. Кривую, вдоль которой движется указанная точка за время, пока ее ордината y опять станет равной нулю (при $t = 2\pi$), называют циклоидой. На Рис. 11.3 показаны циклоиды для разных значений параметра $P1$.

Пример становится нагляднее, если модель циклоиды дополнить двумя объектами: образующей окружностью и точкой на ней. Для этого создадим в программе следующие объекты:

- параметрически заданную кривую $x = P1t - P1\sin t = P1(t - \sin t)$, $y = P1 - P1\cos t = P1(1 - \cos(t))$. Пределы задания для t установим $A = 0$, $B = P2/P1$;
- окружность с центром в точке $(P2;\ P1)$ радиуса $P1$;
- окружность с центром в точке
  $$(P2 - P1 \cdot \sin\frac{P2}{P1};\ P1 - P1 \cdot \cos\frac{P2}{P1})$$ радиуса 0,05.

Для параметра $P1$ установим $Min = 0$, $Max = 5$, для параметра $P2$ – $Min = 0$, $Max = 20$.

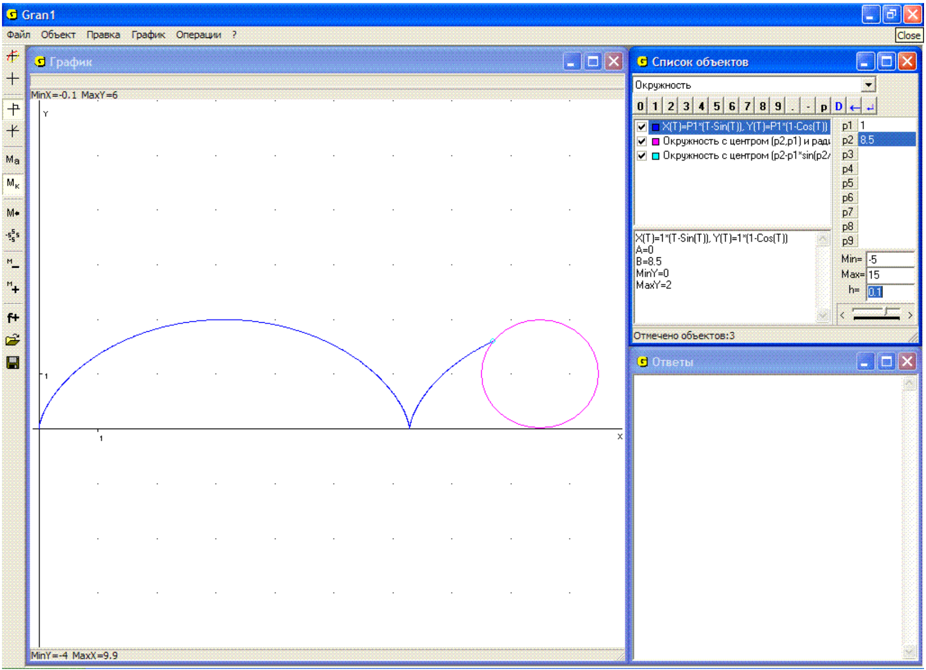


Рис. 11.4

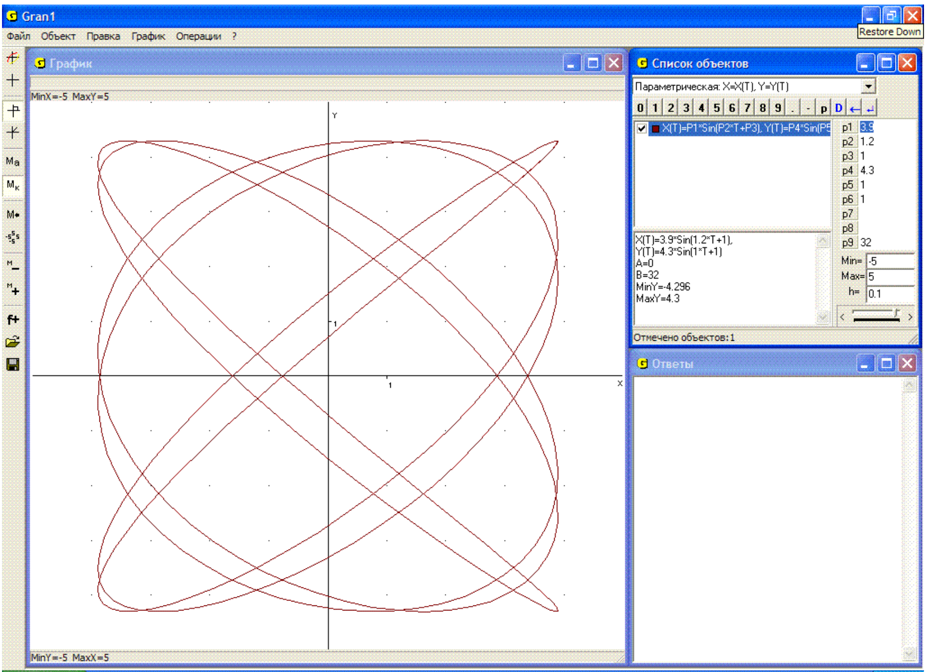


Рис. 11.5

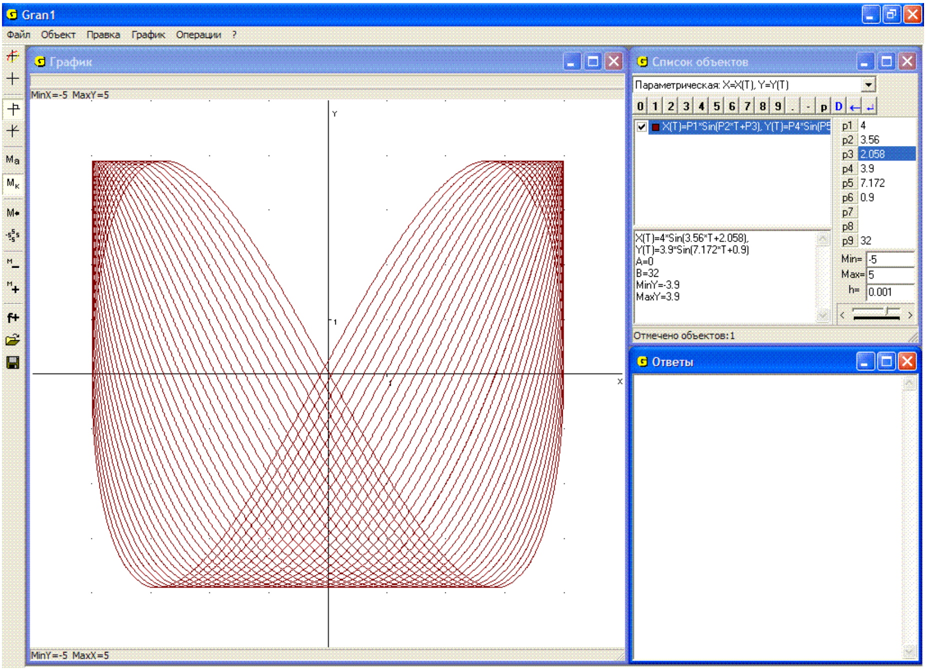


Рис. 11.6

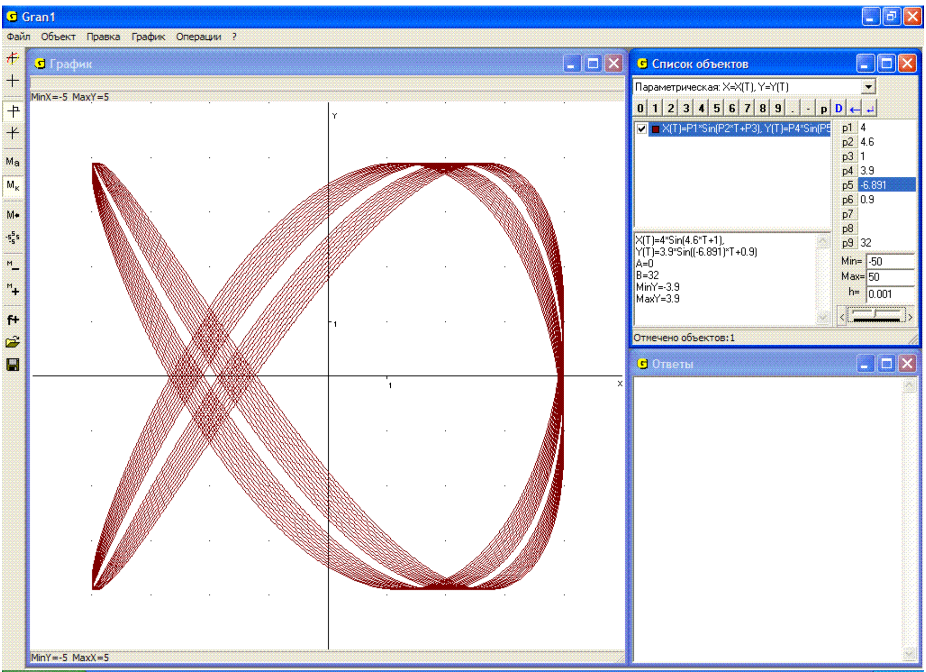


Рис. 11.7

Через первый объект определяется циклоида, через второй – образующая окружность, через третий – точка на ней. Изменяя значение параметра $P1$ (радиус образующей окружности) можно получать разные циклоиды, как показано на Рис. 11.3. Плавно изменяя значение параметра $P2$, можно смоделировать, как катится окружность вдоль прямой, и как точка на окружности описывает циклоиду (Рис. 11.4).

Аналогичные модели можно построить и для других интересных кривых: эпициклоиды, гипоциклоиды, эпи- и гипотрохоиды и т.п.

3. Фигуры Лиссажу – это графики зависимостей вида $x = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$, $y = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$. На Рис. 11.5, Рис. 11.6, Рис. 11.7 показаны некоторые фигуры, которым в программе соответствуют объекты $x = P1\sin(P2t + P3)$, $y = P4\sin(P5t + P6)$, при разных значениях параметров $P1$, $P2$, $P3$, $P4$, $P5$, $P6$ при изменении параметра t в пределах от 0 до $P9$.

Вопросы для самоконтроля

1. Как можно установить непосредственную связь между переменными x и y, исходя из параметрического задания соответствующей зависимости?
2. Как с помощью программы GRAN1 можно получить график зависимости между переменными x и y по ее параметрическому заданию?
3. Как можно найти значение переменной y, соответствующее указанному значению переменной x, если зависимость между переменными x и y задана в параметрической форме?
4. Если заданы уравнения $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$ и построена соответствующая кривая, какой будет относительно нее кривая, которая определяется через уравнения $x = \phi(t)$, $y = \varphi(t)$?
5. Если заданы уравнения $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$ и нужно построить график соответствующей зависимости между переменными x и y с использованием программы GRAN1, какое из выражений $\varphi(t)$ и $\phi(t)$ нужно вводить первым? Что случится, если порядок ввода выражений изменить?
6. Если зависимость между переменными x и y задана явно в виде $y = f(x)$, можно ли ее представить в параметрической форме?

Упражнения для самостоятельного выполнения

1. Построить графики параметрически заданных зависимостей:
$x = P1\cos t$, $y = P2\sin t$ при разных значениях параметров $P1$ и $P2$ (эллипс);
$x = (P1 + P2)\cos(t) - P1\cos\left(\frac{P1 + P2}{P1} t\right)$,
$y = (P1 + P2)\sin(t) - P1\sin\left(\frac{P1 + P2}{P1} t\right)$ при разных значениях параметров $P1$ и $P2$, $(P1 \le P2)$ (эпициклоида, описываемая

точкой окружности радиуса $P1$, которая катится вне по окружности радиуса $P2$);

$x=(P2-P1)\cos(t)-P1\cos\left(\frac{P2-P1}{P1}t\right)$,

$y=(P2-P1)\sin(t)-P1\sin\left(\frac{P2-P1}{P1}t\right)$ при разных значениях параметров $P1$ и $P2$, $(P1\le P2)$ (гипоциклоида, описываемая точкой окружности радиуса $P1$, которая катится внутри по окружности радиуса $P2$);

$x=2P1\cos t-P1\cos 2t$, $y=2P1\sin t-P1\sin 2t$ (кардиоида – частный случай эпициклоиды при $P1=P2$);

$x=P2\cos^3 t$, $y=P2\sin^3 t$ (астроида – частный случай гипоциклоиды при $P1=P2/4$).

2. Построить фигуры Лиссажу $x=A_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1)$, $y=A_2\sin(\omega_2 t+\varphi_2)$ для значений:

$A_1=4$, $A_2=4$, $\omega_1=1$, $\omega_2=1$, $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0,\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\pi$;

$A_1=4$, $A_2=4$, $\omega_1=1$, $\varphi_1=1$, $\varphi_2=1$, $\omega_2=2,3,4,\ldots,15$;

$A_1=4$, $\omega_1=1$, $\omega_2=7$, $\varphi_1=1$, $\varphi_2=2$, $A_2=1,2,3,4$;

$A_1=4$, $A_2=4$, $\omega_1=1$, $\omega_2=2$, $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$;

$A_1=4$, $A_2=4$, $\omega_1=1$, $\omega_2=3$, $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$;

$A_1=4$, $A_2=4$, $\omega_1=1$, $\omega_2=7$, $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$;

$A_1=4$, $A_2=4$, $\omega_1=1$, $\omega_2=2$, $\varphi_1=0$, $\varphi_2=1$.

3. Координаты тела, брошенного с начальной скоростью V_0 под углом α к горизонту, изменяются со временем t по закону:

$$x=(V_0\cos\alpha)t,\ y=(V_0\sin\alpha)t-\frac{gt^2}{2},\ g=9.8.$$

При заданных V_0 и α найти:

3.1. Наибольшую высоту, на которую поднимается тело.

3.2. Расстояние точки падения тела от точки старта, если

$V_0=6,\ \alpha=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{6}$;

$\alpha=\frac{\pi}{6};\ V_0=3,4,5,6,7,8,9\cdot$

3.3. Каким должен быть угол α, чтобы при заданном V_0 точка падения тела была удалена от точки старта на $D=4$, если $V_0=$ 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14?

3.4. Какой должна быть V_0, чтобы при заданном α точка падения была удалена от точки старта на $D=5$, если $\alpha=\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}$?

4. Мишень находится за укрытием, вершина которого находится в точке с координатами (x_1, y_1). Координаты мишени (x_2, y_2), ($x_2 > x_1$, $y_2 < y_1$). Орудие расположено в пункте с координатами (x_0, y_0), ($x_0 < x_1$, $y_0 < y_1$). Какой должна быть начальная скорость снаряда и соответствующий наклон к горизонту направления бросания, чтобы снаряд попал в точку (x_2, y_2), перелетев вершину укрытия на высоте $y_1 + h$?

   Для конкретных расчетов положить $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $x_1 = 5$, $y_1 = 4$, $x_2 = 6$, $y_2 = 0$, $h = 0.01$.

§12. Зависимости в полярных координатах

Обозначим полярный радиус некоторой точки M на плоскости через r, а соответствующий полярный угол через φ. Любой зависимости вида $r = \rho(\varphi)$ (явной) или вида $F(r, \varphi) = 0$ (неявной) в полярной системе координат соответствует определенный график (множество точек, полярные координаты которых удовлетворяют указанное равенство). При этом будем считать, что если угол φ принимает отрицательное значение, то от полярной оси по часовой стрелке откладывается соответствующий угол, равный заданному по абсолютной величине.

Если угол φ больше, чем 2π, это означает, что сначала нужно отложить против часовой стрелки целое число k углов величиной 2π (полных оборотов), которое вмещается в заданном φ, после чего от полярной оси против часовой стрелки отложить угол величиной $0 \le \varphi - 2\pi k < 2\pi$. Чтобы перейти от полярных координат к декартовым, нужно решить систему уравнений $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ относительно переменных r и φ и затем в выражении $r = \rho(\varphi)$ вместо r и φ подставить их выражения через x и y (или каким либо иным способом исключить переменные r и φ из равенств $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r = \rho(\varphi)$).

В программе GRAN1 предусмотрено лишь явное задание зависимости между полярными координатами r и φ в виде $r = \rho(\varphi)$.

Чтобы с помощью программы GRAN1 построить график зависимости $r = \rho(\varphi)$ между полярными координатами r и φ, нужно установить в окне “Список объектов” тип задания зависимости “Полярная: R=R(F)” (Рис. 12.1).

При обращении к услуге создания объекта появляется окно “Ввод выражения зависимости” (Рис. 12.2). В строке “R(F)=” нужно ввести выражение $\rho(\varphi)$. В строках “A=” и “B=” необходимо указать соответственно нижний и верхний пределы промежутка, на котором изменяется переменная φ (по умолчанию они равны 0 и 2π).

Ввод выражений и установление других параметров (цвет, количество точек построения и т.д.) осуществляется так же, как и раньше. В выражения зависимостей и пределов изменения аргумента φ могут входит некоторые из параметров $P1$, $P2$, …, $P9$.

Далее, используя услуги пункта “График” (и других пунктов), можно выполнять все предусмотренные в программе графические операции, касающиеся рассмотренной зависимости между переменными r и φ.

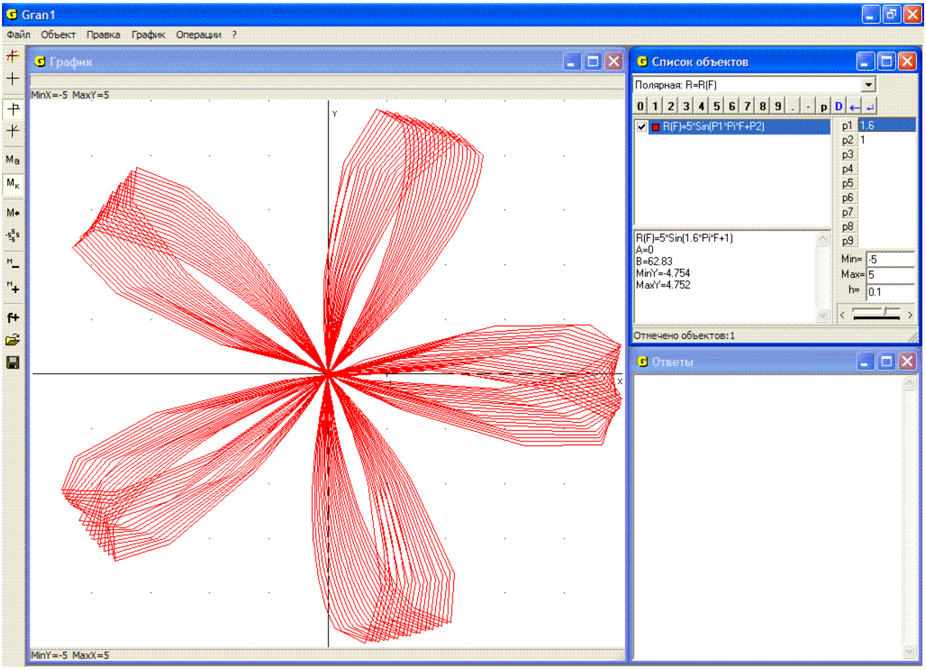


Рис. 12.1

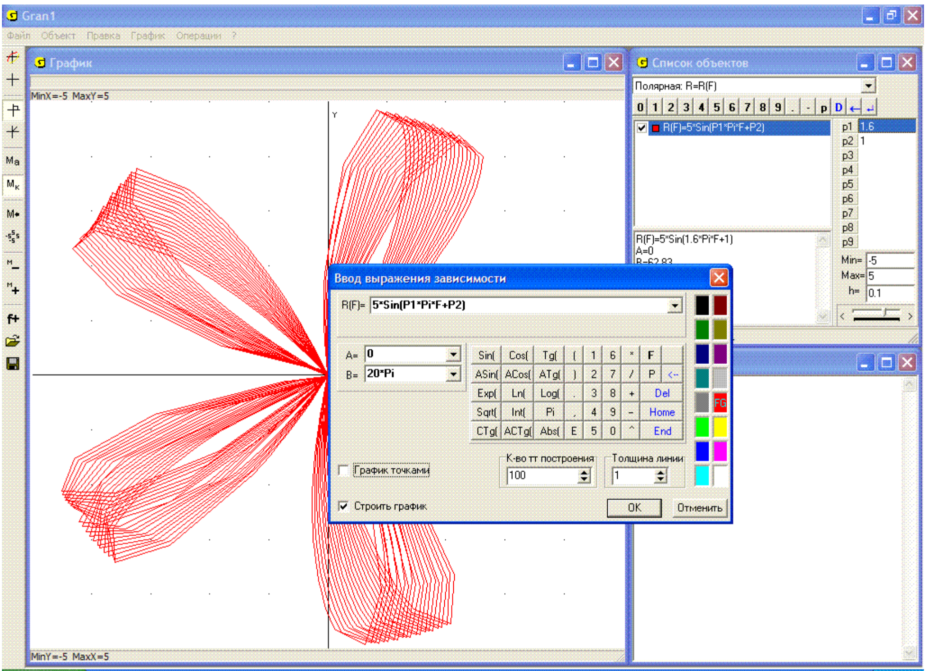


Рис. 12.2

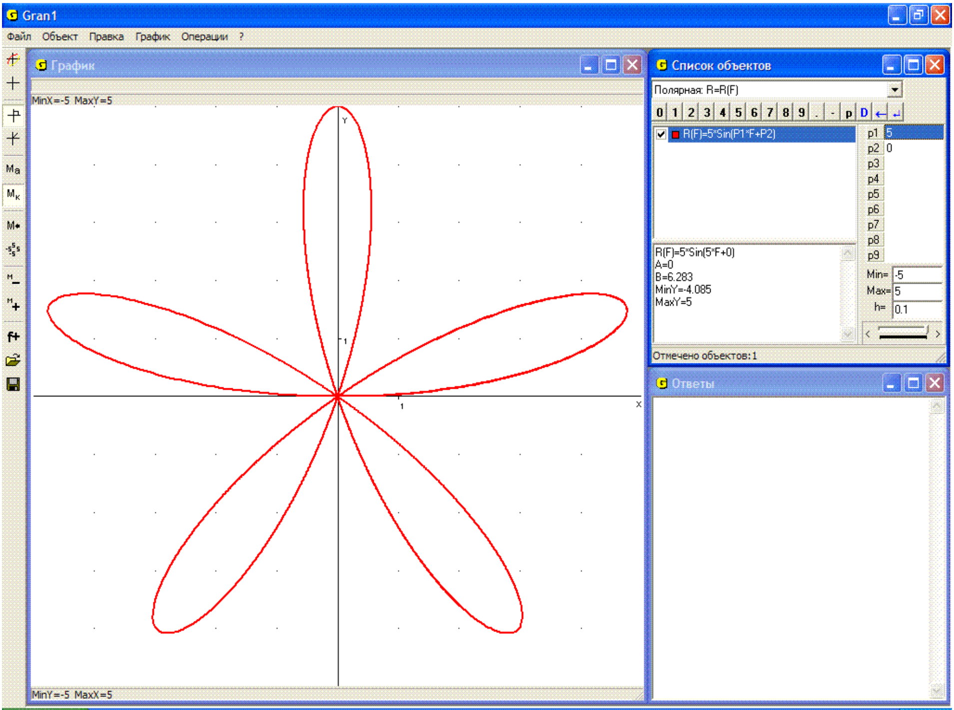


Рис. 12.3

Примеры

1. На Рис. 12.3 показан график зависимости $r = 4\sin 5\varphi$ (пятилепестковая роза).

2. Графиком зависимости $r = a$, ($a = const$, $a > 0$), будет окружность радиуса a (Рис. 12.4).

3. Графиком зависимости $\varphi = b$, ($b = const$), будет луч, выходящий из полюса и наклоненный к полярной оси под углом b (Рис. 12.5) (следует заметить, что в программе GRAN1 не предусмотрено построение графика функции $\varphi = \varphi(r)$).

4. Графиком зависимости $r = \dfrac{a}{\cos(\varphi)}$, ($a = const$, $a > 0$), будет прямая, перпендикулярная к полярной оси и удаленная от полюса вдоль полярной оси на a; $r = \dfrac{a}{\sin(\varphi)}$ – прямая, параллельная полярной оси (Рис. 12.6).

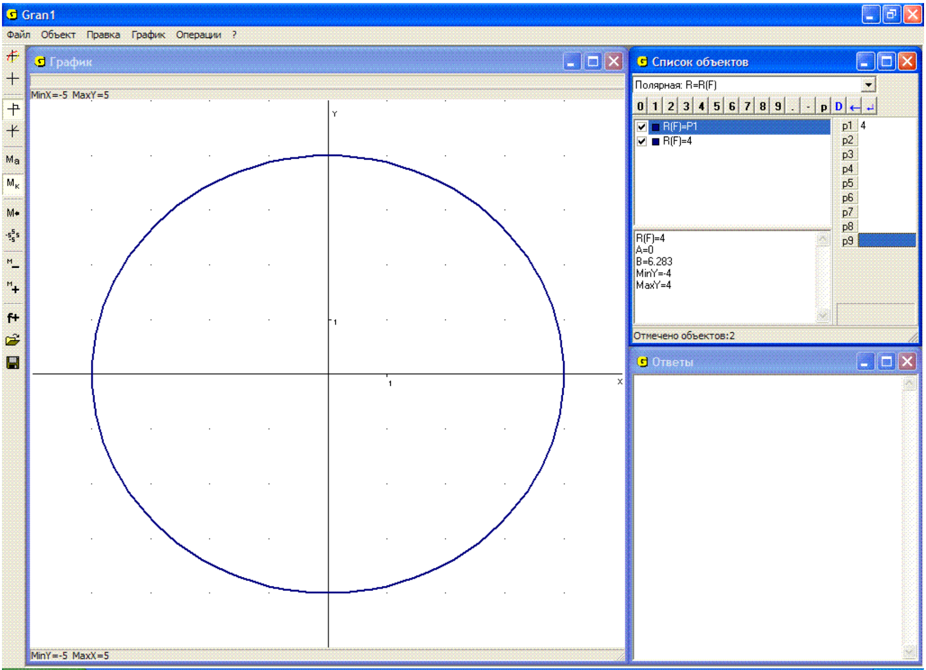


Рис. 12.4

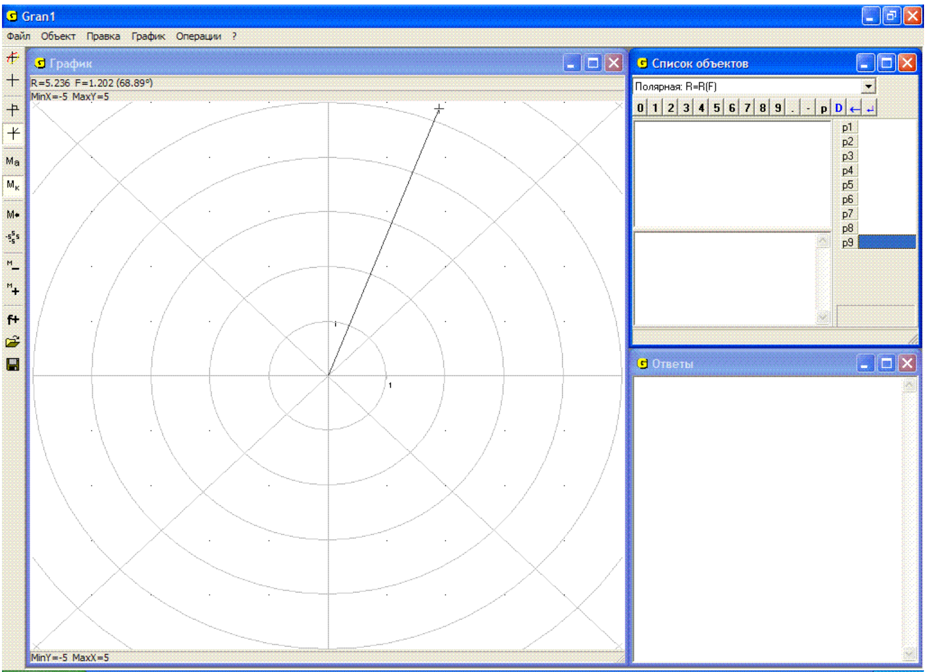


Рис. 12.5

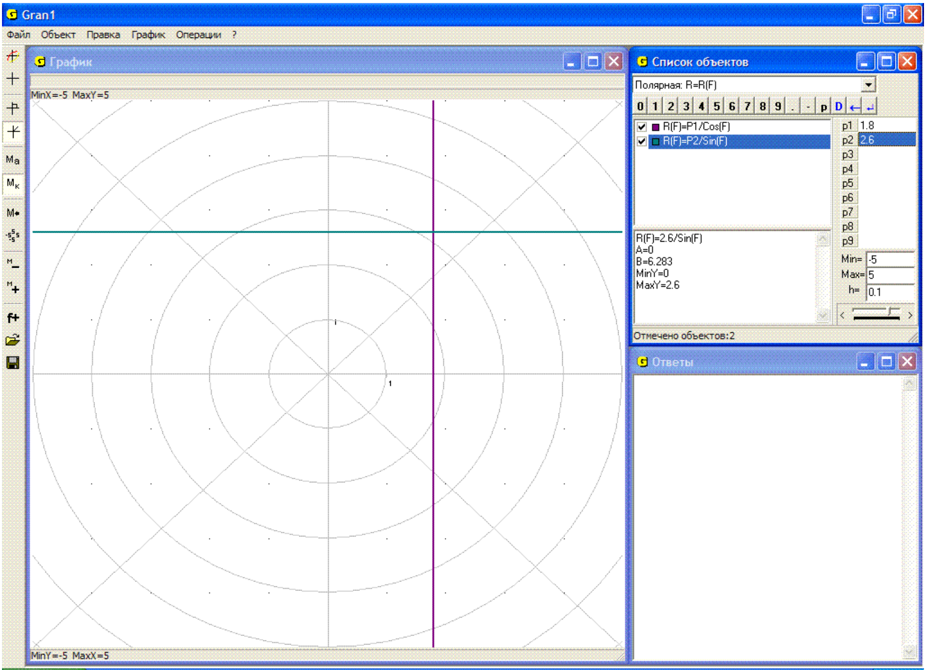


Рис. 12.6

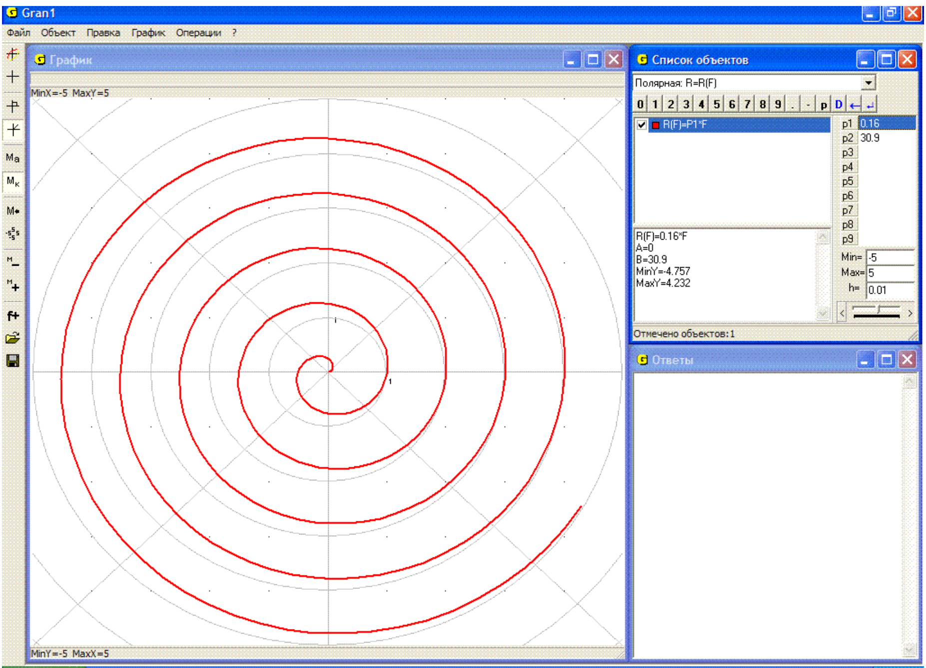


Рис. 12.7

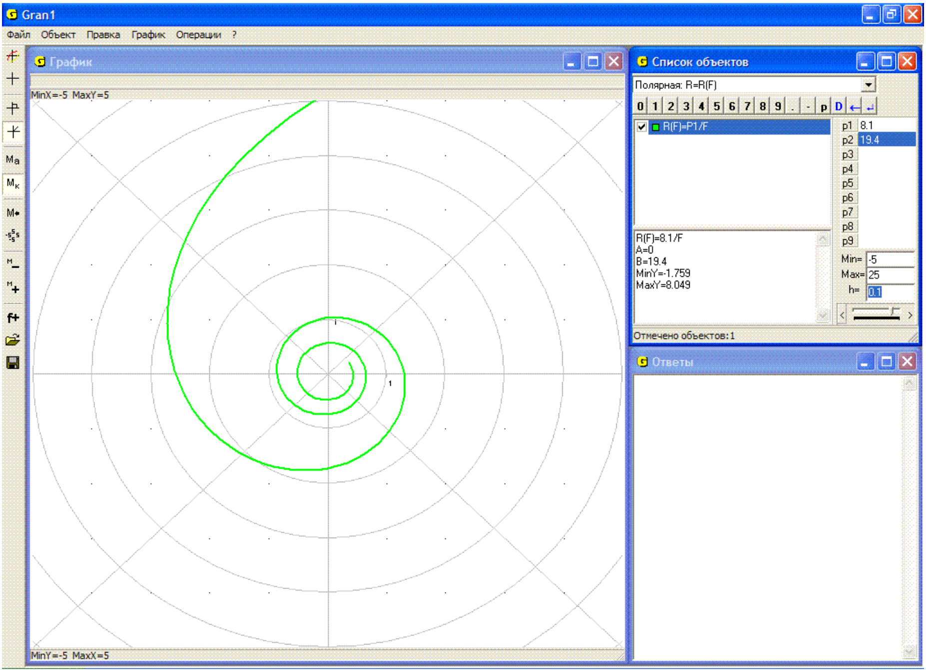


Рис. 12.8

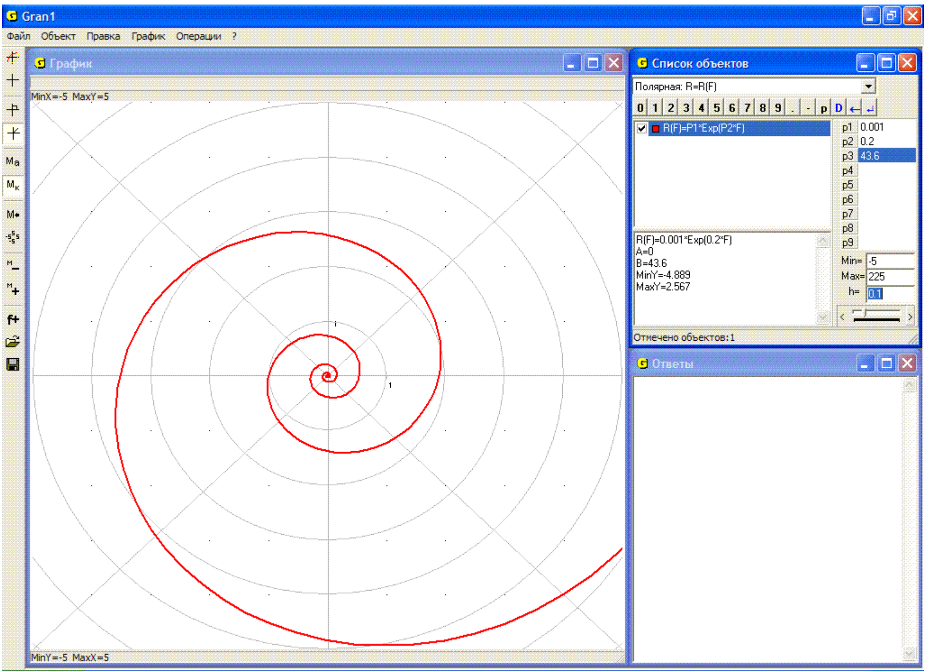


Рис. 12.9

Графиком зависимости $r = a\varphi$, ($a = const$, $a > 0$, $\varphi \ge 0$), будет спираль Архимеда (Рис. 12.7); зависимости $r = \dfrac{a}{\varphi}$, ($a = const$, $a > 0$, $\varphi \ge 0$ – гиперболическая спираль (Рис. 12.8); зависимости $r = be^{a\varphi}$, ($a > 0$, $b > 0$, $\varphi \ge 0$) – логарифмическая спираль (Рис. 12.9).

Вопросы для самоконтроля

1. Как от выражения, заданного в полярных координатах, перейти к выражению, заданному в декартовых координатах?
2. Как на координатной плоскости изображаются точки с отрицательными полярными углами?
3. Как на координатной плоскости изображаются точки, полярные углы которых больше, чем 2π ?
4. Как, используя программу GRAN1, построить график зависимости $r = \rho(\varphi)$, заданной в полярных координатах?
5. Можно ли воспользоваться услугами программы GRAN1 для построения графика зависимости между полярными координатами, заданной неявно?
6. Как изменится множество $[0, 2\pi]$ значений аргумента функции $r = \rho(\varphi)$, если вместо φ подставить $k\varphi$?

Упражнения для самостоятельного выполнения

С помощью программы GRAN1 построить графики зависимостей между полярными координатами r и φ (при разных значениях $P1$, $P2$, $P3$) в пределах изменения φ от $-P7$ до $P7$, изменяя $P7$ от 0 до 200:

1. $r = 2P1\cos\varphi + P2$, ($P1 > 0$, $P2 > 0$). Рассмотреть случаи:
   $P2 > 2P1$;
   $P2 < 2P1$;
   $P2 = 2P1$.
2. $r = \sqrt{2P1^2\cos 2\varphi}$ и $r = -\sqrt{2P1^2\cos 2\varphi}$.
3. $r = 5\sin 9\varphi$.
4. $r = \cos\varphi$, $r = \cos 2\varphi$, $r = \cos 3\varphi$, $r = \cos 5\varphi$.
5. $r = P1\cos(P2\cdot\varphi + P3)$.
6. $r = 6\sin(P1\cdot\pi\cdot\varphi + P2)$.
7. $r = 3\sin(P3\cdot 40\cdot\varphi + P4)$.

§13. Таблично заданные функции и их приближения полиномами

Часто по тем или иным причинам некоторую зависимость задают с помощью таблицы значений выражения вида $f(x)$ на конечном множестве точек в виде

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$f(x_i)$	y_1	y_2	$\dots$	y_n

.

Иногда аналитическое представление выражения $f(x)$ вообще неизвестно, а известны лишь его значения в некоторых отдельных точках, найденные в результате наблюдений или измерений в некотором эксперименте. Если в соответствии с заданной таблицей изобразить точки (x_i, y_i), $(i=1,2,\dots,n)$, на координатной плоскости, то таким способом можно получить приближенное графическое представление исследуемой зависимости. Если точек $x_1, x_2, \dots, x_n$ достаточно много, они расположены достаточно плотно, и есть уверенность, что значения выражения $f(x)$ с изменением аргумента x на промежутке $[x_1, x_n]$ изменяются достаточно плавно, то по указанному графическому представлению можно достаточно полно охарактеризовать общее поведение зависимости $y=f(x)$.

Однако иногда возникает необходимость найти хотя бы приближенно аналитическое представление таблично заданной зависимости. Иногда удается подобрать выражение $\varphi(x)$ такое, что значения $\varphi(x_i)$ достаточно близки к заданным в таблице значениям y_i при всех значениях x_i, $(i=1,2,\dots,n)$. Как правило без специальных исследований подобрать такое выражение $\varphi(x)$ непросто.

Часто выражение, значения которого в точках x_i, указанных в таблице, как можно меньше отличались бы от заданных в таблице значений y_i исследуемой зависимости $y=f(x)$, ищут в виде полинома $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_mx^m$ некоторой степени m. При этом неизвестные коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_m$ подбирают так, чтобы сумма $\sum\limits_{i=1}^{m}(P(x_i)-y_i)^2$ квадратов разностей значений полинома $P(x)$ и значений выражения $f(x)$ в точках, заданных в таблице, была наименьшей. Такой метод отыскания полинома $P(x)$ степени не выше наперед заданного m, который наименее в указанном смысле отклоняется от таблично заданной функции, называют *методом наименьших квадратов.*

При этом, как правило, заранее указывают степень полинома m, значительно меньше, чем количество n точек в таблице. Если $m \geq n-1$, то коэффициенты a_0, a_1, ..., a_m полинома $P(x)$ можно подобрать так, что для всех x_i, $(i=1,2,\dots,n)$, будут выполняться равенства $P(x_i)=y_i$, поскольку система уравнений

$$\begin{cases} a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\dots+a_{n-1}x_1^{n-1}=y_1, \\ a_0+a_1x_2+a_2x_2^2+\dots+a_{n-1}x_2^{n-1}=y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\dots+a_{n-1}x_n^{n-1}=y_n. \end{cases}$$

всегда имеет решение, причем единственное.

В программе GRAN1 предусмотрено отыскание по методу наименьших квадратов полинома $P(x)$ степени не выше 7, которым наилучше приближается таблично заданная функция не более чем в 10000 точках.

Прежде чем вводить таблицу, с помощью которой задается исследуемая зависимость, нужно установить в окне “Список объектов” тип “Табличная: Xi, Y(Xi)” (Рис. 13.1).

При табличном задании зависимости (как и при работе с ломаными и статистическими выборками) данные вводятся в виде таблицы с клавиатуры, с панели ввода данных, с экрана или из некоторого текстового файла.

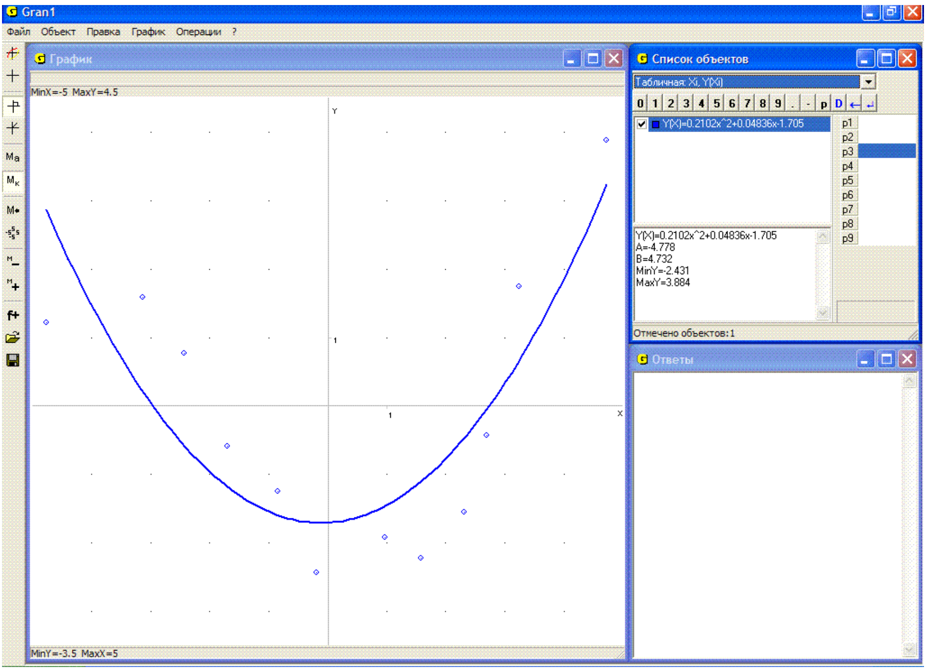


Рис. 13.1

После указывания типа задания зависимости “Табличная: Xi, Y(Xi)” и обращения к услуге “Объект / Создать” появляется вспомогательное окно “Данные для аппроксимирования полиномом” (Рис. 13.2).

Числа вводятся парами, первое из которых – значение аргумента x, второе – соответствующее значение выражения $f(x)$.

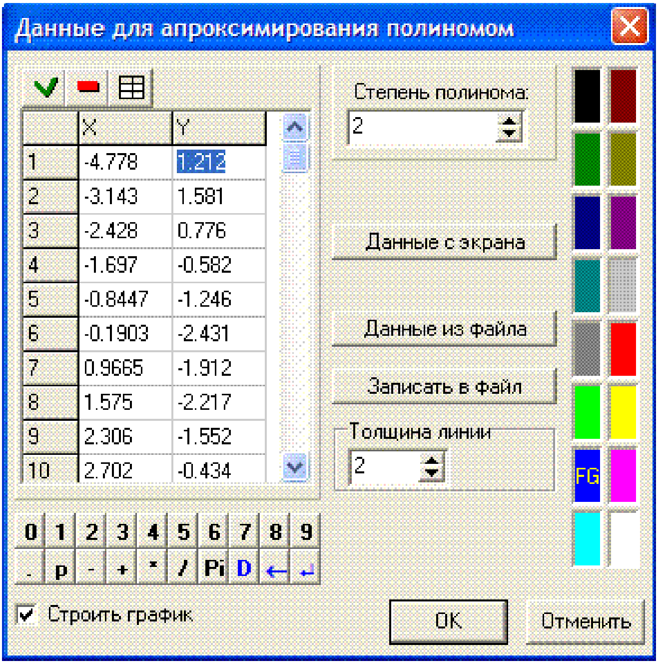


Рис. 13.2

Как и при работе с объектами типа “Ломаная”, вводить координаты точек в таблицу можно:

- используя клавиши клавиатуры для ввода значений;
- с помощью “мыши”, используя панель ввода данных, показанную в окне;
- указывая точки с помощью “мыши” на координатной плоскости, предварительно “нажав” кнопку “Данные с экрана”;
- прочитав данные из текстового файла на диске, предварительно “нажав” кнопку “Данные из файла” и указав затем соответствующий файл (если раньше такие данные были записаны в этот файл).

Введенные данные из таблицы можно сохранить в виде текстового файла на диске, “нажав” кнопку “Записать в файл”.

Во вспомогательном окне также нужно указать степень аппроксимирующего полинома от 0 до 7, цвет и толщину линии графика (Рис. 13.2).

В результате в окне “Список объектов” появляется аналитическое выражение вида $y = P(x)$, где $P(x)$ – полином заданной степени такой, что зависимостью $y = P(x)$ наилучше приближается таблично заданная зависимость в смысле среднего квадратичного (Рис. 13.1).

Если необходимо получить графическое изображение точек (x_i, y_i), занесенных в таблицу, и график полученной зависимости $y = P(x)$, нужно обратиться к услуге “График / Построить” или “нажать” соответствующую кнопку на панели инструментов.

При необходимости внести изменения в таблицу или просто пересмотреть ее нужно обратиться к услуге “Объект / Изменить…” или выбрать пункт “Изменить” контекстного меню (которое появляется, если установить курсор на соответствующую строку в окне “Список объектов” и нажать правую клавишу “мыши”). Внесение изменений в таблицу осуществляется так же, как и при работе с ломаными.

В случае необходимости можно изменить и степень полинома. Если график зависимости $y = P(x)$ был построен, то после изменения степени полинома в окне “Список объектов” появляется новое аналитическое выражение зависимости $y = P(x)$, а в окне “График” – соответствующий график.

Примеры

1. Найти уравнение прямой, которая проходит через точки (-3, -1) и (2, 3).

Указав тип задания зависимости “Табличная: Xi, Y(Xi)” и обратившись к услуге “Объект / Создать…”, введем таблицу

x_i	-3	2
y_i	-1	3

.

Указав степень полинома равным 1, получим $P(x) = 0.8x + 1.4$.

Обратившись к услуге “График / Построить”, получим графическое представление отрезка прямой, которая проходит через заданные точки (Рис. 13.3).

2. Найти уравнение параболы, которая проходит через точки (1, 2), (3, 1), (6, 5).

Установив тип задания зависимости “Табличная: Xi, Y(Xi)” и обратившись к услуге “Объект / Создать...”, введем таблицу

x_i	1	3	6
y_i	2	1	5

.

Указав степень полинома равным 2, получим

$P(x) \approx 0.3667\,x^2 - 1.967\,x + 3.6$.

Обратившись к услуге “График / Построить”, в окне “График” получим график искомой параболы (Рис. 13.4).

3. Орудие расположено в точке с координатами (0, 0), мишень в точке с координатами (7, 0). Определить угол наклона к горизонту

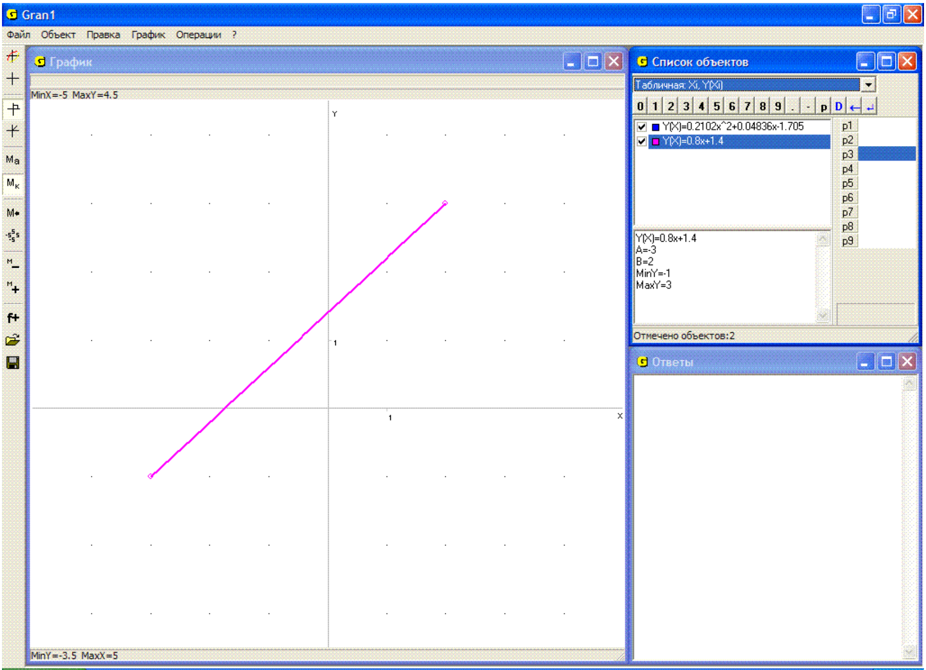


Рис. 13.3

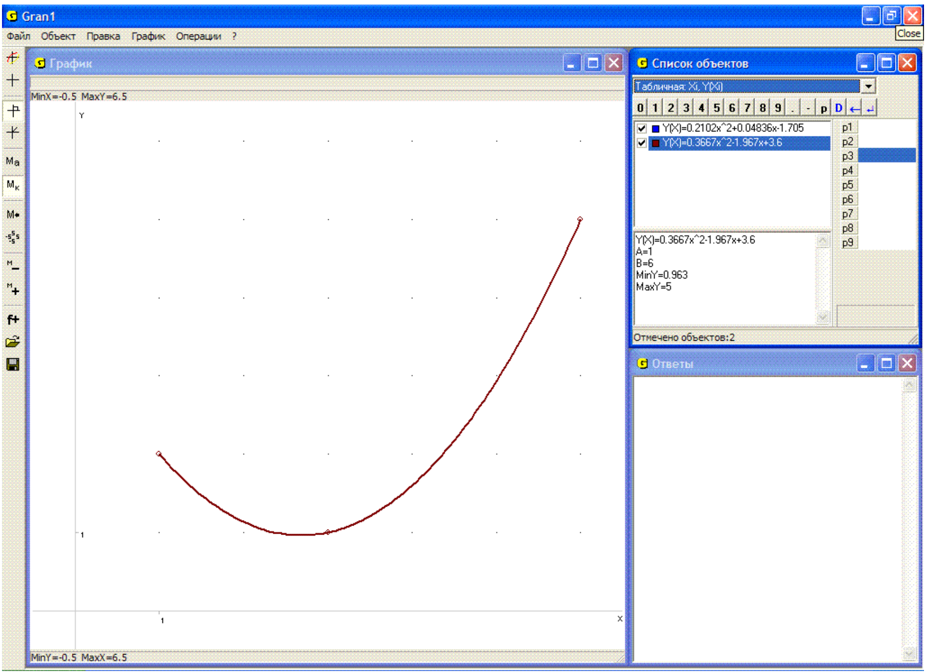


Рис. 13.4

направления бросания снаряда и его начальную скорость так, чтобы траектория снаряда прошла через точку (над вершиной укрытия) (5, 3.01) и при этом снаряд попал в мишень.

Установив тип задания зависимости “Табличная: Xi, Y(Xi)” и введя таблицу

x_i	0	5	7
y_i	0	3.01	0

,

построим полином 2-й степени (параболу) такой, что график зависимости $y = P(x)$ проходит через указанные точки. В результате получим $y(x) = -0.301x^2 + 2.107x$ (Рис. 13.5).

Чтобы приближенно определить угол наклона направления бросания снаряда к горизонту, можно воспользоваться услугой “График / Параметры окна “График”” и на закладке “График” указать тип координат “Полярные координаты”. В результате получим $\varphi \approx 1.13$ (64.8°) (Рис. 13.6).

Учитывая параметрическое задание зависимости между переменными x и y: $x = (V_0 \cos\varphi)t$, $y = (V_0 \sin\varphi)t - \dfrac{gt^2}{2}$, откуда

$$t = \frac{x}{V_0 \cos\varphi}, \quad y = xtg\varphi - \frac{9.8}{2}\left(\frac{x}{V_0 \cos\varphi}\right)^2, \quad V_0 = \frac{x\sqrt{4.9}}{\cos\varphi\sqrt{xtg\varphi - y}},$$

а также то, что траектория должна проходить через точку $(5,\ 3.01)$, получим $V_0 = \dfrac{5\sqrt{4.9}}{\cos(1.13)\sqrt{5tg(1.13) - 3.01}} \approx 9.4$.

4. Ввести из файла *Poly* таблицу, которая сохраняется там, построить соответствующий полином наилучшего приближения таблично заданной зависимости и графическое изображение точек таблицы и графика полученной зависимости $y = P(x)$.

Установив тип зависимости “Табличная: Xi, Y(Xi)”, обратимся к услуге “Объект / Создать...”. В окне “Данные для аппроксимирования полиномом” “нажмем” кнопку “Данные из файла” и в окне, которое появится, укажем в соответствующем каталоге файл *Poly* (Рис. 13.7). Данные из файла будут перенесены в таблицу.

Данные из этого файла можно ввести также с помощью услуги “Файл / Открыть” (Рис. 13.8), после обращения к которой открывается папка, в которой сохраняются файлы, созданные с помощью программы GRAN1 (типа gr1) (Рис. 13.9).

Дальше в строке “Степень полинома” введем число 5 и укажем цвет и толщину линии (Рис. 13.2). В результате в окне “Список объектов” появится искомый полином. После обращения к услуге “График / Построить” получим графическое представление введенной таблицы и зависимости $y = P(x)$ (Рис. 13.10).

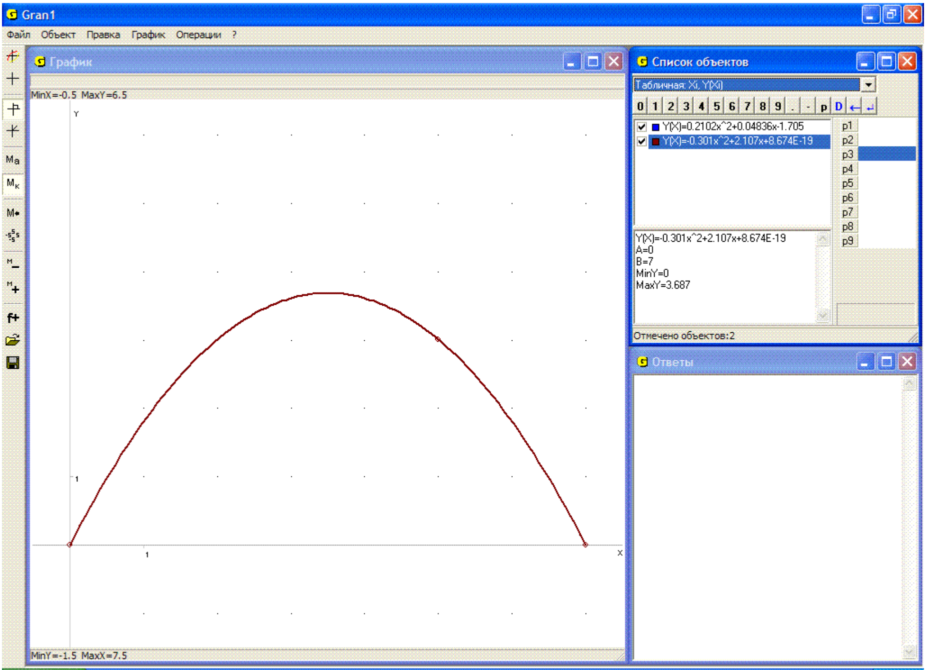


Рис. 13.5

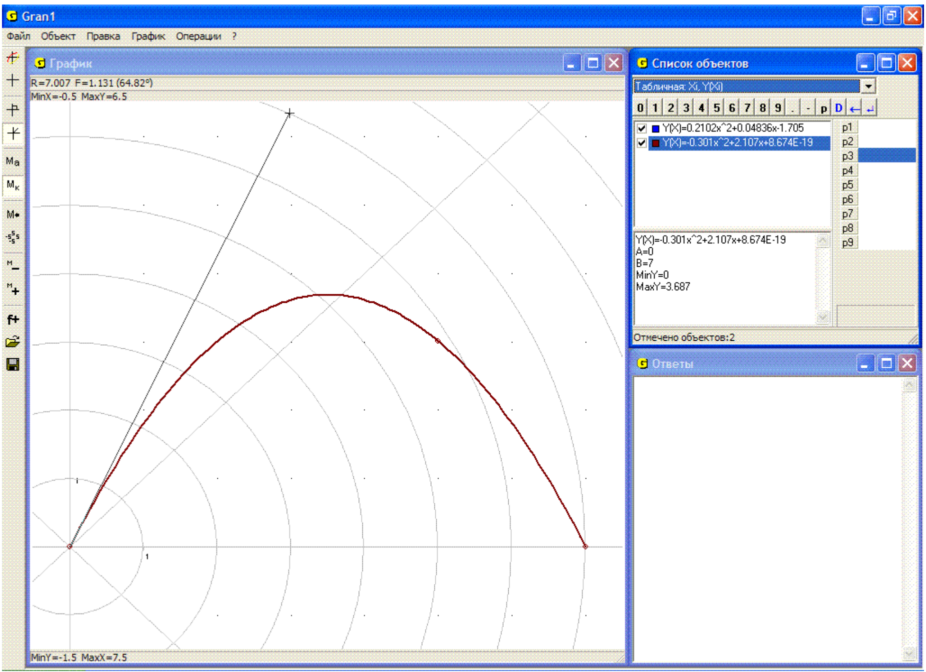


Рис. 13.6

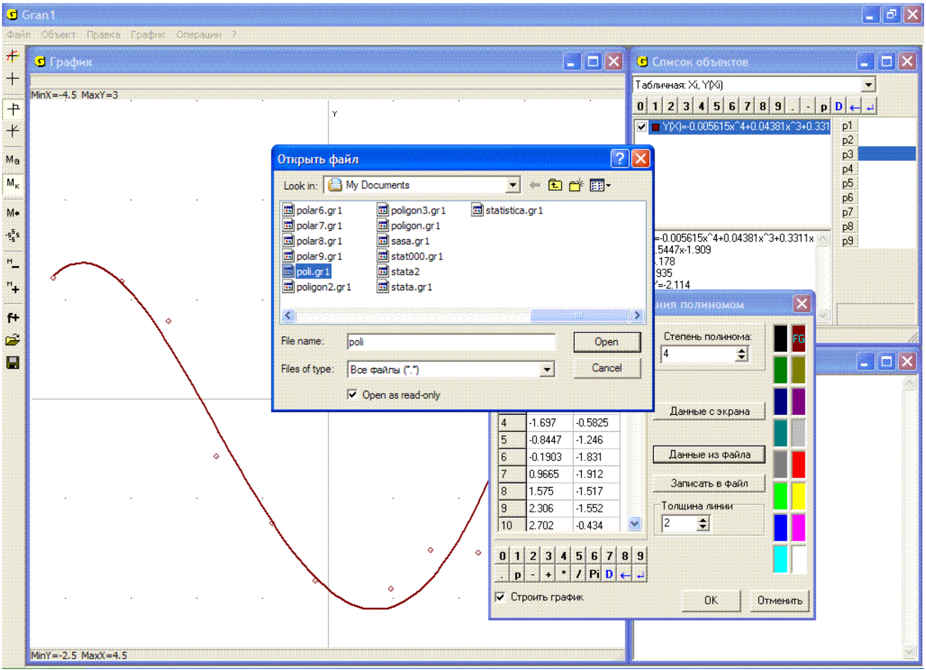


Рис. 13.7

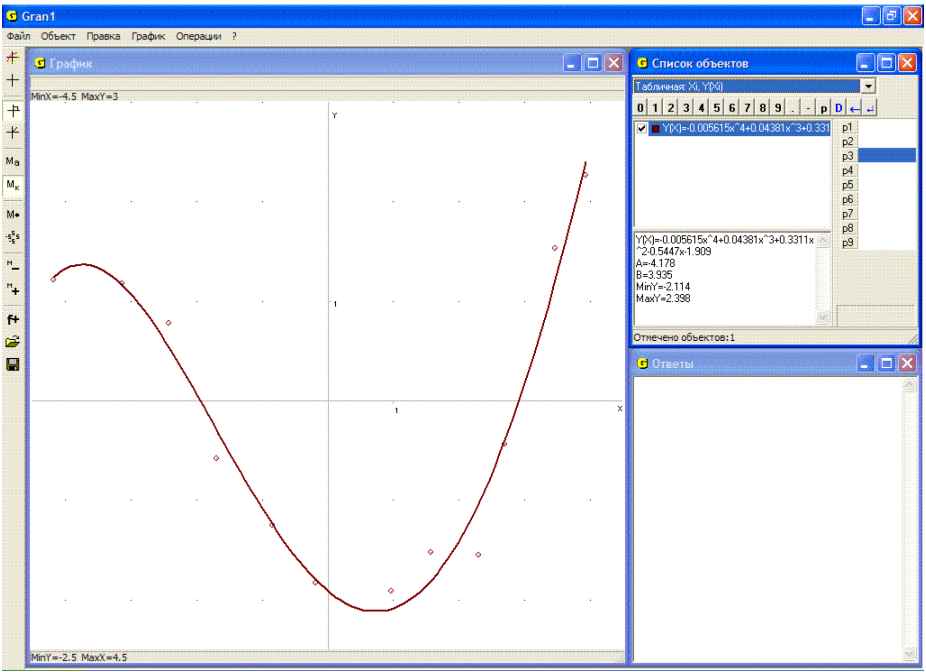


Рис. 13.8

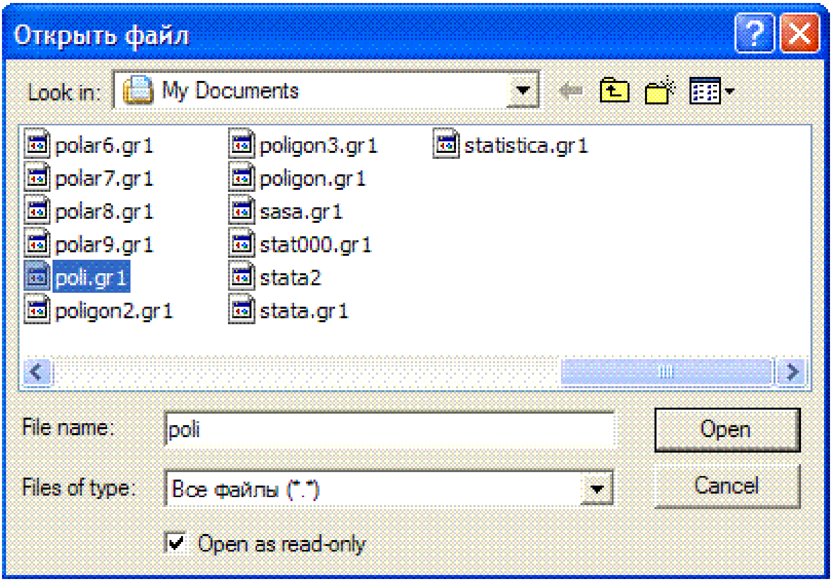


Рис. 13.9

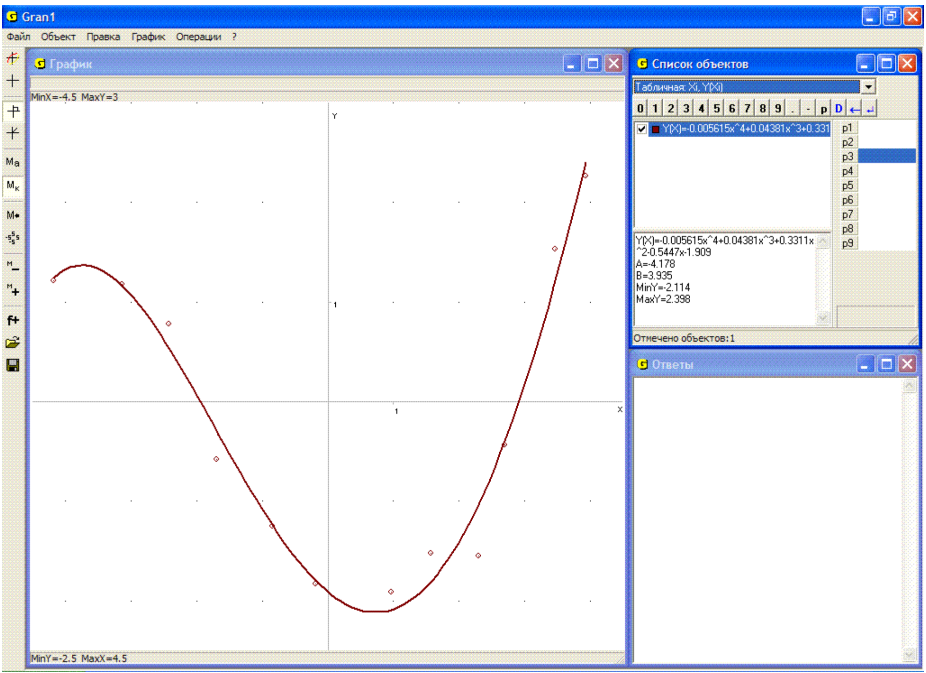


Рис. 13.10

На этом же рисунке можно видеть, что запись полученного полинома достаточно длинная, потому в окне “Список объектов” соответствующая запись выражения размещается не полностью. Чтобы увидеть все выражение, можно или расширить окно “Список объектов”, или сделать этот объект текущим, после чего полная запись выражения появится в нижней части окна “Список объектов”.

Вопросы для самоконтроля

1. Какой тип задания зависимости следует установить при вводе таблицы значений аргументов и соответствующих им значений зависимой величины?
2. Предусмотрена ли в программе GRAN1 возможность сначала ввести все значения аргументов, а затем соответствующие им значения зависимой величины?
3. Можно ли ввести таблицу с использованием панели ввода данных и манипулятора “мышь”?
4. Каким образом можно вносить данные в таблицу?
5. Как сохранить для последующих сеансов работы с программой GRAN1 введенную таблицу?
6. Как ввести таблицу из файла, в который она была записана ранее?
7. Можно ли с использованием услуг программы GRAN1 вывести на экран дисплея изображения точек, заданных в таблице, не выводя график соответствующего полинома?
8. Можно ли с использованием услуг программы GRAN1 вывести на экран дисплея график полинома, которым приближается таблично заданная зависимость, не выводя изображения точек, заданных в таблице?
9. Как можно внести изменения в ранее введенную таблицу?
10. Может ли степень приближающего полинома быть равной 1, если во введенной таблице есть 5 пар чисел ?
11. Обязательно ли разность $x_{i+1}-x_i$ должна оставаться постоянной при всех $i=1, 2, \dots, n-1$?
12. Обязательно ли аргументы x_i в таблице должны быть упорядочены по возрастанию?

Упражнения для самостоятельного выполнения

1. Найти уравнение вида $y=P(x)$ кривой, которая проходит через точки: (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 4) и построить кривую, где $P(x)$ – алгебраический полином.
2. Найти уравнение вида $y=P(x)$ кривой, которая проходит через точки (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4) и построить кривую, где $P(x)$ – алгебраический полином.
3. Найти полином (не выше 5-й степени), которым наилучше приближается зависимость, заданная таблично:

x_i	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$f(x_i)$	0	1	1	2	4	5	9	10	16	20	18

4. Пересмотреть таблицу, которая сохраняется в файле с указанным именем, если в файл с таким именем предварительно записаны 15 пар чисел, и определить, сколько среди этих пар таких, где значения зависимой величины отрицательны.
5. Построить (используя услугу “Операции / Калькулятор”) таблицу значений функции $f(x)=\cos x$ для значений аргумента $-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$. Затем ввести эту таблицу и найти соответствующий полином наилучшего приближения $P(x)$ второй степени. Построить графики зависимостей $y=P(x)$ и $y=\cos x$ и сравнить их. Вычислить значения $P(x)$ и $\cos x$ в точках $x=0.5$, $x=1$, $x=1.2$ и сравнить их.
6. Используя услугу “Операции / Калькулятор”, построить таблицу значений функции $y=\sin x$ для значений аргумента -0.10, -0.05, 0, 0.05, 0.10. Для полученной таблицы построить полином наилучшего приближения $P(x)$ 4-й степени. Построить графики зависимостей $y=\sin x$, $y=P(x)$ и сравнить их. Определить (с помощью услуги “Операции / Калькулятор” и по графику) значения $P(x)$ и $\sin x$ в точках 0.025, 0.075 и сравнить их.

a) Из точки (0,0) брошен снаряд под углом к горизонту с начальной скоростью V. Мишень находится за укрытием с вершиной в точке (x_1, y_1).
b) На каком расстоянии от подножия укрытия должна находиться мишень, чтобы при заданных V_0, x_1, y_1 в нее невозможно было попасть?
c) Какой должна быть высота y_1 укрытия, чтобы при заданных V_0, x_1 снаряд невозможно было перебросить через укрытие?
d) Какими должны быть V_0 и α, чтобы при заданных x_1, y_1 снаряд перелетал укрытие и падал не дальше, чем на расстоянии d от подножия укрытия?
e) На каком расстоянии от подножия укрытия должен стартовать снаряд, чтобы при заданном V_0 он перелетал укрытие (если это возможно) и падал не дальше, чем на расстоянии d от подножия укрытия?
f) Возможно ли при заданных V_0, x_1, y_1 попадание в мишень, если она находится за укрытием на расстоянии d от его подножия?

Для конкретных расчетов положить:

a) $V_0=10$, $x_1=3$, $y_1=2$; $V_0=10$, $x_1=5$, $y_1=4$;
$V_0=10$, $x_1=1$, $y_1=10$; $V_0=10$, $x_1=10$, $y_1=1$;

b) $V_0=10$, $x_1=1$; $V_0=10$, $x_1=2$;
$V_0=10$, $x_1=3$; $V_0=10$, $x_1=5$;
$V_0=10$, $x_1=6$; $V_0=10$, $x_1=7$;

c) $x_1 = 2$, $y_1 = 2$, $d = 1$; $x_1 = 2$, $y_1 = 4$, $d = 0.5$;
$x_1 = 2$, $y_1 = 5$, $d = 0.2$; $x_1 = 5$, $y_1 = 7$, $d = 1$;
$x_1 = 7$, $y_1 = 8$, $d = 0.1$; $x_1 = 10$, $y_1 = 15$, $d = 1.5$;

d) $V_0 = 10$, $d = 1$; $V_0 = 1$, $d = 2$;
$V_0 = 5$, $d = 0.5$; $V_0 = 20$, $d = 0.1$;
$V_0 = 8$, $d = 2$; $V_0 = 2$, $d = 0.1$;

e) $x_1 = 5$, $y_1 = 5$, $V_0 = 3$, $d = 1$; $x_1 = 5$, $y_1 = 10$, $V_0 = 5$, $d = 0.5$;
$x_1 = 1$, $y_1 = 8$, $V_0 = 6$, $d = 2$; $x_1 = 3$, $y_1 = 9$, $V_0 = 2$, $d = 1$.

§14. Графическое решение уравнений и систем уравнений

Пусть необходимо решить уравнение $f(x)=0$, то есть в области задания зависимости $y=f(x)$ найти все значения аргумента x такие, что соответствующие им значения $f(x)$ равны нулю.

При графическом представлении зависимости $y=f(x)$ найти решение уравнения $f(x)=0$ значит – найти все точки на графике зависимости $y=f(x)$, ординаты которых равны нулю. Другими словами, нужно найти точки, которые лежат одновременно на графике зависимости $y=f(x)$ и на оси абсцисс Ox, уравнение которой $y=0$, то есть точки, которые лежат как на линии (прямой или кривой), уравнение которой $y=f(x)$, так и на линии, уравнение которой $y=0$.

Построив график зависимости $y=f(x)$ (используя услугу “График / Построить”) и устанавливая курсор в соответствующие точки для получения их координат, легко определить абсциссы всех точек на графике зависимости $y=f(x)$, которые лежат также и на оси Ox.

Примеры

1. Найти решения уравнения $x^2-3=0$.

Построив график зависимости $y=x^2-3$ и установив курсор так, чтобы проекция на ось Ox (абсцисса курсора) совпала с точкой пересечения графика функции с осью Ox, получим $x_1 \approx -1.73$ $x_2 \approx 1.73$ (Рис. 14.1).

Если нужно уточнить значение корней, можно увеличить часть графика или изменить отрезок, на котором задана функция, и построить график исследуемой зависимости в достаточно малых окрестностях ранее определенных точек в значительно увеличенном масштабе.

2. Найти решения уравнения $|x-1|+|x+1|-2=0$.

Построив график зависимости $y=abs(x-1)+abs(x+1)-2$, можно убедиться, что любая точка на оси Ox из промежутка $[-1,1]$ лежит на графике данной зависимости (Рис. 14.2). Таким образом уравнение имеет бесконечное множество решений – любое значение $x\in[-1,1]$ является решением данного уравнения.

3. Найти решения уравнения $\sin x+2-\ln x=0$.

Построив график зависимости $y=\sin(x)+2-\ln(x)$ на промежутке $[-1,40]$ (Рис. 14.3), можно убедиться (учитывая свойства функций $\sin x$ и $\ln x$), что за пределами промежутка $[-1,40]$ нет корней рассматриваемого уравнения.

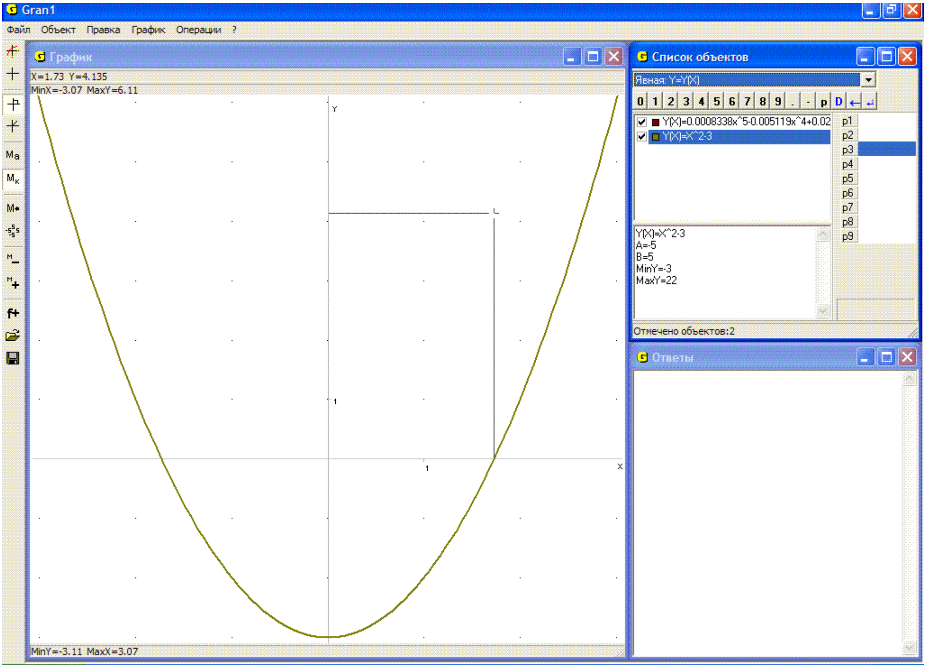


Рис. 14.1

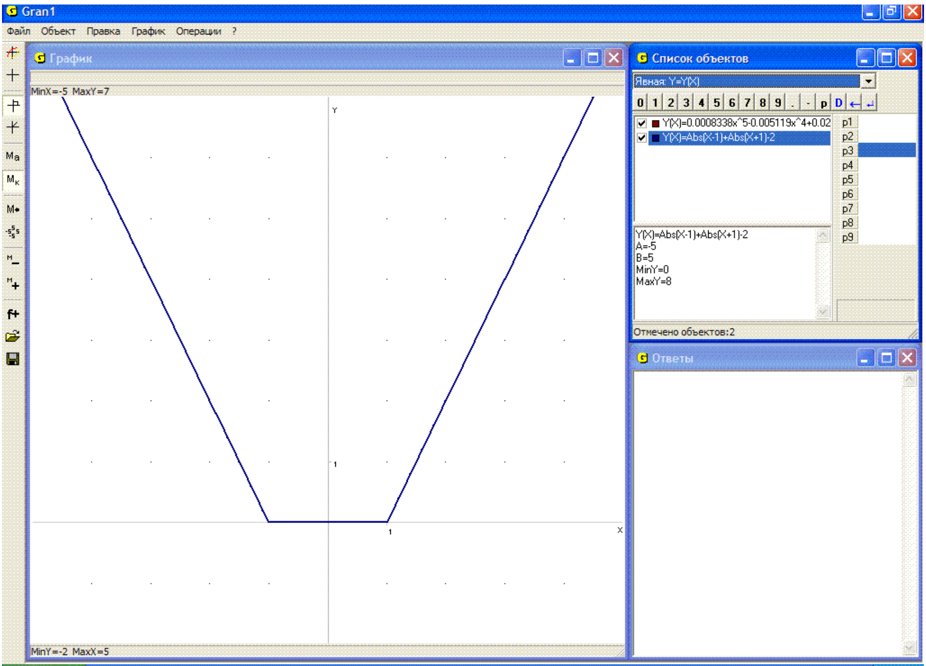


Рис. 14.2

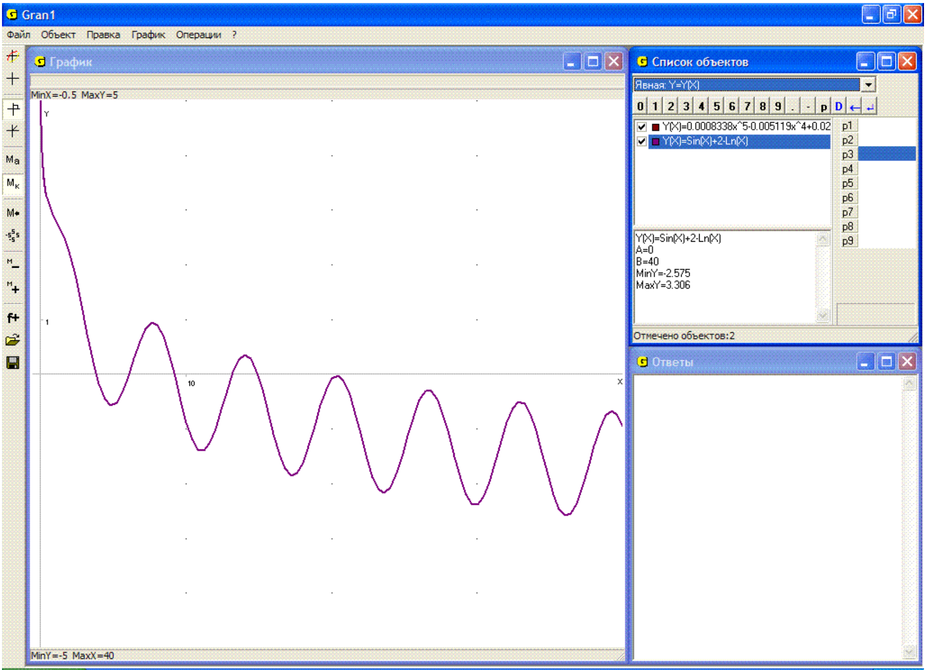


Рис. 14.3

При рассмотрении графика зависимости $y = \sin(x) + 2 - \ln(x)$, показанного на Рис. 14.3, может создаться впечатление, что у уравнения $\sin x + 2 - \ln x = 0$ есть 6 решений:

$$x_1 \approx 3.9;\ x_2 \approx 6.1;\ x_3 \approx 9.2;\ x_4 \approx 13.2;\ x_5 \approx 14.9;\ x_6 \approx 20.25.$$

Если большая точность вычислений не нужна, то с такими выводами можно согласиться.

Однако если нужна более высокая точность результатов, то увеличивая (при необходимости несколько раз) масштаб графических построений в достаточно малых окрестностях точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 (Рис. 14.4, Рис. 14.5), можно убедиться, что у данного уравнения есть 5 решений:

$$x_1 = 3.851;\ x_2 = 6.088;\ x_3 = 9.203;\ x_4 = 13.184;\ x_5 = 14.928.$$

Следует заметить, что точное аналитическое решение рассмотренного уравнения найти невозможно, а поиск приближенных его решений без использования графических построений требует достаточно трудоемких вычислений и тщательного анализа их результатов.

В вычислительной математике изучаются специальные методы для отыскания приближенных решений уравнений вида $f(x) = 0$ на заданном промежутке $[a, b]$ (метод деления отрезка пополам, метод хорд, метод касательных, метод итераций и др.).

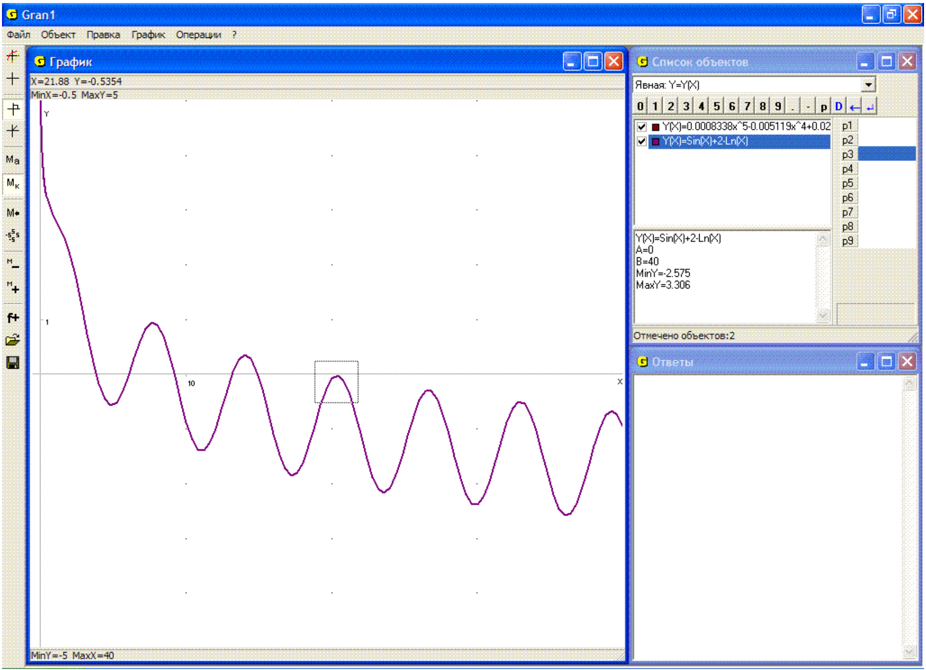


Рис. 14.4

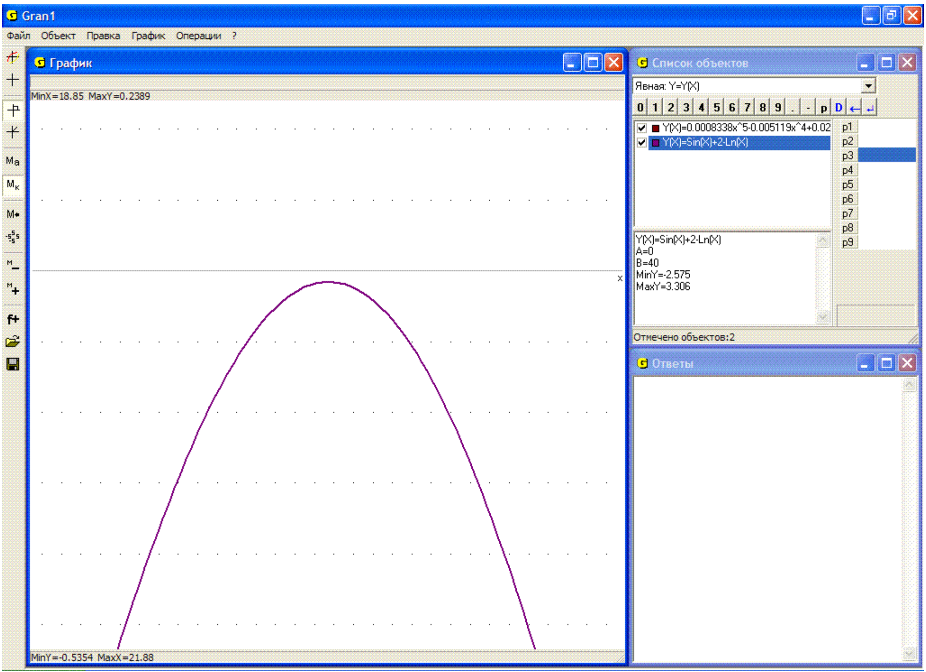


Рис. 14.5

Иногда уравнения $f(x)=0$ удобно представить в виде: $f_1(x)-f_2(x)=0$, где $f_1(x)-f_2(x)=f(x)$, либо некоторая задача сводится к отысканию решений уравнения вида $f_1(x)=f_2(x)$. В таком случае удобно построить графики зависимостей $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, после чего установить курсор в точках пересечения графиков и определить координаты точек, лежащих на обеих графиках. Абсциссы x так найденных точек и будут решениями уравнения $f_1(x)=f_2(x)$. При так найденных значениях x значения $f_1(x)$ и $f_2(x)$ будут равны между собой.

4. Найти решения уравнения: $\sqrt[3]{x}+\frac{1}{8}\sin(10x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+3.5).$

Построив графики зависимостей $y=\sqrt[3]{x}+\frac{1}{8}\sin(10x)$ и $y=\log_{0.5}(x+3.5)$, легко убедиться, что у данного уравнения есть единственное решение. Установив курсор в точку пересечения графиков функций, получим $x\approx-1.3$ (Рис. 14.6).

Пусть теперь нужно решить систему уравнений вида

$$\begin{cases} G_1(x,y)=0, \\ G_2(x,y)=0, \end{cases}$$

где $G_1(x,y)$ и $G_2(x,y)$ некоторые выражения от двух переменных x и y.

Установив тип задания зависимости $G(x,y)=0$ и построив графики зависимостей $G_1(x,y)=0$ и $G_2(x,y)=0$, после чего установив по очереди курсор в точках пересечения графиков, легко определить координаты точек, удовлетворяющие обоим уравнениям $G_1(x,y)=0$ и $G_2(x,y)=0$ одновременно, то есть координаты точек пересечения линий, описываемых уравнениями $G_1(x,y)=0$ и $G_2(x,y)=0$.

5. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ \lg(xy)=0.1. \end{cases}$

Представим указанные уравнения в виде соответственно $0=x^2+y^2-16$, $0=\lg(xy)-0.1$ и построим графики указанных зависимостей (Рис. 14.7).

Установив по очереди курсор в каждую из точек пересечения графиков, получим:

1) $x\approx-3.99$, $y\approx-0.31$;
2) $x\approx-0.31$, $y\approx3.99$;
3) $x\approx0.31$, $y\approx3.99$;
4) $x\approx3.99$, $y\approx0.31$.

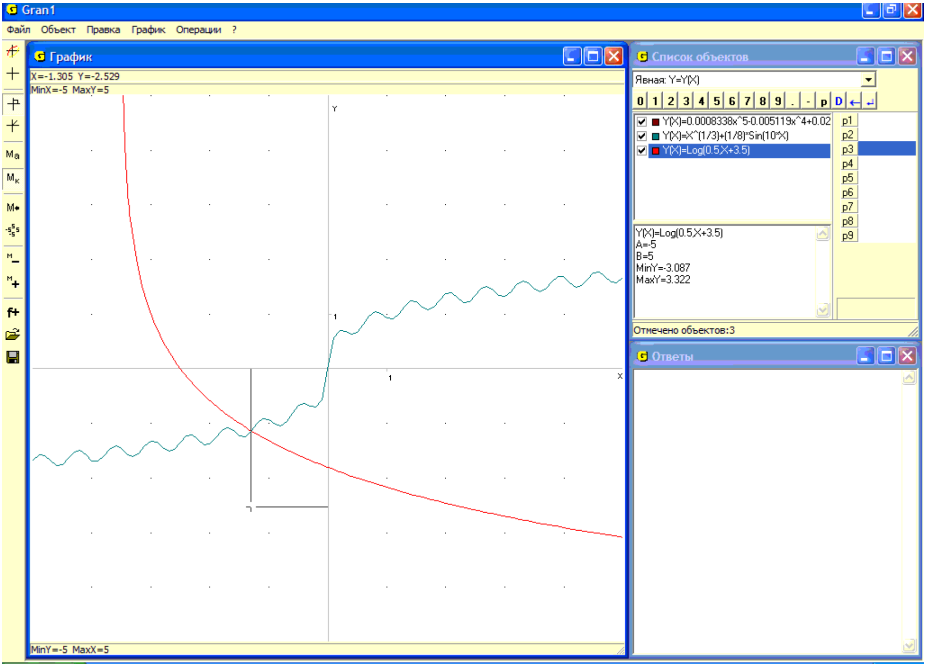


Рис. 14.6

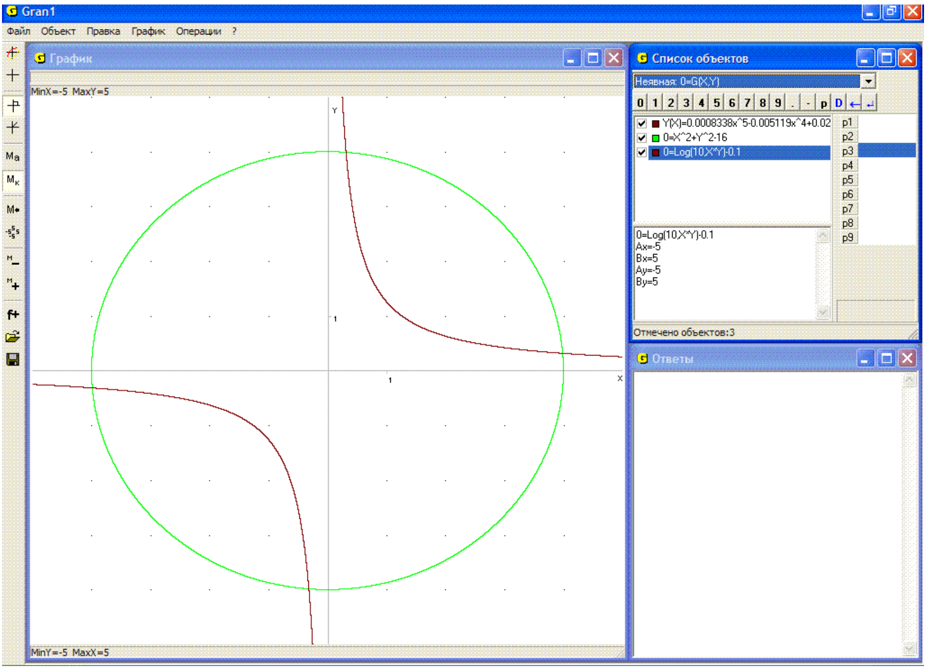


Рис. 14.7

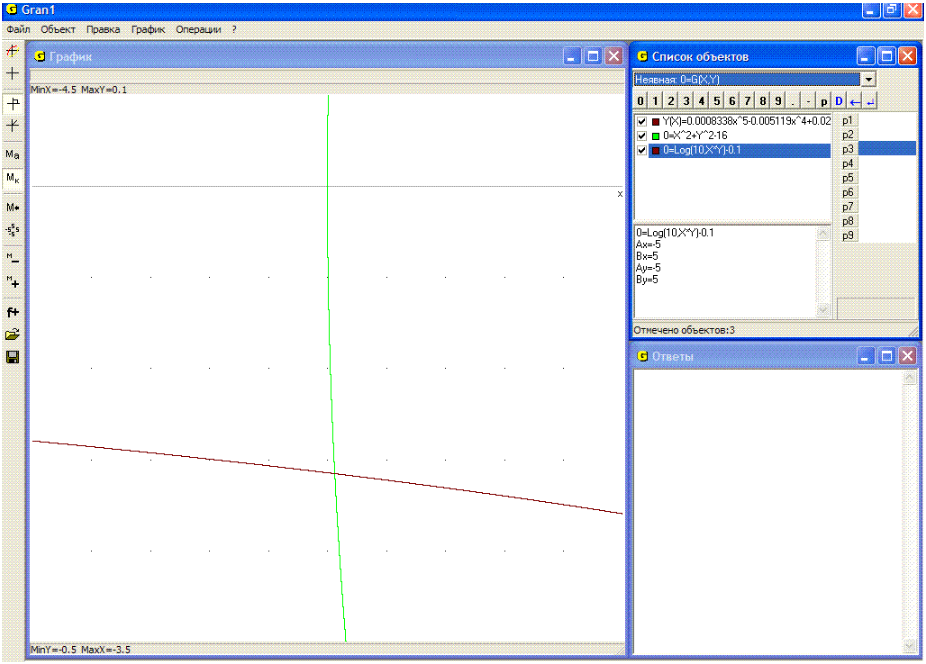


Рис. 14.8

Для более точного определения координат точек пересечения графиков нужно увеличить масштаб построений, то есть использовать услугу “Увеличить” или изменить пределы, в которых изменяются переменные x и y. Например, если изменить масштаб, указав пределы $MinX = -4.5$, $MaxX = -3.5$, $MinY = -0.5$, $MaxY = 0.1$, и построить соответствующие графики, получим изображение, показанное на Рис. 14.8. Используя координатный курсор, на этот раз получим $x \approx -3.988$, $y \approx -0.316$, причем при перемещении курсора уточняется (изменяется) третья после запятой цифра.

Если положить $MinX = -4.0$, $MaxX = -3.98$, $MinY = -0.32$, $MaxY = -0.3$ (используя услугу “График / Масштаб / Масштаб пользователя”), тогда получим $x \approx -3.9875$, $y \approx -0.3157$, причем при перемещении курсора уточняется (изменяется) четвертая после запятой цифра.

Следует заметить, что задачу отыскания решений уравнения $f(x) = 0$ также можно рассматривать как задачу об отыскании решений системы уравнений

$$\begin{cases} 0 = y - f(x), \\ 0 = y, \end{cases}$$

а задачу отыскания решений уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ – как задачу отыскания решений системы уравнений

$$\begin{cases} 0 = y - f_1(x), \\ 0 = y - f_2(x). \end{cases}$$

Достаточно часто отыскание решений системы уравнений вида

$$\{ G_1(x, y) = 0 \,,\ G_2(x, y) = 0 \}$$

с помощью графических построений является чуть ли не единственным пригодным для практических приложений методом, поскольку метод исключения переменных или другие методы не всегда приводят к желаемым результатам или же слишком сложные.

6. Решить систему уравнений (Рис. 14.9):

$$\begin{cases} 0 = \sin(xy) + \cos(x - y), \\ 0 = x/y - \lg(x + y). \end{cases}$$

Исключить одну из переменных x или y в данном случае не удается и трудно предложить какой-либо практически пригодный подход к решению задачи, кроме графического.

Очевидно, графические построения могут быть использованы для определения точек пересечения линий независимо от типа задания соответствующих им зависимостей. Если, например, нужно определить координаты точек окружности $x^2 + y^2 = 9$, которые лежат или на параболе $y = \dfrac{x^2}{7} - 2$ или на пятилепестковой розе $\rho = 5\sin(5\varphi)$ (Рис. 14.10), то построив графики указанных зависимостей и используя координатный курсор, получим координаты искомых точек (с точностью до сотых):

1) $x = -2.89$, $y = -0.81$; $\qquad x = -2.89$, $y = 0.39$;
2) $x = 2.89$, $y = -0.81$; $\qquad x = 2.89$, $y = 0.39$;
3) $x = -2.18$, $y = -2.06$; $\qquad x = 2.18$, $y = -2.06$;
4) $x = -2.63$, $y = 1.44$; $\qquad x = 2.63$, $y = 1.44$;
5) $x = -1.29$, $y = -2.71$; $\qquad x = 1.29$, $y = -2.71$;
6) $x = -0.55$, $y = 2.95$; $\qquad x = 0.55$, $y = 2.95$.

7. Из точки (1,0) в момент t_1 с начальной скоростью $V_1 = 5.5$ под углом 0.6 (радиан) к горизонту бросается некоторое тело, а из точки (2, 0) в момент t_2 с начальной скоростью $V_2 = 4.5$ под углом 1.2 (радиан) к горизонту бросается другое тело.

а) Возможно ли столкновение этих тел? Каким должно быть t_2, чтобы столкновение не произошло?

Координаты первого тела со временем t изменяются по закону

$$x_1(t) = x_1 + V_1 \cos(\alpha_1)(t - t_1) ,$$

$$y_1(t) = y_1 + V_1 \sin(\alpha_1)(t - t_1) - \frac{g}{2}(t - t_1)^2 ,$$

где (x_1, y_1) точка старта, t_1 – момент старта, g – ускорение свободного падения, а координаты второго тела – по закону

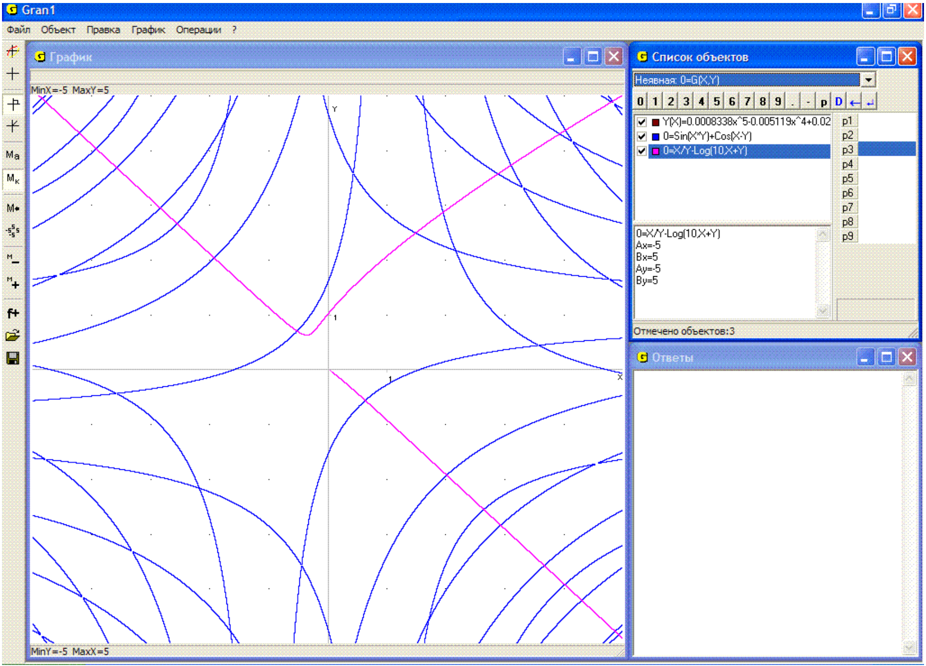


Рис. 14.9

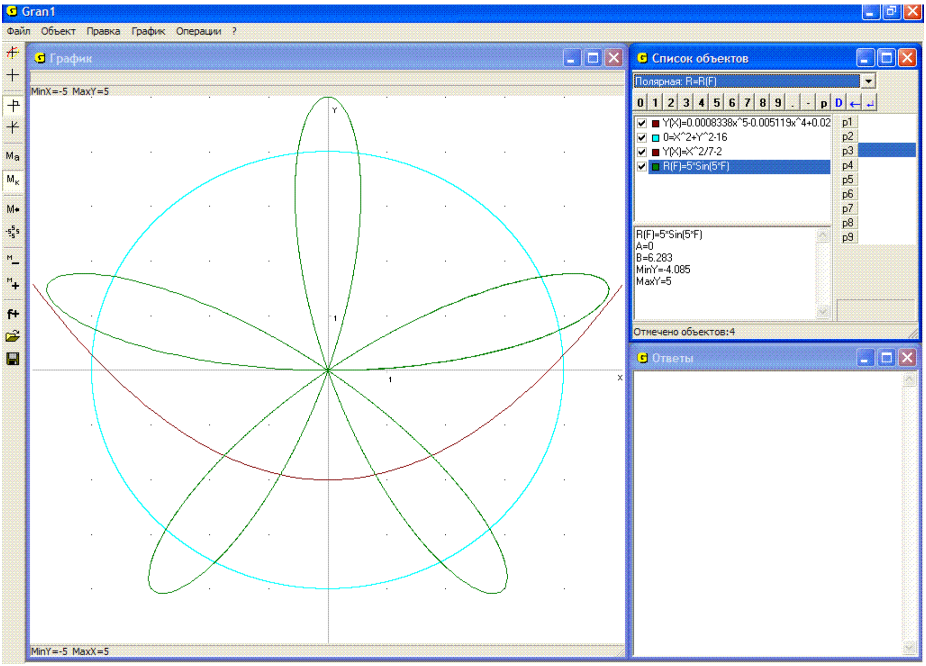


Рис. 14.10

$$x_2(t) = x_2 + V_2 \cos(\alpha_2)(t - t_2),$$

$$y_2(t) = y_2 + V_2 \sin(\alpha_2)(t - t_2) - \frac{g}{2}(t - t_2)^2.$$

Выбрав t_1 и t_2 произвольно, например $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, и учитывая конкретные данные рассматриваемого примера, построим траекторию полета первого тела

$$x_1(t) = 1 + 5.5\cos(0.6)(t - 1),$$

$$y_1(t) = 0 + 5.5\sin(0.6)(t - 1) - 4.9(t - 1)^2,$$

и второго тела

$$x_2(t) = 2 + 4.5\cos(1.2)(t - 2),$$

$$y_2(t) = 0 + 4.5\sin(1.2)(t - 2) - 4.9(t - 2)^2.$$

Поскольку траектории пересекаются в точках $x^* \approx 2.22$, $y^* \approx 0.48$ и $x^{**} \approx 3.25$, $y^{**} \approx 0.34$, то если момент t_2 выбирать произвольно, столкновение тел возможно (Рис. 14.11).

Момент бросания второго тела, при котором столкновение тел не произойдет, можно определить разными способами. Например, определить время полета первого тела от точки старта до точки (x^*, y^*) пересечения траекторий и таким образом установить момент времени, в который первое тело будет находиться в точке (x^*, y^*). Затем определить время, необходимое для достижения вторым телом точки (x^*, y^*). После этого легко определить момент старта второго тела так, чтобы оба тела не оказались в точке (x^*, y^*) одновременно. Время, необходимое для достижения первым телом точки (x^*, y^*), можно определить графически, подбирая отрезок задания $[1, \mathrm{t}_1]$ первой зависимости так, чтобы траектория полета тела заканчивалась в точке (x^*, y^*). Изменяя t_1 соответствующим образом, можно установить момент достижения первым телом точки (x^*, y^*). То же касается и траектории второго тела.

На Рис. 14.12 видно, что первое тело достигает точки пересечения траекторий (x^*, y^*) в момент $t_1 \approx 1.27$, то есть первое тело от точки старта до точки (x^*, y^*) долетает за время 0.27 (верхний предел изменения параметра t определен с помощью параметра $P8$).

Второе тело достигает точки (x^*, y^*) в момент $t_2 \approx 2.137$ (Рис. 14.13), если стартует в момент $t_2 = 2$, то есть второе тело достигает точки (x^*, y^*) через время 0.137 от момента старта (верхний предел изменения параметра t в выражениях, описывающих траекторию второго тела, определен с помощью параметра $P9$).

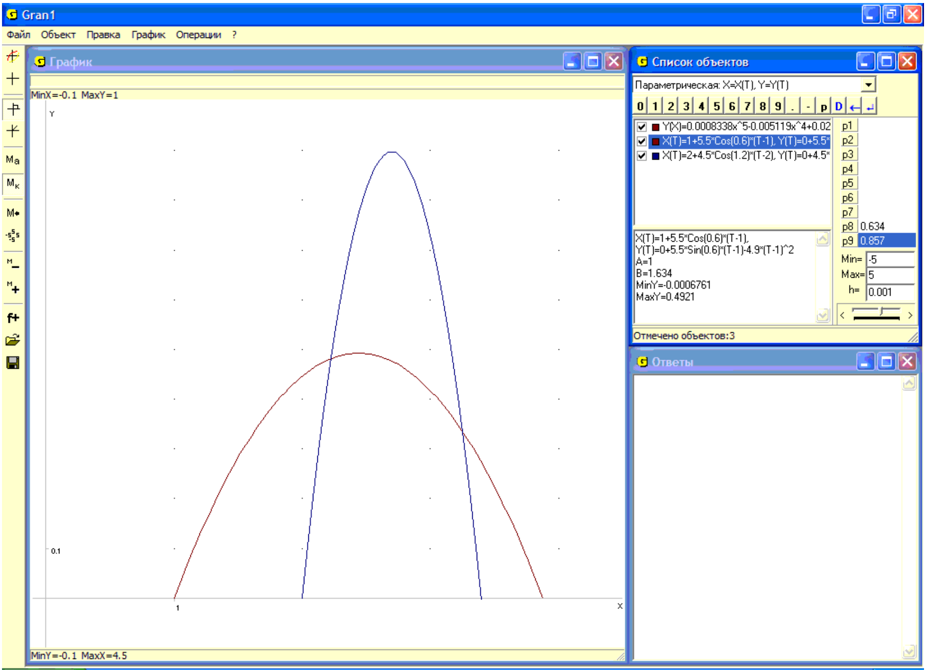


Рис. 14.11

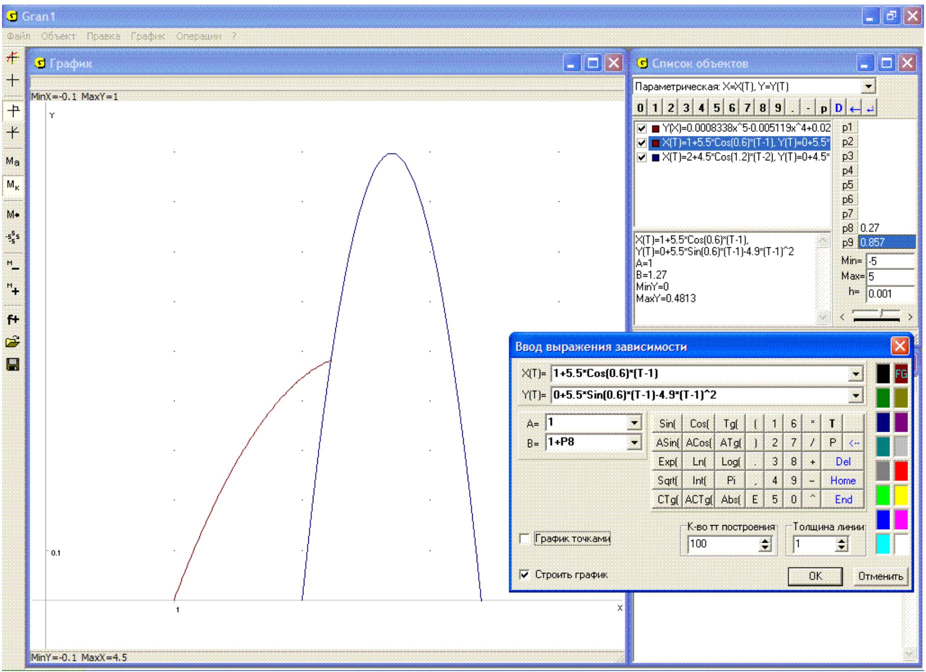


Рис. 14.12

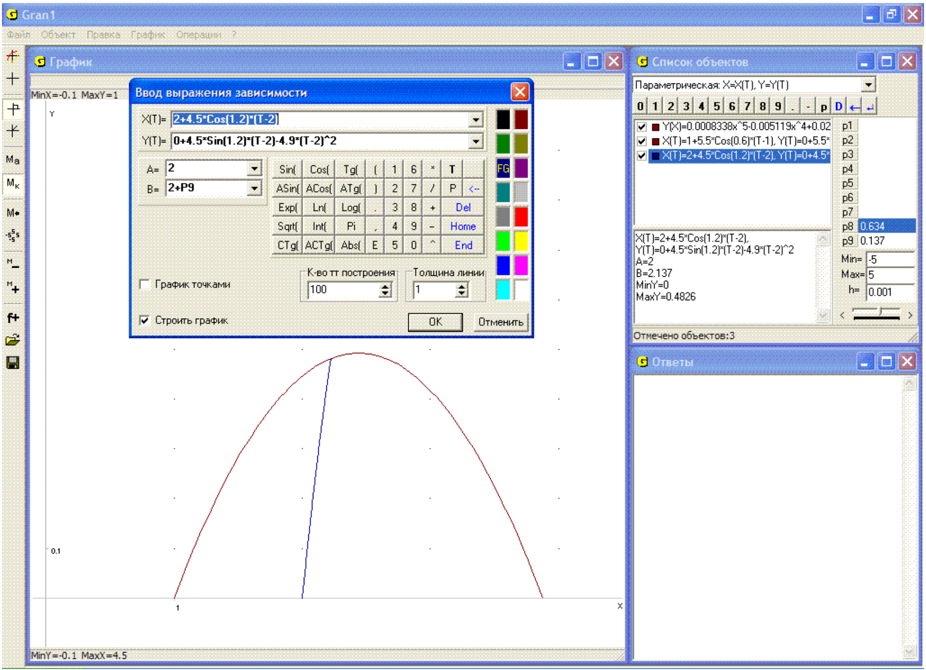


Рис. 14.13

Поскольку первое тело будет находиться в точке (x^*, y^*) в момент $t_1 \approx 1.27$, то чтобы не произошло столкновение, второе тело не должно стартовать в момент $t_2 \approx 1.133$.

Аналогично можно определить, что для того, чтобы тела не столкнулись в точке $(x^{**}, y^{**}) \approx (3.25,\ 0.34)$, необходимо, чтобы момент старта второго тела отличался от 0.729.

Другой способ – приравнять координаты $x_1(t)$ и $x_2(t)$, $y_1(t)$ и $y_2(t)$ и определить величины $(t-t_1)$ и $(t-t_2)$ из равенств

$$0 = (x_2 - x_1) + V_2 \cos\alpha_2 (t - t_2) - V_1 \cos\alpha_1 (t - t_1),$$

$$0 = (y_2 - y_1) + V_2 \sin\alpha_2 (t - t_2) - \frac{g}{2}(t - t_2)^2 - V_1 \sin\alpha_1 (t - t_1) + \frac{g}{2}(t - t_1)^2.$$

Обозначив $(t-t_1)$ через x и $(t-t_2)$ через y, построим графики так полученных неявно заданных зависимостей между переменными x и y (то есть между величинами $(t-t_1)$ и $(t-t_2)$), и найдем точки их пересечения (Рис. 14.14), решив таким образом указанную систему двух уравнений с двумя неизвестными $(t-t_1)$ и $(t-t_2)$. Как видно из Рис. 14.14, первое тело достигает точки $(x^*,\ y^*)$ за время 0.27, а второе за время 0.137. Так можно определить время, необходимое для достижения каждым из тел точки $(x^*,\ y^*)$, а следовательно и момент старта t_2 второго тела таким, чтобы столкновение не произошло.

Что касается точки (x^{**}, y^{**}), то аналогично предыдущему можно определить, что первое тело достигает этой точки за время 0.495, а второе за время 0.766.

Таким образом, чтобы не произошло столкновение в точке (x^{**}, y^{**}), второе тело не должно стартовать в момент $t = 0.729$.

б) Если $x_1 = 1$, $y_1 = 0$, $t_1 = 1$, $V_1 = 5.5$, $\alpha_1 = 0.6$, $x_2 = 2$, $y_2 = 0$, $t_2 = 1.5$, $V_2 = 4.5$, $\alpha_2 = 0.9$, то каким будет наименьшее расстояние между телами во время полета и в какой момент времени?

Поскольку квадрат расстояния между телами в момент времени t равен $D^2(t) = (x_2(t) - x_1(t))^2 + (y_2(t) - y_1(t))^2$, то переобозначив переменную t через x, построим график функции $D^2(x)$, и затем (после соответствующего увеличения), изменяя масштаб построения, найдем: наименьшее расстояние между телами будет $(1.71)^{0.5} \approx 1.31$ в момент $t \approx 1.485$ (Рис. 14.15).

в) Какими должны быть V_2 и α_2, чтобы, стартуя в момент пересечения первым телом прямой $y = tg\dfrac{3\pi}{4}(x-2)$, второе тело одновременно с первым достигло точки, в которой первое тело выходит за пределы окружности радиуса 0.2 с центром в точке пересечения траекторией первого тела указанной прямой? (Рис. 14.16).

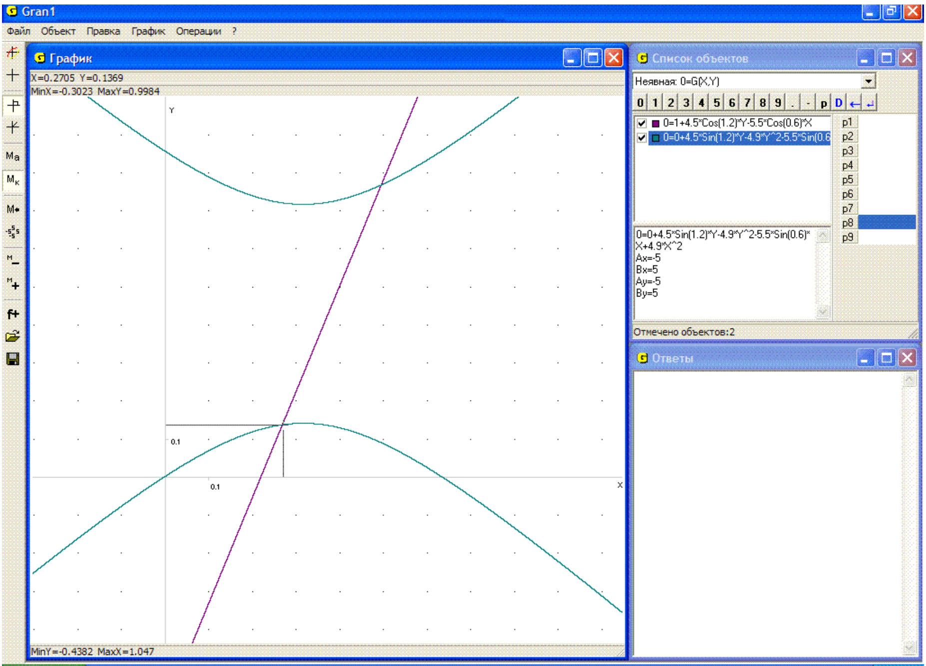


Рис. 14.14

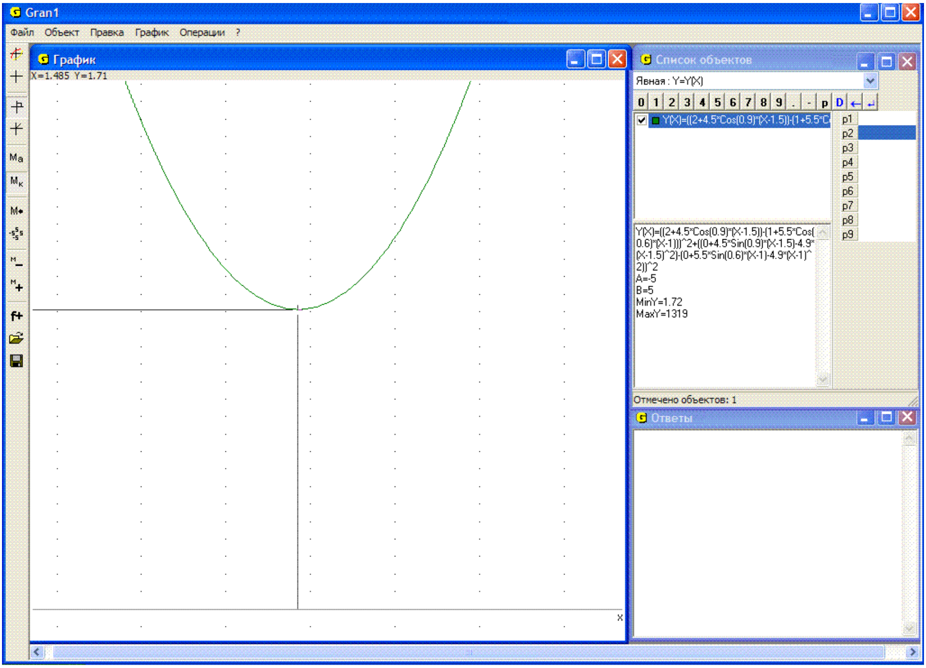


Рис. 14.15

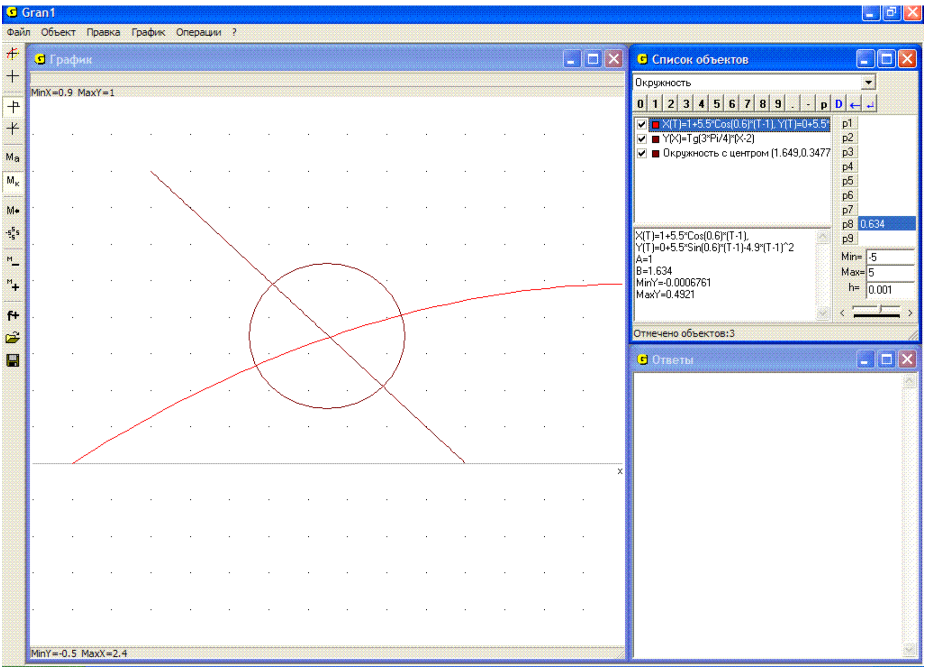


Рис. 14.16

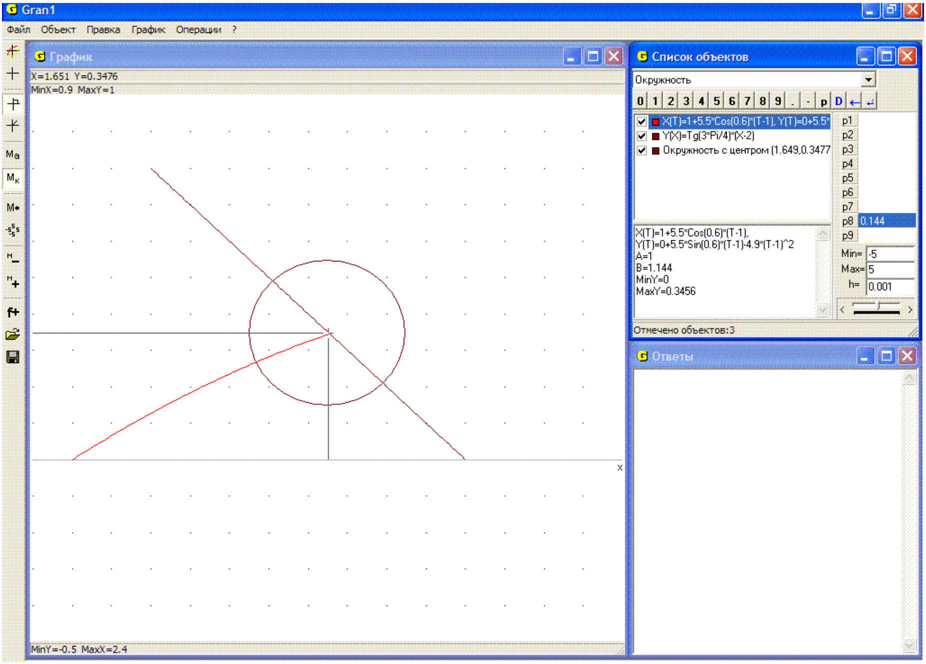


Рис. 14.17

Первое тело достигает указанной прямой в момент $t \approx 1.144$ (верхний предел изменения параметра t определяется через значение параметра $P1$) в точке $x \approx 1.65$, $y \approx 0.35$ (Рис. 14.17), а за пределы окрестности $(x-1.65)^2+(y-0.35)^2=(0.2)^2$ выходит в момент $t \approx 1.185$ в точке $x \approx 1.84$, $y \approx 0.40$ (Рис. 14.18). Таким образом второе тело должно стартовать в момент $t=1.144$ и в момент $t=1.185$ достичь точки $x=1.84$, $y=0.40$.

Следовательно, должны выполняться равенства

$$2+V_2\cos\alpha_2(1.185-1.144)=1.84,$$

$$V_2\sin\alpha_2(1.185-1.144)-4.9(1.185-1.144)^2=0.40.$$

Переобозначив неизвестные V_2 через x, α_2 через y, найдем решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 2+x\cos(y)\,0.041\text{-}1.84=0, \\ x\sin(y)\,0.041\text{-}4.9\,(0.041)^2\text{-}0.40=0. \end{cases}$$

Как видно из Рис. 14.19, приближенным решением такой системы уравнений будет $x=V_2 \approx 10.7$, $y=\alpha_2 \approx 1.95$.

Таким образом, если второе тело стартует из точки $(2, 0)$ в момент $t_2=1.144$ со скоростью $V_2 \approx 10.7$ под углом $\alpha_2 \approx 1.95$ (радиан) к горизонту (положительному направлению оси Ox), то в момент

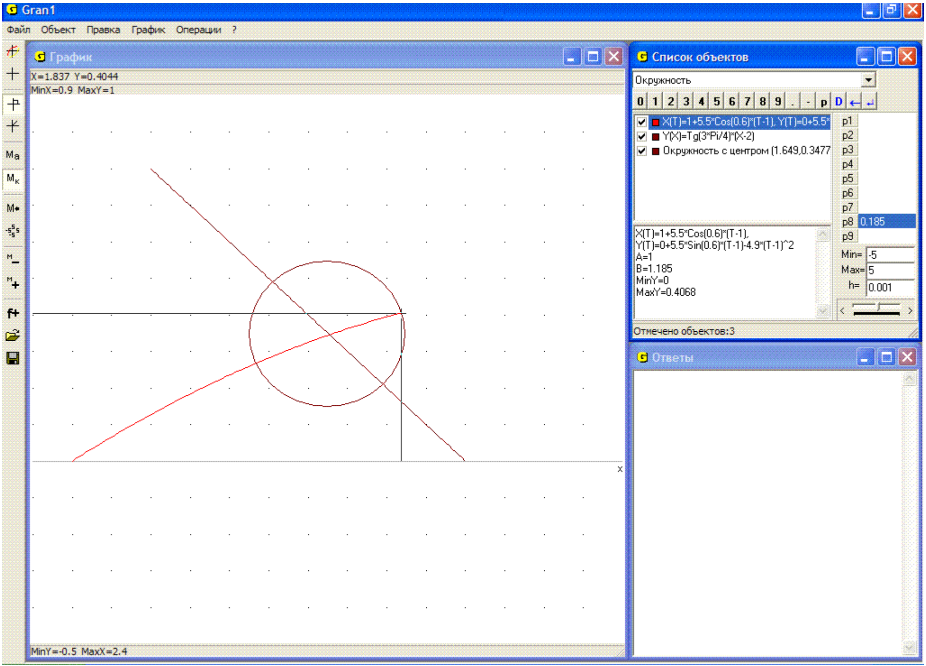


Рис. 14.18

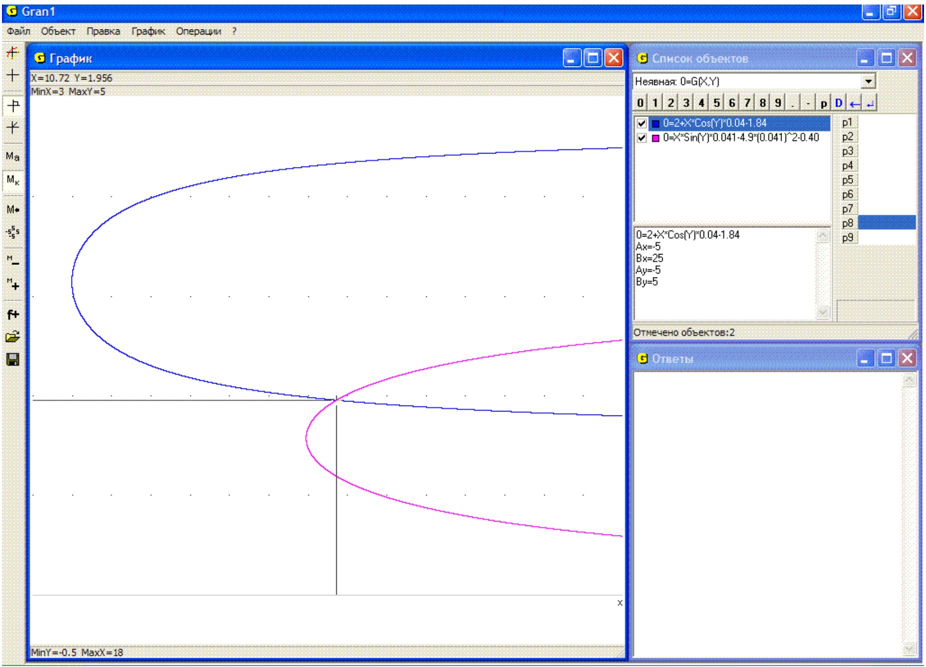


Рис. 14.19

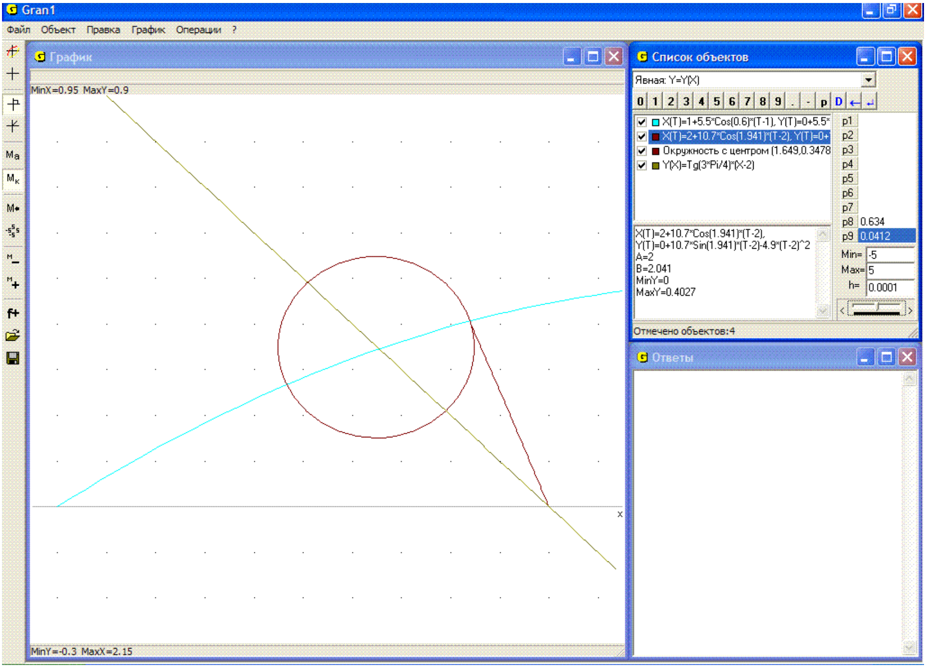


Рис. 14.20

$t \approx 1.185$ оно одновременно с первым телом достигнет точки $(1.84,\ 0.40)$, в которой в этот момент траектория первого тела пересекает предел окрестности радиуса 0.2 с центром в точке $(1.65,\ 0.35)$, в которой траектория первого тела пересекает прямую $y = tg\dfrac{3\pi}{4}(x-2)$ (Рис. 14.20).

Следует отметить, что не все задачи можно решить с использованием графических методов. Это связано с некоторыми ограничениями как компьютерной графики, так и компьютерной математики вообще.

8. Сколько действительных корней имеет уравнение $\arccos x = \sqrt{1-x^2}$?

На Рис. 14.21 изображены графики функций, соответствующих обеим частям уравнения. Как видно, при $x \to 1$ графики функций очень близки друг к другу, потому ничего нельзя сказать о количестве точек пересечения этих графиков (а значит, и о количестве решений уравнения), даже если изменять масштаб изображения или заменить заданное уравнение равносильным $\arccos x - \sqrt{1-x^2} = 0$.

9. Определить количество корней уравнения $\dfrac{1}{\sin\dfrac{5}{x}} = 2$ на отрезке $[-1,\ 1]$.

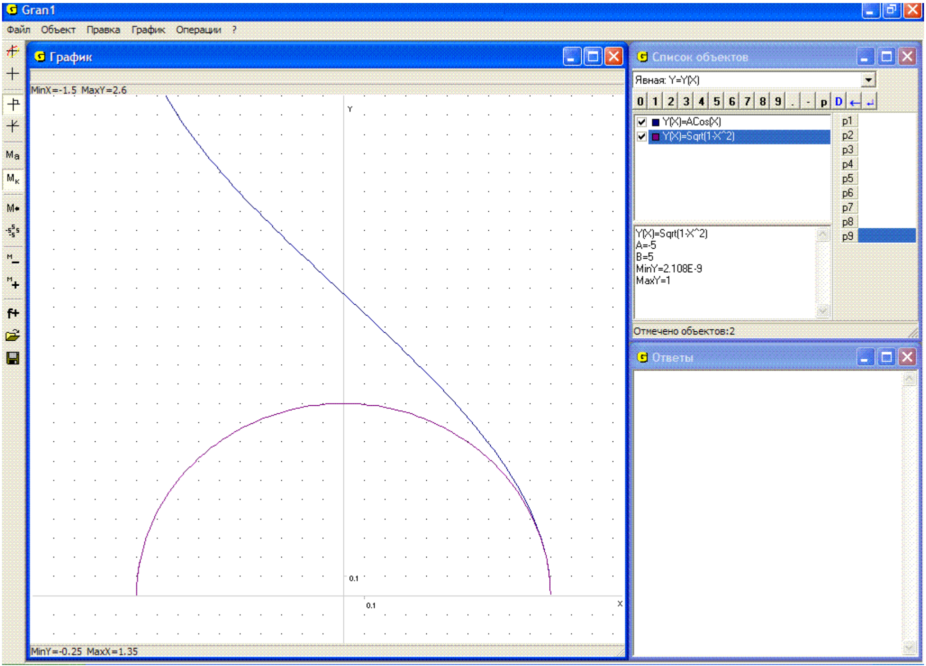


Рис. 14.21

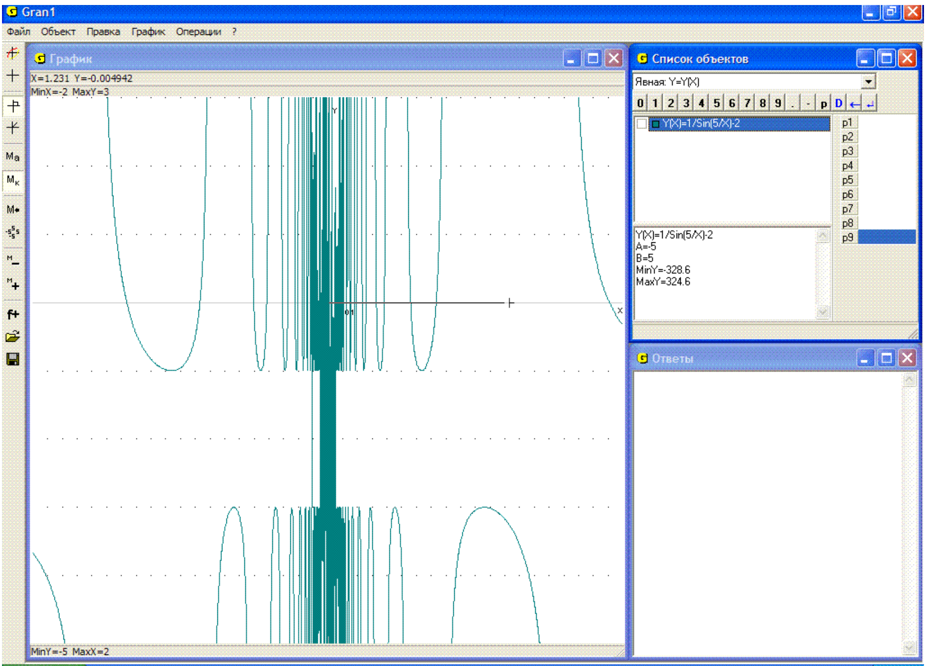


Рис. 14.22

Попытка построить график функции $y = \dfrac{1}{\sin\dfrac{5}{x}}$ на указанном отрезке не приведет к желаемому результату, поскольку данная функция имеет в окрестности точки $x = 0$ бесконечное множество точек разрыва (Рис. 14.22). Поэтому решить графически данную задачу невозможно.

Приведенные примеры показывают, что применение программных средств для решения математических задач должно быть обоснованным, их использование не освобождает от необходимости анализа решений задач и обоснования их корректности.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие точки на графике зависимости $y = f(x)$ соответствуют решениям уравнения $f(x) = 0$?
2. Какие точки на графике зависимостей $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ соответствуют решениям уравнения $f_1(x) = f_2(x)$?
3. Какие точки на графике зависимостей $G_1(x, y) = 0$, $G_2(x, y) = 0$ соответствуют решениям системы уравнений $\begin{cases} G_1(x, y) = 0, \\ G_2(x, y) = 0? \end{cases}$
4. Как представить уравнение $f(x) = 0$ в виде системы уравнений $\begin{cases} G_1(x, y) = 0, \\ G_2(x, y) = 0? \end{cases}$

   Какими должны быть выражения $G_1(x, y)$ и $G_2(x, y)$ в данном случае?
5. Как представить уравнение $f_1(x) = f_2(x)$ в виде системы уравнений $\begin{cases} G_1(x, y) = 0, \\ G_2(x, y) = 0? \end{cases}$

   Какими должны быть выражения $G_1(x, y)$ и $G_2(x, y)$ в данном случае?
6. Как с помощью графических построений можно уточнить решения уравнения $f(x) = 0$? уравнения $f_1(x) = f_2(x)$? системы уравнений вида $\begin{cases} G_1(x, y) = 0, \\ G_2(x, y) = 0? \end{cases}$

Упражнения для самостоятельного выполнения

1. Используя услуги программы GRAN1, найти приближенные решения уравнений:

   $x^2 - 17x + 3 = 0$; $\dfrac{1}{\log_{1/2}(x+1)} = 2$; $\log_2(x) - \sin(x) = 0$;

   $x^2 - \cos(x) = 0$; $\log_2(-x) = x$; $|x - 1| - x^2 + 5 = 0$.

2. При каких $P1$ уравнение $\left|x^2-5x+6\right|+P1=0$ имеет наибольшее количество решений? Наименьшее количество решений? Три решения?
3. При каких $P1$ уравнение $\left|\left|x-4\right|-3\right|+P1=0$ имеет наибольшее количество решений? Наименьшее количество решений?
4. При каких $P1$ уравнение $\log_2(P1+\left|\left|x-6\right|-3\right|)=0$ будет иметь наибольшее количество решений? Наименьшее количество решений?
5. При каких $P1$ уравнение $x\cos x+\log_{1/2}(2-\dfrac{x}{5})+P1=0$ имеет на промежутке $[-9,11]$ наибольшее количество решений? Наименьшее количество решений? 1 решение?
6. Используя услуги программы GRAN1, найти приближенные решения систем уравнений:

$$\begin{cases}3x-7y=9,\\5x+13y=7;\end{cases}\quad \begin{cases}3x^2-4y^3=12,\\2x^3-5y^2=8;\end{cases}\quad \begin{cases}x^2+3y^2=15,\\\log_2(x-3)-y^2=0;\end{cases}\quad \begin{cases}x+y=5,\\xy=1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin(x+y)=0,\\\sin(xy)=0,\\(x\in[-8,8],y\in[-8,8]);\end{cases}\quad \begin{cases}\lg(xy)=3,\\\sin|x|=1/3;\end{cases}\quad \begin{cases}x+y=1,\\\sqrt{|xy|}=1/2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+y^2=7,\\x^2-y=2;\end{cases}\quad \begin{cases}\log_2(xy)=3,\\2^{x+y}=1/3;\end{cases}\quad \begin{cases}x^2-y^2=1,\\x^2+2^y=2\end{cases}.$$

7. Из точки (x_1,y_1) в момент t_1 под углом α_1 к горизонту с начальной скоростью V_1 бросается некоторое тело. Из точки (x_2,y_2) в момент t_2 под углом α_2 к горизонту с начальной скоростью V_2 бросается другое тело.
   а) Как можно определить, возможно ли пребывание обоих тел одновременно в заданной окрестности заданной точки на траектории первого тела ?
   б) Определить наименьший радиус окрестностей точек на траектории первого тела, в которых оба тела могут находиться одновременно.
   в) Какими должны быть t_2, α_2, V_2, чтобы при заданных (x_1,y_1), t_1, α_1, V_1, (x_2,y_2) второе тело оказалось одновременно с первым:
      - в заданной окрестности заданной точки на траектории первого тела?
      - в окрестности заданного радиуса некоторой точки на траектории первого тела в заранее заданный момент t^*, ($t^*>t_1$, $t^*>t_2$)?

   Определить координаты такой точки.
   г) Какими должны быть (x_2,y_2), t_2, чтобы при заданных (x_1,y_1), t_1, α_1, V_1, α_2, V_2 второе тело одновременно с первым оказалось:

- в заданной окрестности заданной точки на траектории первого тела?
- в окрестности заданного радиуса некоторой точки на траектории первого тела в заранее заданный момент?

Определить координаты такой точки. Решить задачу при конкретных значениях (x_1, y_1), t_1, α_1, V_1 и т. д.

а) Из точки (x_1, y_1) в момент t_1 стартует некоторое тело и движется по окружности с центром в точке (x_1^*, y_1^*) против часовой стрелки с постоянной скоростью V_1. Из точки (x_2, y_2) в момент t_2 стартует второе тело и движется по окружности с центром в точке (x_2^*, y_2^*) против часовой стрелки с постоянной скоростью V_2.

б) Возможно ли столкновение этих тел, если скорости V_1 и V_2 и моменты старта t_1 и t_2 выбирать произвольно?

в) Если столкновение невозможно при любых t_1, t_2, V_1, V_2, то в какой момент времени расстояние между телами будет наименьшим при заданных (x_1, y_1), (x_1^*, y_1^*), t_1, V_1, (x_2, y_2), (x_2^*, y_2^*), t_2, V_2?

г) Можно ли подобрать моменты старта t_1 и t_2 и скорости V_1 и V_2 так, чтобы столкновение никогда не произошло, если при произвольном выборе t_1, V_1, t_2, V_2 оно возможно?

Рассмотреть случаи

д) при данных:

- $x_1^* = 0,\ y_1^* = 0,\ x_1 = -4,\ y_1 = 0,\ x_2^* = 1,\ y_2^* = 0,\ x_2 = 3,\ y_2 = 0,$
- $x_1^* = 0,\ y_1^* = 0,\ x_1 = -4,\ y_1 = 0,\ x_2^* = 1,\ y_2^* = 0,\ x_2 = 5,\ y_2 = 0,$
- $x_1^* = 0,\ y_1^* = 0,\ x_1 = -4,\ y_1 = 0,\ x_2^* = 2,\ y_2^* = 0,\ x_2 = 8,\ y_2 = 0.$

е) при данных:

- $x_1^* = 0,\ y_1^* = 0,\ x_1 = -4,\ y_1 = 0,\ V_1 = 4,$
  $x_2^* = 1,\ y_2^* = 0,\ x_2 = 5,\ y_2 = 0,\ V_2 = 8;$
- $x_1^* = 0,\ y_1^* = 0,\ x_1 = -4,\ y_1 = 0,\ V_1 = 4,$
  $x_2^* = 5,\ y_2^* = 0,\ x_2 = 0,\ y_2 = 0,\ V_2 = 3;$

ж) при данных

- $x_1^* = 0,\ y_1^* = 0,\ x_1 = -4,\ y_1 = 0,\ V_1 = 4,\ t_1 = 0,$
  $x_2^* = 1,\ y_2^* = 0,\ x_2 = 3,\ y_2 = 0,\ V_2 = 3,\ t_2 = 0;$
- $x_1^* = 0,\ y_1^* = 0,\ x_1 = -4,\ y_1 = 0,\ V_1 = 4,\ t_1 = 0,$
  $x_2^* = 8,\ y_2^* = 0,\ x_2 = 11,\ y_2 = 0,\ V_2 = 3,\ t_2 = 0.$

§15. Графическое решение неравенств и систем неравенств

Чтобы с помощью графических построений получить множество решений неравенства вида $f(x) \le c$, где $f(x)$ – некоторое выражение, заданное на промежутке $[a, b]$, нужно построить графики зависимостей $y = f(x)$ и $y = c$ (для значений x из $[a, b]$) и определить (с использованием услуги “Координаты”), при каких значениях x график зависимости $y = f(x)$ лежит не выше, чем график зависимости $y = c$. Множество таких значений x и будет множеством решений неравенства $f(x) \le c$. Множество решений неравенства вида $f_1(x) \le f_2(x)$ определяется аналогично. Кроме того, этот случай можно свести к предыдущему, поскольку неравенство $f_1(x) \le f_2(x)$ эквивалентно неравенству $f_1(x) - f_2(x) \le 0$. Множество решений неравенства вида $f(x) \ge c$ или вида $f_1(x) \ge f_2(x)$ определяется аналогично предыдущему.

Если функция $y = f(x)$ выпукла вниз, то каким бы ни было число c, множество решений неравенства $f(x) \le c$ или пустое, или такое, что если точки x_1 и x_2 лежат в этом множестве, то и все точки промежутка $[x_1, x_2]$ также лежат в этом множестве. При этом функцию $y = f(x)$ называют выпуклой вниз, если для любых двух точек, взятых на графике $y = f(x)$ и соединенных отрезком прямой, график функции $y = f(x)$ между указанными точками будет не выше графика так построенного отрезка (хорды). Примерами выпуклых вниз функций могут быть функции $y = x^2$, $y = 2^x$, $y = \log_{1/2} x$, $y = |x-1| + |x+1|$, $y = |x|$, $y = \cos x$ на промежутке $\left[\dfrac{\pi}{2}, 3\dfrac{\pi}{2}\right]$ и др.

Решения системы неравенств вида $f_1(x) \ge c$, $f_2(x) \ge c$, …, $f_m(x) \ge c$ находят как множество M точек, координаты которых удовлетворяют все неравенства одновременно: $M = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_m$, где M_i множество решений неравенства $f_i(x) \ge c$.

Для графического решения систем неравенств указанного вида в программе GRAN1 предусмотрена услуга “Операции / С-ма неравенств $y(x) < (>) c$ ...” (Рис. 15.1). При обращении к этой услуге появляется окно, в котором необходимо указать знак неравенств (> или <) и число c (Рис. 15.2). Обозначение зависимостей (типа $y = f(x)$), для которых будет рассматриваться система неравенств $f_i(x) > c$ (или $f_i(x) < c$), перед обращением к услуге должны быть отмечены меткой ☑, а их графики построены в окне “График”. Система может состоят и из одного неравенства.

При решении системы неравенств вида $f_i(x) \ge c$ (или $f_i(x) \le c$) на оси Ox отмечаются (красным цветом) точки, координаты которых удовлетворяют все отмеченные неравенства одновременно. В окне “Ответы” дается список приближенных значений координат концов отрезков на оси Ox, точки которых есть решениями всех неравенств системы (Рис. 15.1). Значения корней вычисляются на отрезке, общем для всех отрезков задания функций, через которые определяются неравенства системы.

Пример

Решить неравенство $\frac{x^4}{150}-\frac{x^3}{50}-\frac{x^2}{3}-1>-2$ при $x\in[-10,10]$.

Построив график зависимости $y=\frac{x^4}{150}-\frac{x^3}{50}-\frac{x^2}{3}-1$ на промежутке $[-10,10]$, обратимся к услуге "Операции / Неравенства / С-ма неравенств y(x)<(>)c...", указав знак ">" и значение $c=-2$. В результате получим изображение, показанное на Рис. 15.3.

Учитывая список отрезков из окна "Ответы", получим: множеством решений рассматриваемого неравенства есть множество

(-10, -5.41) ⋃ (-1.92, 1.70) ⋃ (8.59, 10).

Пусть теперь необходимо найти множество решений системы неравенств вида

$$\begin{cases} G_1(x,y)\le 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_m(x,y)\le 0. \end{cases}$$

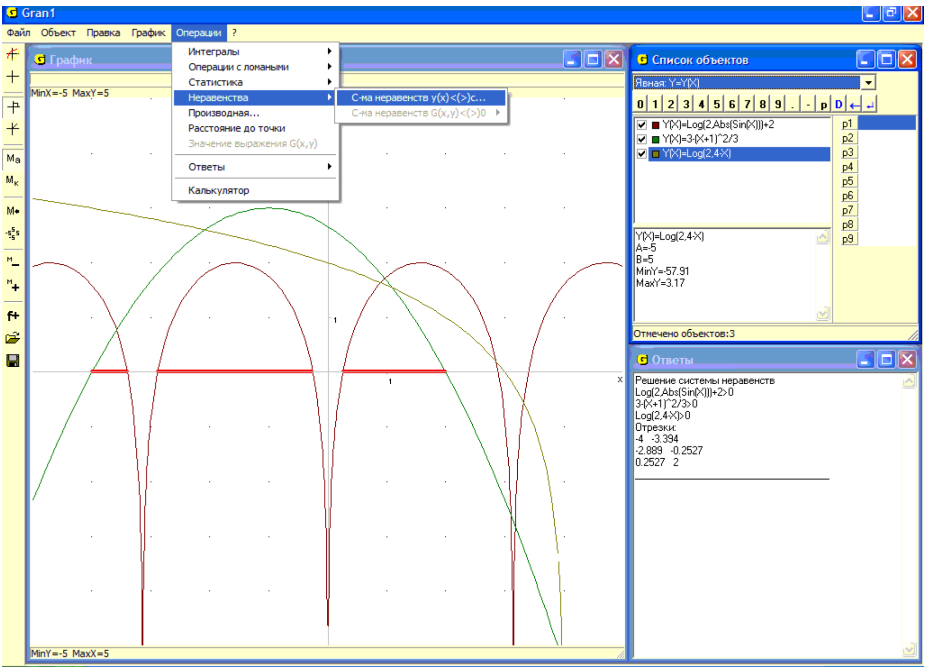


Рис. 15.1

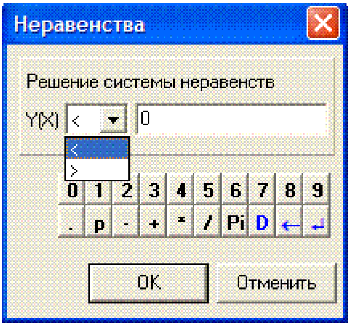


Рис. 15.2

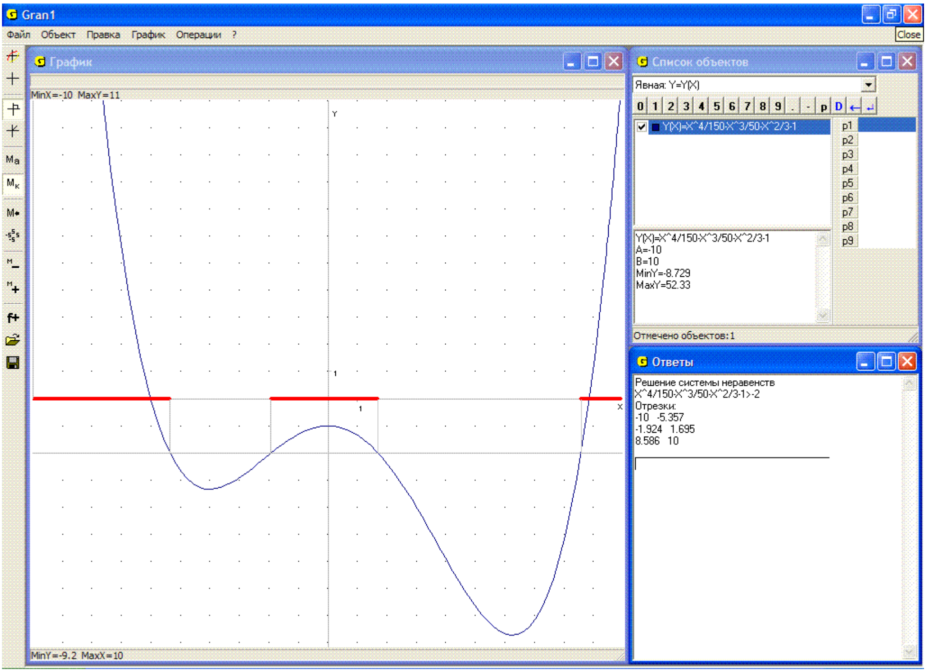


Рис. 15.3

Эта задача значительно сложнаее, чем предыдущая. Однако в отдельных, достаточно многих, случаях, в частности в таком важном, когда через выражения $G_i(x, y)$ определяются выпуклые вниз функции, задача также может быть решена графически.

В ходе решения задачи могут понадобиться дополнительные вычисления и построения, анализ особенностей выражений $G_i(x, y)$ для выяснения вопросов, касающихся поставленной задачи, в частности вопроса о том, пустое или нет множество решений рассматриваемой системы, и т. п.

Множеством решений рассматриваемой системы неравенств будет множество $M = M_1 \bigcap M_2 \bigcap ... \bigcap M_m$, где M_i – множество решений неравенства $G_i(x, y) \le 0$. В частности, если функция $z = G_i(x, y)$ выпукла вниз, то и множество M_i пусто или выпукло, то есть такое, что любые две точки из множества M_i можно соединить отрезком прямой, все точки которого лежат во множестве M_i.

Построив графики зависимостей $G_i(x, y) = 0$ и $G_i(x, y) = c$, где c – достаточно малое положительное число, можно установить, в каких точках $G_i(x, y) > 0$, а также в каких точках $G_i(x, y) \le 0$. Множество точек, в которых одновременно $G_i(x, y) \le 0$ при всех $i = 1, 2, ..., m$, есть множеством решений рассматриваемой системы неравенств. Следует заметить, что если функция $z = G_i(x, y)$ выпукла вниз, то каким бы ни было число c, множество решений неравенства $G_i(x, y) \le c$ или пусто, или выпукло.

Примерами выпуклых вниз функций могут быть $z = x^2 + y^2$, $z = |x| + |y|$ и др.

Дополнительные построения графиков зависимостей $G_i(x, y) = c$ могут быть удалены после выяснения вопросов относительно множества точек, в которых удовлетворяется неравенство $G_i(x, y) \le 0$, и не обязательны, если вопрос можно решить без таких построений.

Для графического решения системы неравенств вида $G_i(x, y) < 0$ (или $G_i(x, y) > 0$), $i = 1, 2, ..., m$, в программе GRAN1 предусмотрена услуга “Операции / Неравенства / С-ма неравенств G(x, y)<(>)0”. При обращении к этой услуге следует указать знак неравенств, которые входят в систему (“>” или “<”), после чего на плоскости xOy отмечается (заштриховывается) множество точек, удовлетворяющих все указанные неравенства одновременно. Перед обращением к услуге обозначения зависимостей (типа $G(x, y) = 0$), через которые определяется система неравенств, должны быть отмечены меткой ☑, а их графики построены (Рис. 15.4). Различие в ответах в решениях систем неравенств $G_i(x, y) \le 0$ и $G_i(x, y) < 0$ ($G_i(x, y) \ge 0$ и $G_i(x, y) > 0$) будет заключаться лишь в том, входят или нет во множество решений точки, лежащие на графиках зависимостей $G_i(x, y) = 0$.

Примеры

1. Найти множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x + y - 3 > 0, \\ 2x - 3y + 6 > 0, \\ -3x + 2y + 6 > 0. \end{cases}$$

Построив графики зависимостей $x + y - 3 = 0$, $2x - 3y + 6 = 0$, $-3x + 2y + 6 = 0$ и обратившись к услуге “Операции / Неравенства / С-ма неравенств G(x, y)<(>)0” (указав знак “>”), получим – любая внутренняя точка заштрихованного на Рис. 15.4 треугольника есть решением рассматриваемой системы неравенств.

2. Найти множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 16, \\ |x| + |y| \leq 5. \end{cases}$$

Построив графики зависимостей $x^2 + y^2 - 16 = 0$, $5 - abs(x) - abs(y) = 0$ и обратившись к услуге “Операции / Неравенства / С-ма неравенств G(x, y)<(>)0” (указав знак “>”), получим – указанной системе неравенств удовлетворяют точки заштрихованного на Рис. 15.5 множества.

3. Найти множество решений неравенства $\sin(|x| + |y|) \geq 0$.

Построив график зависимости $0 = \sin(abs(x) + abs(y))$ и обратившись к услуге “Операции / Неравенства / С-ма неравенств G(x, y)<(>)0” (указав знак “>”), получим – отмеченное неравенство удовлетворяется в точках заштрихованного на Рис. 15.6 множества.

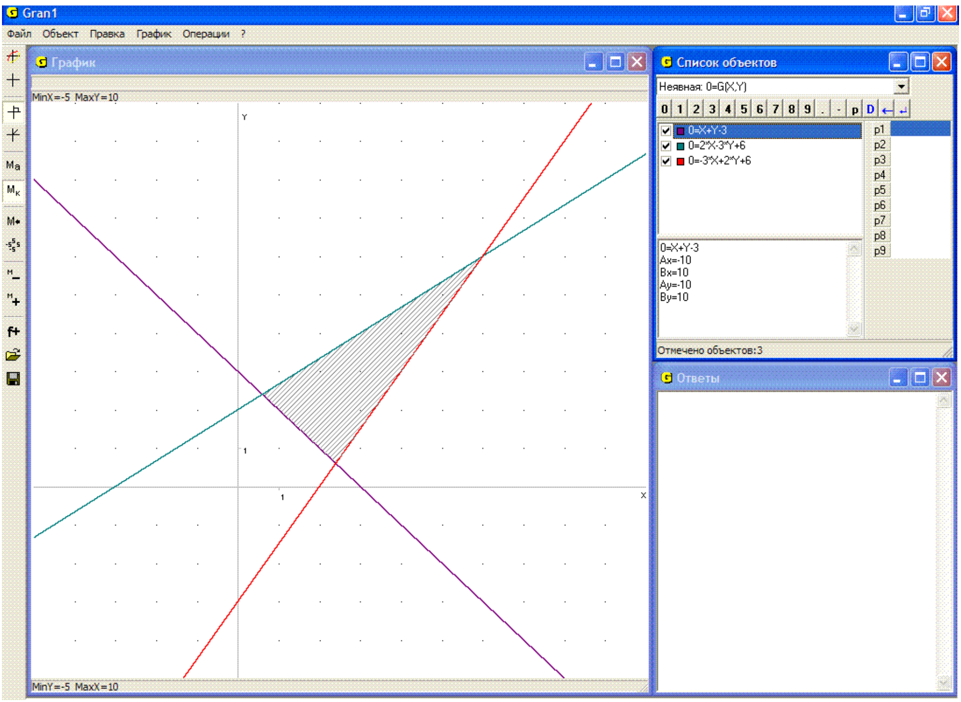


Рис. 15.4

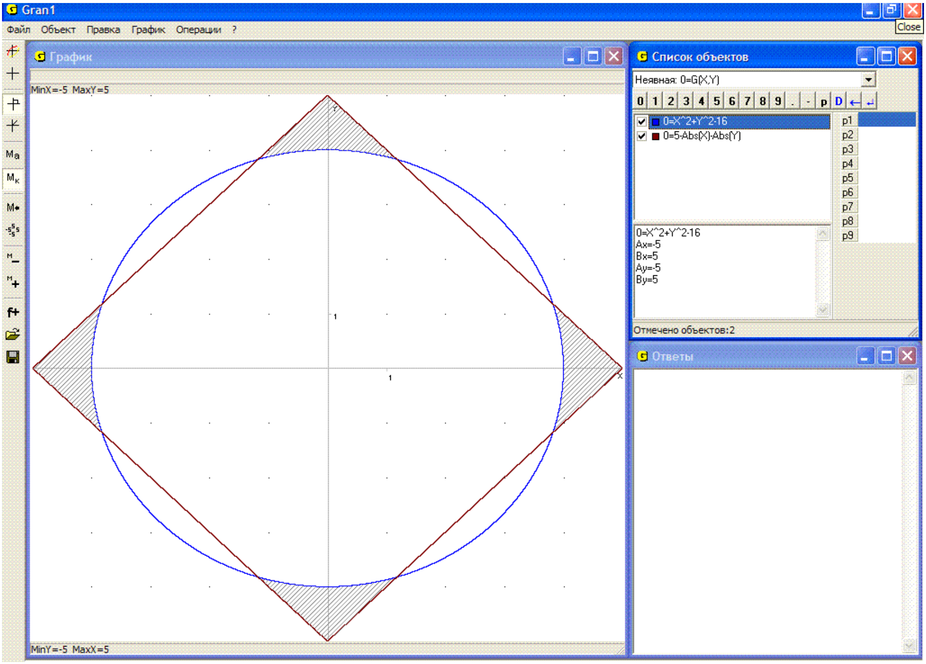


Рис. 15.5

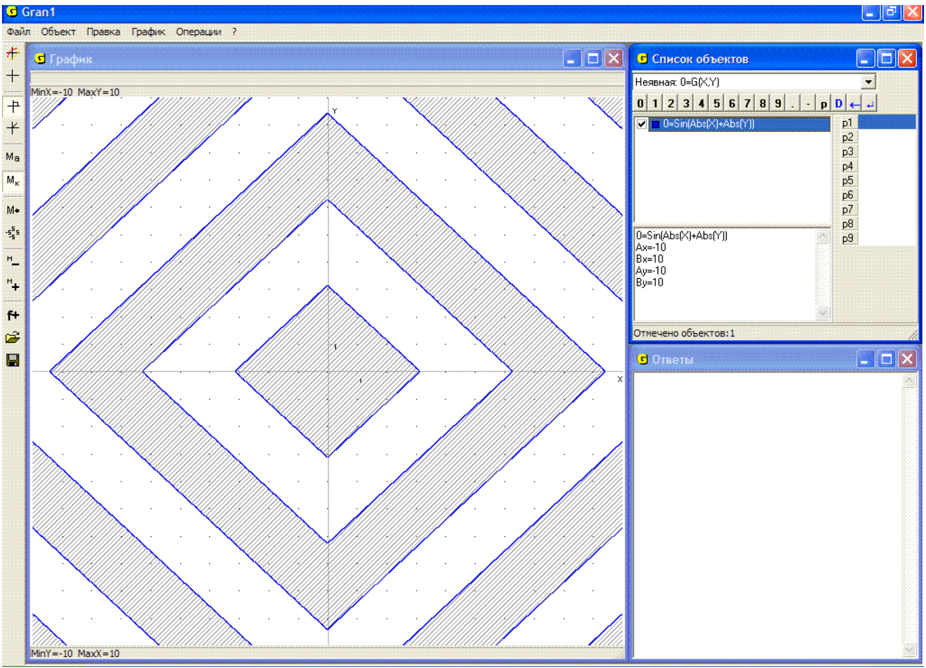


Рис. 15.6

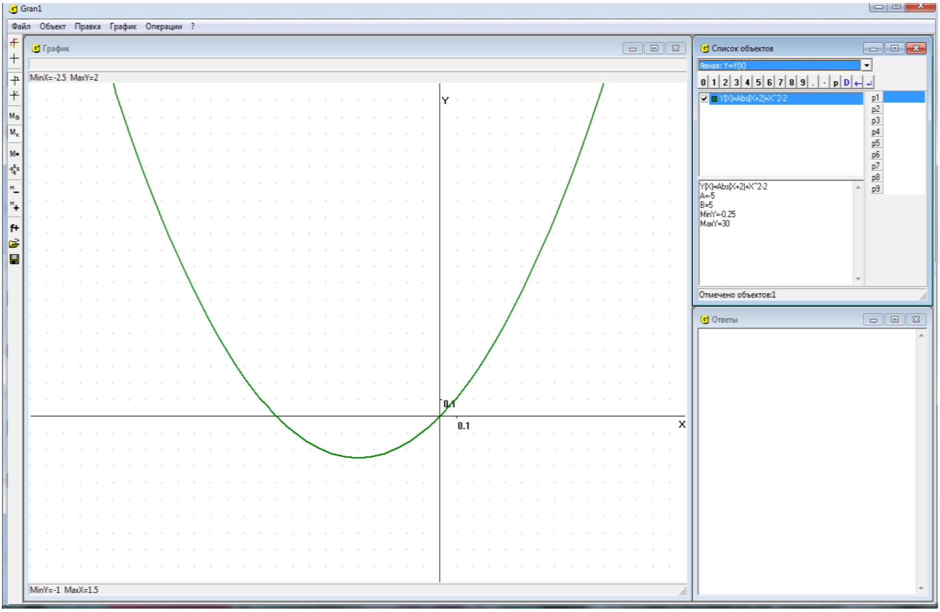


Рис. 15.7

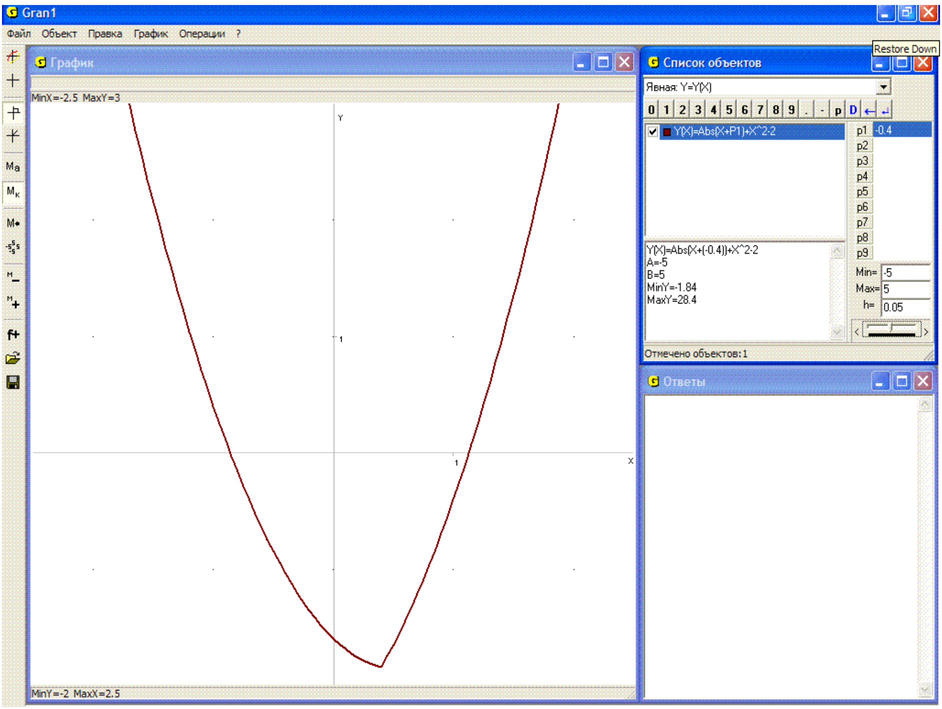


Рис. 15.8

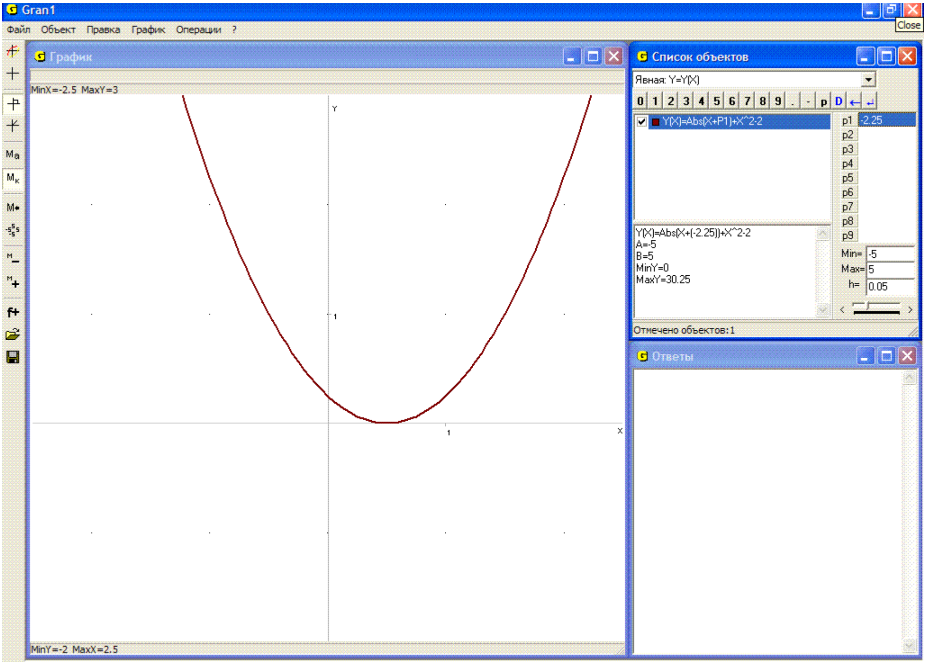


Рис. 15.9

4. Найти все значения параметра *a*, при каждом из которых неравенство $|x+a|+x^2<2$ имеет хотя бы одно положительное решение, если $x\in[-5,\ 5]$.

Для использования программы заменим данное неравенство равносильным $|x+a|+x^2-2<0$. Создадим соответствующий объект, заменив параметр a на $P1$: $y=abs(x+P1)+x^2-2$ и задав отрезок $[-5,\ 5]$. Параметр $P1$ также зададим в пределах $[-5,\ 5]$, установив шаг его изменения (приращение) $h=0.05$. Построим графики созданных объектов.

Данное неравенство имеет решения, если хотя бы некоторая часть графика находится ниже оси Ox. Изменяя значение параметра $P1$ в программе и наблюдая за графиком функции (Рис. 15.7), приходим к выводу, что когда $a\in(-2{,}25;\ 2)$, неравенство имеет положительные решения (Рис. 15.7, Рис. 15.8, Рис. 15.9).

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют решением неравенства вида: $f(x)\le c$? $f_1(x)\le f_2(x)$? $G(x,y)\le 0$?
2. Что называют решением системы неравенств вида:
   а) $f_1(x)\le 0$, $f_2(x)\le 0$, … , $f_m(x)\le 0$?
   б) $G_1(x,y)\le 0$, $G_2(x,y)\le 0$, … , $G_m(x,y)\le 0$?

3. Какую функцию вида $y = f(x)$ называют выпуклой вниз?
4. Какие свойства удовлетворяет множество решений неравенства $f(x) \le c$, если функция $y = f(x)$ выпукла вниз?
5. Как с помощью программы GRAN1 можно найти решения неравенства вида $f(x) \le c$, где $y = f(x)$ – функция, заданная на промежутке $[a, b]$?
6. Какую функцию вида $z = G(x, y)$ называют выпуклой вниз?
7. Может ли быть выпуклой вниз функция $z = G(x, y)$, если множество решений неравенства $G(x, y) \le 0$ пустое?
8. Будет ли выпуклой вниз функция $z = G(x, y)$, если для некоторой постоянной c множество решений неравенства $G(x, y) \le c$ выпукло?
9. Как с помощью программы GRAN1 можно найти решения неравенства вида $G(x, y) \le 0$, где $z = G(x, y)$ – выпуклая вниз функция?
10. Будет ли выпуклым множество решений системы неравенств $G_1(x, y) \le c_1$, ..., $G_m(x, y) \le c_m$, если это множество не пусто, а функции $z = G_1(x, y)$, ..., $z = G_m(x, y)$ выпуклы вниз?

Упражнения для самостоятельного выполнения

1. Найти множество решений неравенств:

$x^2 - 7x - 1 \le 3$;

$\sin x \le \dfrac{1}{3}$ при $x \in [-5, 5]$;

$\sin(\cos(x)) \le \cos(\sin(x))$;

$\dfrac{1}{\log_{1/2}(x)} \ge -2$;

$x^2 - 5x - 1 \le \cos x$;

$|x| + |y| \le 5$;

$(x-1)^2 + (y-1)^2 \le 9$;

$\sin(\sin(xy) + \cos(xy)) \le 0$ при $x \in [-5, 5]$ $y \in [-5, 5]$.

2. Найти множество решений систем неравенств:

$$\begin{cases} x(1-x) \ge -3, \\ \log_{1/2}(x)\log_2(x) \ge -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 \le 16, \\ \text{abs}(x) + \text{abs}(y) \le 5. \end{cases}$$

3. Найти множество решений систем линейных неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 1 \le 0, \\ x_1 - x_2 - 4 \le 0, \\ -2x_1 + x_2 - 4 \le 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4 \le 0, \\ -x_1 - x_2 + 5 \le 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 8 \le 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 6 \le 0. \end{cases}$$

§16. Отыскание наибольших и наименьших значений функций на заданном множестве точек

Использование услуг программы GRAN1 дает возможность графическими методами находить приближенные решения некоторых задач на отыскание наибольших или наименьших значений функций одной или двух переменных на множествах, определенных некоторыми системами неравенств (или каким либо иным образом). При этом исследуемые функции, а также функции, через которые определяется множество допустимых точек, могут быть линейными или нелинейными, выпуклыми или невыпуклыми.

В общем случае задачу вида

$$\min_{x\in G} f(x),\ G=\{x: \varphi_i(x)\le 0,\ i=\overline{1,m},\ x\in R^n\}$$

называют задачей математического программирования.

Если функции $y=f(x)$, $y=\varphi_i(x)$ выпуклые (вниз), то такую задачу называют задачей выпуклого программирования, а если линейные – задачей линейного программирования.

Если отыскиваются целочисленные решения (либо если множество G дискретно), то такую задачу называют задачей целочисленного (или дискретного) программирования.

Любую точку $x\in G$ называют допустимой точкой. Точку $x^*\in G$, в которой достигается $\min\limits_{x\in G} f(x)$, называют оптимальной точкой указанной задачи математического программирования, а значение $f(x^*)$ – оптимальным значением функции $y=f(x)$ на указанном множестве точек.

Для приближенного отыскания наибольшего и наименьшего значений функции $y=f(x)$ на заданном промежутке $[a,b]$ с использованием услуг программы GRAN1 достаточно построить график зависимости $y=f(x)$ при $x\in[a,b]$ и затем, используя координатный курсор, определить координаты наивысшей и наинизшей точек на графике $y=f(x)$, $x\in[a,b]$. К тому же по программе автоматически вычисляются наименьшее и наибольшее значения $f(x)$ на заданном промежутке $[a,b]$ (Рис. 16.1 и др.), которые указываются в нижней части окна “Список объектов”.

При этом нет необходимости находить корни уравнения $f'(x)=0$, анализировать особенности производной $f'(x)$ или второй производной $f''(x)$ в окрестностях решений уравнения $f'(x)=0$ и т.п. Кроме того следует заметить, что известный алгоритм исследования функции предназначен в основном для того, чтобы построить график функции и выяснить ее особенности на заданном промежутке $[a,b]$. Поскольку построение графика зависимости $y=f(x)$ на промежутке $[a,b]$ не вызывает трудностей, а с использованием координатного курсора легко определить все характерные точки и особенности графика (точки пересечения графика с осями, наивысшую и наинизшую точки на графике, промежутки убывания и возрастания функции $y = f(x)$, промежутки выпуклости вниз и верх и т.п.), то выполнение всех пунктов достаточно громоздкого алгоритма исследования функции не всегда оказывается необходимым.

Примеры

1. Найти наибольшее значение функции

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{x^2}{7} + \cos(5 + x)$$

на промежутке $[-5, 5]$, а также значение аргумента x, при котором оно достигается.

Построив график зависимости $y = f(x)$ и установив курсор в наивысшую точку на графике, получим $x \approx 1.24$, $y \approx 1.85$ (Рис. 16.1). Кроме того, в окне “Список объектов” всегда указываются наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на заданном промежутке.

Заметим, что отыскание решения этой задачи классическими аналитическими методами достаточно сложное.

2. Из прямоугольного листа жести размерами 4×5 (дециметров) нужно изготовить коробку (без крышки) наибольшего объема. Каким будет этот объем?

Обозначим через x высоту коробки $x \in [0, 2]$. Тогда ее объем будет равен $(4 - 2x)(5 - 2x)x$.

Построив график зависимости $y = (4 - 2x)(5 - 2x)x$ на промежутке $[0, 2]$ и определив координаты наивысшей точки на графике, получим $x \approx 0.73$, $y \approx 6.56$. Таким образом объем коробки $V \approx 6.56$ будет наибольшим, если высота коробки будет равной 0.73 дециметра (Рис. 16.2).

Если необходимо найти наибольшее или наименьшее значение функции $z = G(x, y)$ на множестве решений системы неравенств вида $G_1(x, y) \le 0$, ..., $G_m(x, y) \le 0$, тогда (в пределах возможностей, предусмотренных в программе GRAN1) приближенно решение такой задачи с помощью графических построений с использованием услуг программы GRAN1 можно найти таким образом. Сначала построить графики зависимостей $G_1(x, y) = 0$, ..., $G_m(x, y) = 0$ и выяснить, какое множество точек удовлетворяет все неравенства одновременно, или же определить это множество, используя услугу “Операции / Неравенства / С-ма неравенств $G(x, y)$<(>)0”. Дальше, подбирая соответствующим образом константу c, построить график зависимости $G(x, y) = c$ (с этой целью можно использовать один из параметров $P1$, $P2$, ..., $P9$). Таким способом постепенно можно установить подмножество точек из множества решений системы неравенств $G_1(x, y) \le 0$, ..., $G_m(x, y) \le 0$, на котором функция $z = G(x, y)$ принимает наименьшее (или наибольшее) значение.

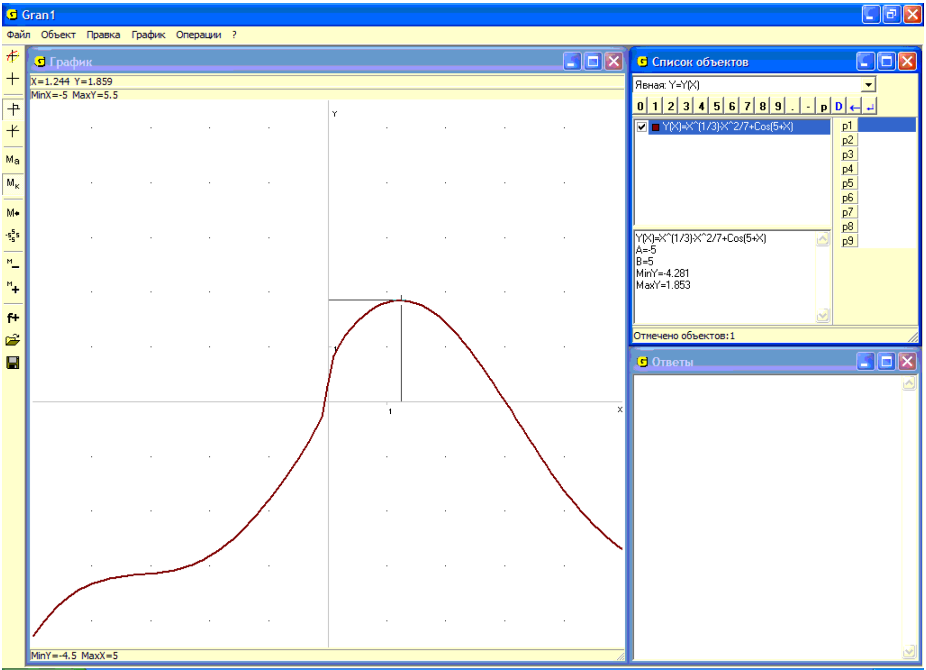


Рис. 16.1

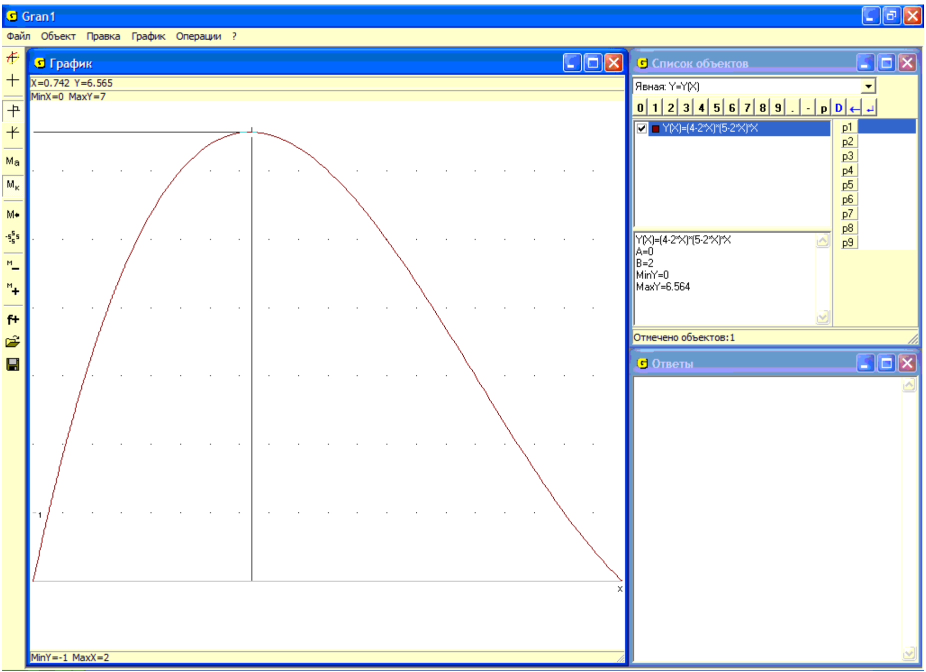


Рис. 16.2

В отдельных случаях соответствующий анализ можно осуществить, используя услугу “Операции / Значение выражения $G(x,\ y)$”, где рядом с координатами “x=...”, “y=...” точки (x, y) на координатной плоскости в верхней части окна “График” выводится также значение $z = G(x, y)$ исследуемой функции в точке (x, y).

Следует, однако, иметь в виду, что возможности использования программы GRAN1 для решения подобных задач достаточно ограничены. Ею можно воспользоваться для решения двумерных задач рассмотренного типа или для выполнения вспомогательных вычислений и построений при решении таких задач.

3. Найти наименьшее значение функции $z = G(x, y) = 2 - (x^2 + y^2)$ на множестве решений неравенства $|x| + |y| \le 5$.

Построим график зависимости $abs(x) + abs(y) - 5 = 0$.

Обратившись к услуге “Операции / Неравенства / С-ма неравенств $G(x,\ y)$<(>)0”, легко видеть, что любая точка внутри полученного квадрата будет отдельным решением данного неравенства (Рис. 16.3).

Построим дальше графики зависимостей $P1 - (x^2 + y^2) = 0$ для разных значений параметра $P1$. Как видно из Рис. 16.3, множеством решений неравенства $|x| + |y| \le 5$ есть внутренняя область квадрата с вершинами в точках (5, 0), (0, 5), (-5, 0), (0-5), и наименьшее значение (равное -23) функция $z = 2 - (x^2 + y^2)$ принимает в этих четырех точках, которые входят в множество решений неравенства $|x| + |y| \le 5$.

Получить данный ответ можно также, установив курсор на выражение $G(x, y) = 2 - (x^2 + y^2)$ в окне “Список объектов” и обратившись к услуге “Операции/Значение выражения $G(x,\ y)$”. Перемещая координатный курсор внутри области решений, можно отслеживать значения выражения $2 - (x^2 + y^2)$, которые вычисляются, в окне “График”.

4. На плоскости xOy найти точку $M(x, y)$, сумма расстояний которой от пяти заданных точек $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(5,3)$, $D(2,8)$, $E(0, 5)$ была бы наименьшей (задача Штейнера).

Учитывая, что сумма расстояний точки M от точек A, B, C, D, E определяется через выражение

$$d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-8)^2} + \sqrt{x^2 + (y-5)^2},$$

для отдельных значений параметра $P1$ построим графики соответствующих зависимостей вида $d(x, y) - P1 = 0$. Как видно из Рис. 16.4, наименьшее значение, приближенно равное 17.983, рассматриваемая функция $z = d(x, y)$ принимает в точке $x \approx 2.4$, $y \approx 2.96$.

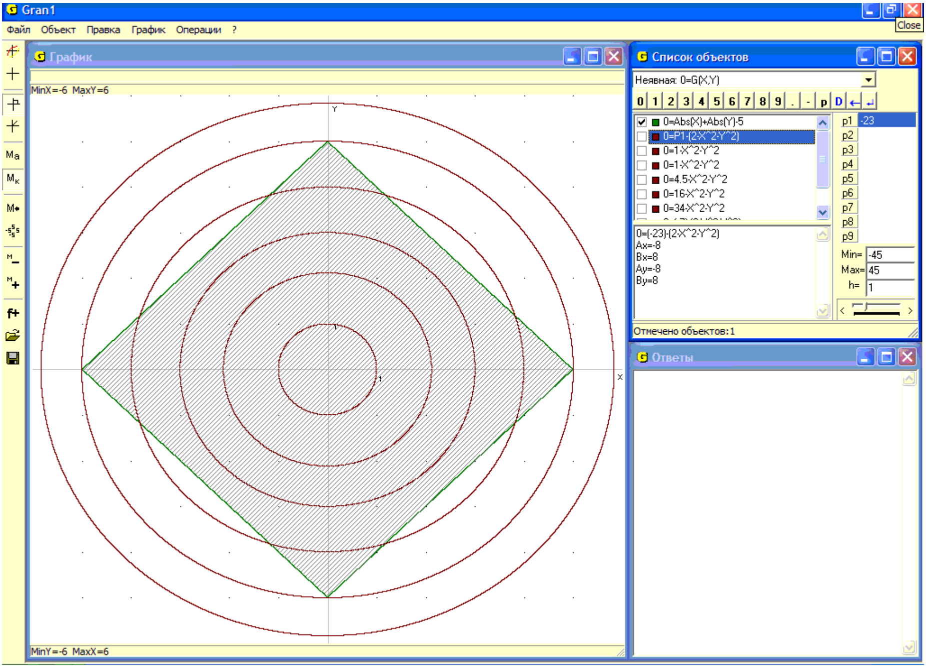


Рис. 16.3

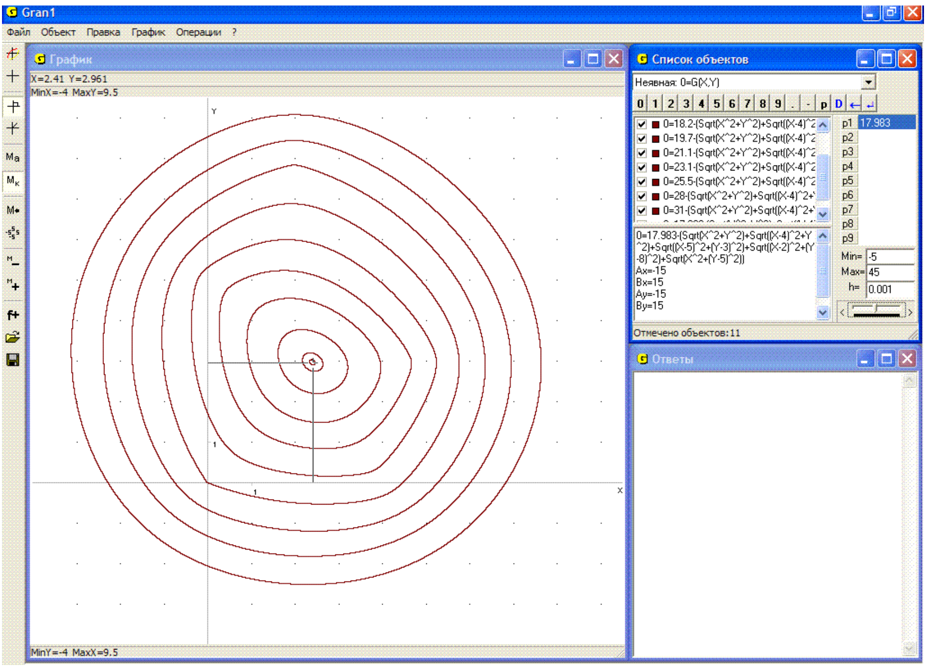


Рис. 16.4

5. Найти наименьшее значение функции $z = G(x, y) = 2x + 3y$ на множестве решений системы неравенств $x + y \geq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Построив графики зависимостей $x + y - 1 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, легко убедиться, что множеством решений системы неравенств $x + y \geq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ есть множество точек первого квадранта, которые лежат над прямой, описываемой уравнением $x + y = 1$ (Рис. 16.5).

Дальше зададим объект – зависимость $G(x, y) = P11 - (2x + 3y)$, и постепенно изменяя значение параметра $P1$ и фиксируя объекты при некоторых таких значениях, найдем, что наименьшее значение на отмеченном множестве точек, равное 2, функция $z = G(x, y) = 2x + 3y$ принимает в точке $x = 1$, $y = 0$ (Рис. 16.5).

6. Для изготовления продукции двух видов используется четыре вида сырья. Количество сырья каждого вида ограничено и равно соответственно b_1, b_2, b_3, b_4 единиц. Для изготовления одной единицы продукции первого вида нужно a_{11} единиц сырья первого вида, a_{21} единиц сырья второго вида, a_{31} единиц сырья третьего вида и a_{41} единиц сырья четвертого вида, а для изготовления одной единицы продукции второго вида нужно соответственно a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42} единиц сырья первого, второго, третьего и четвертого видов (при этом все числа $a_{ij} \geq 0$).

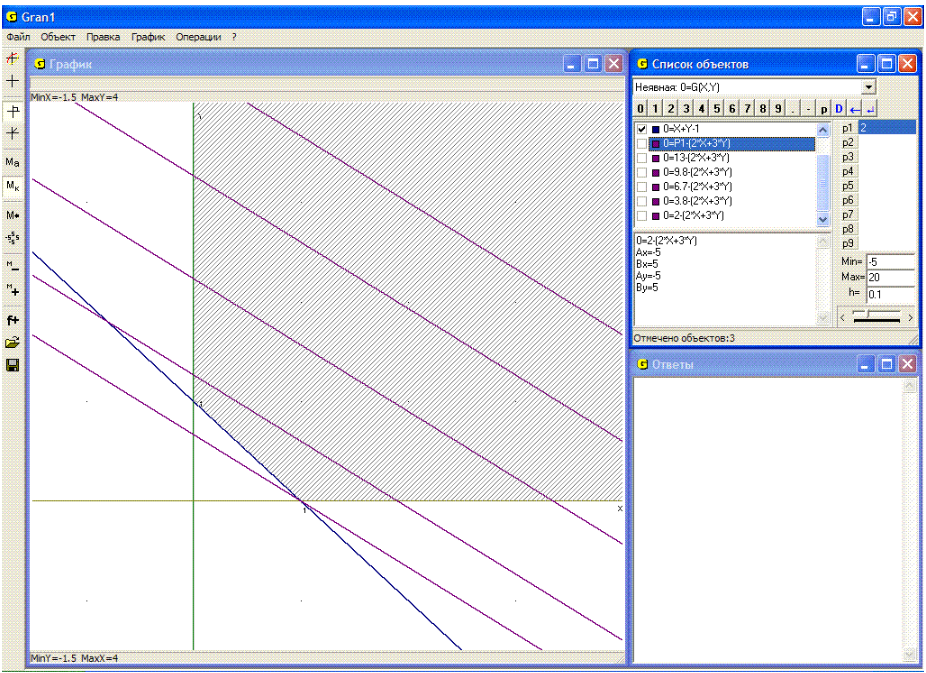


Рис. 16.5

Пусть прибыль от реализации одной единицы продукции первого вида составляет d_1 единиц, а второго – d_2 единиц стоимости. Нужно изготовить по столько единиц продукции первого и второго видов, чтобы при данных условиях прибыль от их реализации была наибольшей. Другими словами, программа выпуска продукции при имеющихся ограничениях должна быть оптимальной.

Предположим, что запланировано выпустить x_1 единиц продукции первого вида и x_2 единиц продукции второго вида. Тогда расходы сырья будут такими: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2$ – первого вида, $a_{21}x_1 + a_{22}x_2$ – второго вида, $a_{31}x_1 + a_{32}x_2$ – третьего вида, $a_{41}x_1 + a_{42}x_2$ – четвертого вида. При этом должны выполняться ограничения $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$, $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2$, $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3$, $a_{41}x_1 + a_{42}x_2 \le b_4$.

При таком плане выпуска продукции будет получена прибыль $z(x_1, x_2) = d_1x_1 + d_2x_2$, ($x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$). Нужно во множестве решений отмеченной системы неравенств найти такую точку (x_1, y_1), в которой функция $z(x_1, y_1)$ принимает наибольшее значение.

На Рис. 16.6 показано решение такой задачи для конкретных значений:

$a_{11} = 1.5$,	$a_{21} = 1$,	$a_{31} = 3$,	$a_{41} = 0.2$,
$a_{12} = 1$,	$a_{22} = 2.5$,	$a_{32} = 3$,	$a_{42} = 0.2$,
$b_1 = 12$,	$b_2 = 18$,	$b_3 = 27$,	$b_4 = 3$,
$d_1 = 2.3$,	$d_2 = 2.7$.		

Изменяя значение параметра $P1$ в выражении $P1 - (2.3x + 2.7y)$ (или воспользовавшись услугой "Операции / Значение выражения $G(x, y)$"), получим, что оптимальное значение, которое приближенно равно 23.1, функция $z(x_1, x_2)$ принимает в точке $x_1 \approx 2.99$, $x_2 \approx 6.02$ (Рис.16.6), которую называют оптимальным решением (или оптимальной точкой) данной задачи. Если числа x_1, x_2 должны быть целыми, то таким же образом можно найти целочисленные решения рассматриваемой задачи. В данном примере получаем $x_1 = 3$, $x_2 = 6$.

7. Путешественник хочет перейти из точки $A(x_0, y_0)$ в точку $B(x_3, y_3)$. При этом в точках, для которых $x_0 \le x \le x_1$, он может двигаться со скоростью V_1, в точках, для которых $x_1 \le x \le x_2$ – со скоростью V_2, в точках, для которых, $x_2 \le x \le x_3$ – со скоростью V_3 (имеется в виду, что $x_{i-1} < x_i$, $i = 1, 2, 3$).

К каким точкам (x_1, y_1), (x_2, y_2) на прямых $x = x_1$ и $x = x_2$ соответственно он должен идти, чтобы дойти из точки A до точки B как можно быстрее?

Общее время, которое путешественник будет тратить на весь путь, через неизвестные y_1 и y_2 выражается таким образом:

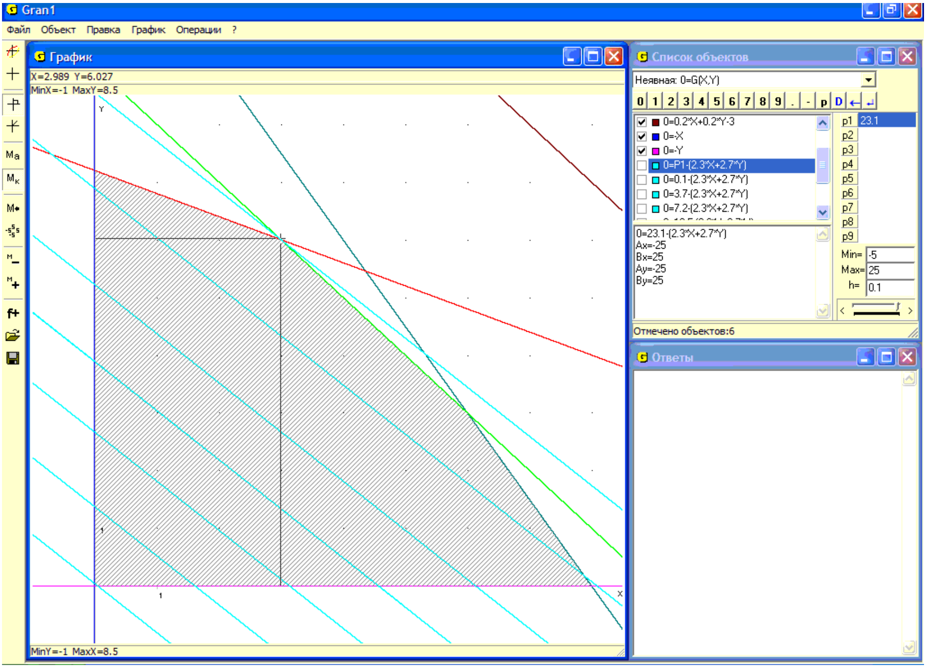


Рис. 16.6

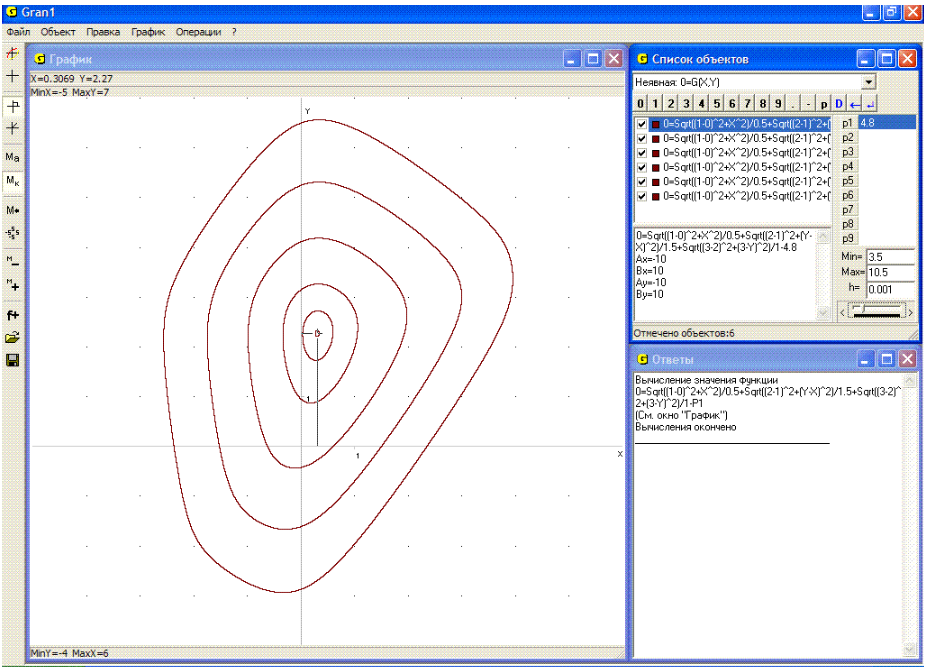


Рис. 16.7

$$t(y_1,y_2)=\frac{\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}}{V_1}+\frac{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}{V_2}+\frac{\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}}{V_3}$$

(где x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_3, V_1, V_2, V_3 – заданные). Таким образом, нужно найти наименьшее значение функции $t(y_1, y_2)$ с двумя неизвестными. Пусть $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $x_3 = 3$, $y_3 = 3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $V_1 = 0.5$, $V_2 = 1.5$, $V_3 = 1$. Переобозначим неизвестные y_1 и y_2 через x и y соответственно, t – через G и построим графики зависимостей

$$G(x,y)=\frac{\sqrt{(1-0)^2+x^2}}{0.5}+\frac{\sqrt{(2-1)^2+(y-x)^2}}{1.5}+\frac{\sqrt{(3-2)^2+(3-y)^2}}{1}-P1=0$$

для разных значений $P1$. Придавая $P1$ разные значения, получим: наименьшее значение, равное 4.8, функция $z = G(x, y)$ принимает в точке $x = 0.30$, $y = 2.26$ (Рис. 16.7).

Таким образом, чтобы дойти из точки $A(0,0)$ до точки $B(3,3)$ как можно быстрее при данных условиях, путешественник должен идти сначала от точки (0,0) к точке (1, 0.30), затем к точке (2, 2.26), и дальше к точке (3, 3).

Если на каждой из прямых $x = x_i$, ($i = 1, 2$), путешественник может идти не к любой точке, а к одной из конечного множества заранее указанных точек, тогда получается задача дискретной оптимизации.

Пусть, например, на прямой $x = 1$ разрешается проходить лишь через одну из точек (1, 0), (1, 1.5), (1, 3), а на прямой $x = 2$ через одну из точек (2, 0.5), (2, 2.5). Тогда, определив с использованием услуги “Операции / Значение выражения $G(x, y)$” значение рассматриваемой функции $z = G(x, y)$ (при $P1 = 0$) в точках (0, 0.5), (1.5, 0.5), (3, 0.5), (0, 2.5), (1.5, 2.5), (3, 2.5), получим, что наиболее быстро при заданных условиях путешественник перейдет от точки $A(0,0)$ до точки $B(3,3)$, если выберет маршрут (0, 0) – (1, 0) – (2, 2.5) – (3, 3).

Другой способ – придавая параметру $P1$ разные значения, найдем, что линия наиболее низкого уровня (среди допустимых) функции $z = G(x, y)$ проходит через точку (0, 2.5) (Рис. 16.7).

Вопросы для самоконтроля

1. Как, используя услуги программы GRAN1, можно найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = f(x)$ на заданном промежутке $[a,b]$?
2. Как, используя услуги программы GRAN1, можно найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = G(x, y)$ на множестве решений неравенства вида $G_1(x, y) \le 0$?
3. Нужно ли для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции $y = f(x)$ на промежутке $[a,b]$ с использованием услуг программы GRAN1 находить корни уравнения $f'(x)=0$?
4. Как, используя услуги программы GRAN1, определить промежутки возрастания и убывания функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$?

5. Можно ли, используя услуги программы GRAN1, приближенно установить направление, в котором функция вида $z = G(x, y)$ наиболее быстро возрастает в некоторой точке (x_0, y_0)?

Упражнения для самостоятельного выполнения

1. Сумма $x + y$ двух положительных чисел x и y равна 1. Найти максимально возможное произведение этих чисел.
2. Даны две точки $A(2,4)$, $B(7,5)$. На оси Ox найти точку, сумма расстояний от которой до двух заданных точек наименьшая.
3. На ребре BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти точку, сумма расстояний которой от вершин A и C_1 наименьшая, если длина ребра куба 3.
4. В равнобедренный треугольник вписан круг радиуса 1. Найти минимальную площадь такого треугольника.
5. Среди точек с целочисленными координатами из множества решений неравенства $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1$ найти точку, в которой функция $z = G(x, y) = x + 2$ принимает наибольшее значение.
6. Найти наибольшее значение функции $z = (2 - P1)x_1 + x_2$ на множестве Ω решений системы неравенств: $-2x_1 - x_2 \ge 0$, $x_1 + x_2 - 1 \ge 0$, $3x_1 - 2x_2 + 3 \ge 0$, $-x_1 + x_2 + 4 \ge 0$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, для значений $P1 =$ 0, 1, 3, 5, 7, 9.
При тех же условиях найти целочисленные решения задачи (для каждого из заданных значений параметра $P1$).
7. Путешественник, находясь в точке (x_1, y_1), хочет достичь точки (x_2, y_2). Точки находятся по разные стороны от дороги (оси Ox), ($y_1 y_2 < 0$). По одну сторону от дороги (оси Ox) из начальной точки он может двигаться со скоростью V_1 (=3 км/час). По другую сторону он имеет возможность двигаться со скоростью V_2 (=15 км/час). К какой точке на дороге (оси Ox) он должен двигаться из начальной точки (x_1, y_1), чтобы наиболее быстро достичь точки (x_2, y_2)?
Рассмотреть случаи:
   - $x_1 = 7$, $y_1 = 2$, $x_2 = 15$, $y_2 = -4$;
   - $x_1 = 7$, $y_1 = 5$, $x_2 = 7$, $y_2 = -9$;
   - $x_1 = 10$, $y_1 = 4$, $x_2 = 2$, $y_2 = -5$.
8. Как изменяется график зависимости $x^2 + y^2 + P1xy - 2x + 7y - 1 = 0$ с изменением значений параметра $P1$? Рассмотреть значения $P1 = -5, -4, -3, \ldots, 4, 5$.
9. Решить задачу Штейнера (см. пример 4) для случаев:
$A(0,0)$, $B(4,1)$, $C(1,4)$, $D(3,3)$, $E(5,1)$;
$A(0,0)$, $B(2,5)$, $C(1,3)$, $D(3,3)$, $E(5,1)$;
$A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(1,4)$, $D(4,4)$, $E(3,2)$;
$A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(1,0)$, $D(0,2)$;

$A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(1,0)$, $D(1,1)$.

10. Найти наименьшее значение функции

$$z = G(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 2x + 7y - 1$$

и точку, в которой оно достигается, $x \in [-10,10]$, $y \in [-10,10]$.

11. Найти приближенно направление, в котором функция $z = x^2 + y^2 - xy + 2x - 5y - 2$ наиболее быстро возрастает в точке $(-1,1)$, а также определить скорость такого возрастания.

12. На плоскости xOy найти прямую, сумма расстояний от которой до заданных точек наименьшая. Для конкретных расчетов положить:

$A(0,0)$, $B(1,8)$, $C(2,12)$, $D(0,10)$;

$A(0,0)$, $B(8,1)$, $C(12,2)$, $D(10,0)$;

$A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(2,3)$, $D(3,2)$;

$A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(1,0)$, $D(1,1)$.

§17. Построение секущих и касательных к графикам функций

При необходимости построить секущую графика зависимости $y = f(x)$, которая проходит через точки $(x_0, f(x_0))$, $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, лежащие на графике зависимости $y = f(x)$, или касательную к графику в некоторой точке $(x_0, f(x_0))$, лежащей на графике, и вычислить угловой коэффициент секущей, который равен отношению приращения функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ к приращению аргумента Δx, или угловой коэффициент касательной, который равен значению производной $f'(x)$ в точке x_0, можно использовать услугу "Операции / Производная...".

При этом рассматривается зависимость, на обозначение которой установлен указатель в окне "Список объектов". После обращения к услуге "Операции / Производная..." появляется вспомогательное окно "Производная" (Рис. 17.1).

В этом окне отображается выражение, через которое определяется объект, и панель ввода данных, с помощью которой можно вводить необходимые данные. В строке "X=" нужно ввести абсциссу точки, в которой необходимо построить секущую или касательную (по умолчанию $x = 0$). В строке "Δx=" необходимо ввести приращение аргумента в данной точке (по умолчанию $\Delta x = 0.1$).

Как в выражение зависимости между переменными x и y, так и в выражения, через которые определяют точку касания x и приращение Δx, могут входить один или несколько параметров $P1$, $P2$, ... , $P9$.

Если указанная точка x лежит вне отрезка задания зависимости или зависимость в этой точке не определена, выводится соответствующее сообщение.

После ввода значений x и Δx (или только значения x) во вспомогательном окне нужно выбрать одну или обе из предлагаемых услуг (поставить соответствующие метки):

"Строить секущую" – значит построить секущую, проходящую через точки $(x, f(x))$, $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$. При этом в окне "График" строится график секущей, проходящей через указанные точки, а при обращении к услуге "Записать в "Ответы" в окне "Ответы" записываются значение абсциссы x указанной точки, значение Δx указанного приращения аргумента x, значение Δy, соответствующее указанному Δx, и значение $\Delta y / \Delta x$ углового коэффициента секущей, проходящей через указанные точки (Рис. 17.2).

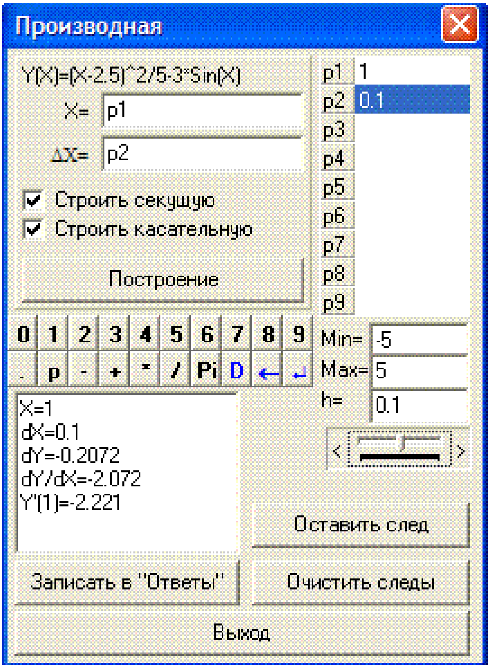


Рис. 17.1

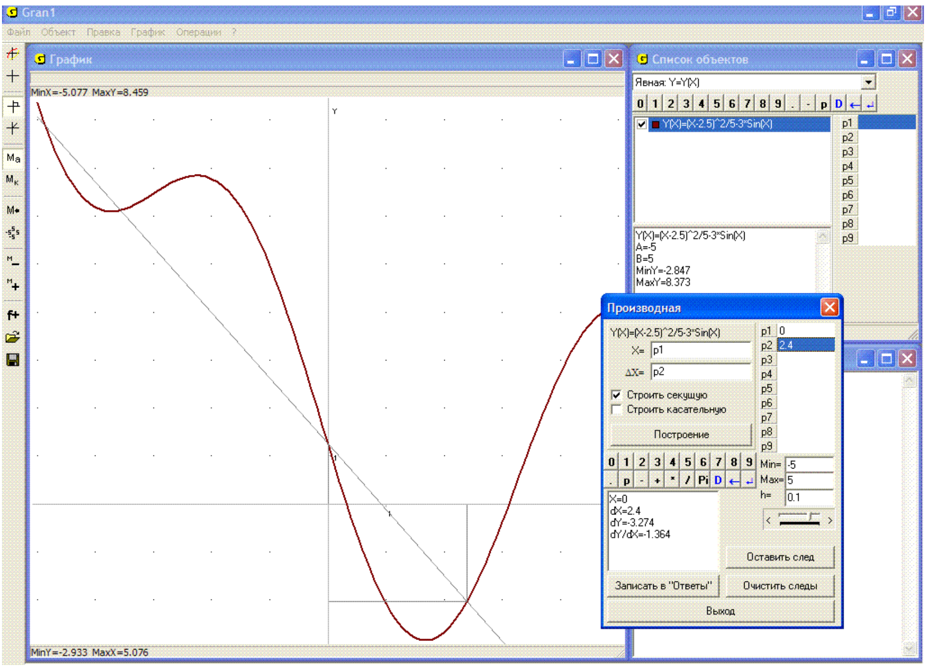


Рис. 17.2

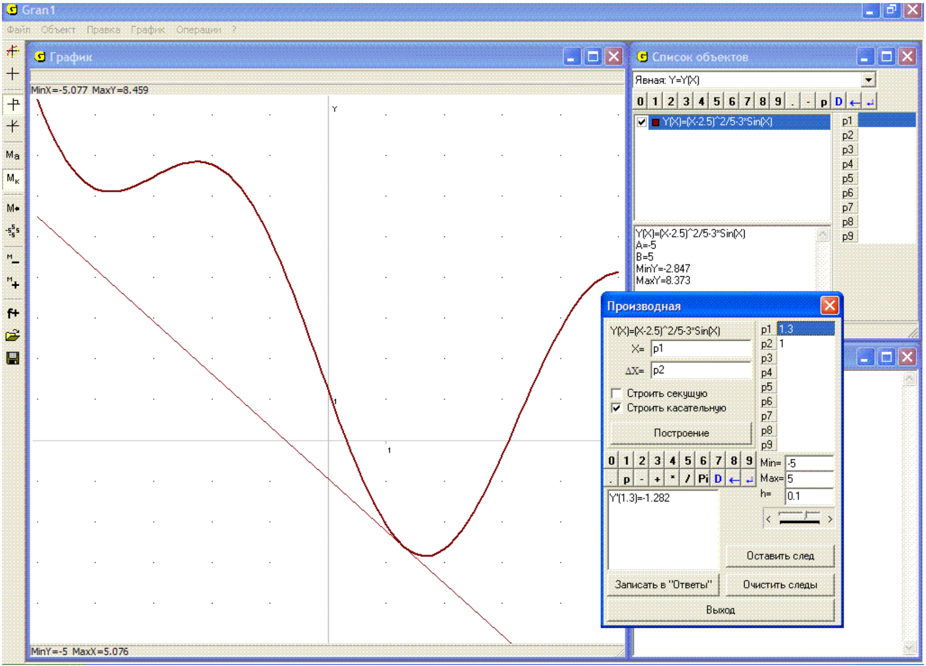


Рис. 17.3

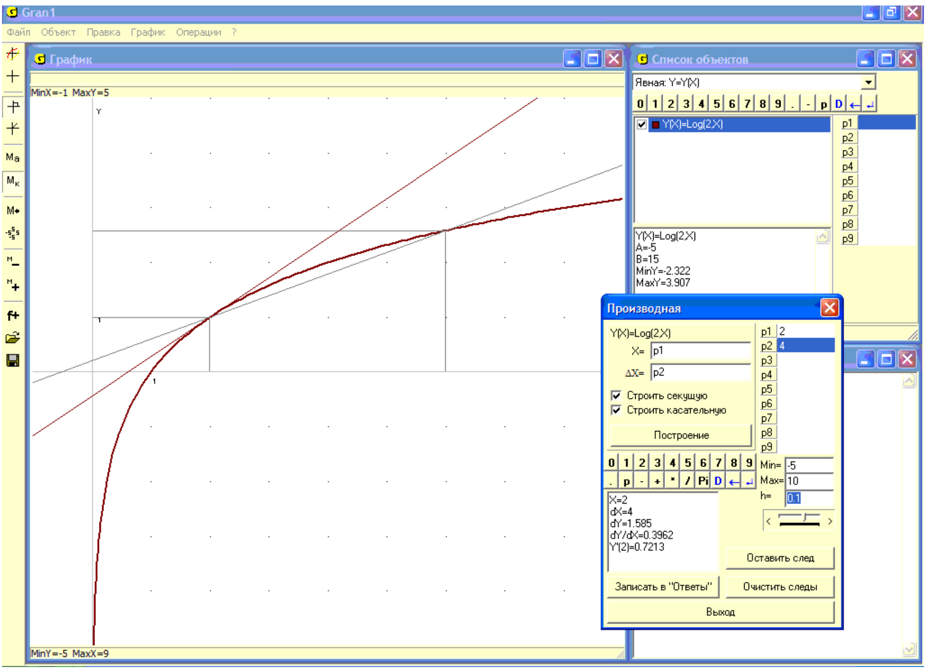


Рис. 17.4

“Строить касательную” – значит построить касательную к графику функции в указанной точке. При этом в окне “График” строится график касательной к графику избранной функции в указанной точке x, а в окне “Производная” выводится сообщение, в котором показано числовое значение производной $y'(x)$ от избранной функции в указанной точке (Рис. 17.3).

В одном окне можно строить одновременно и секущую, и касательную к графику функции (Рис. 17.4).

График функции, к которому проводится касательная или секущая, должен быть предварительно построен. В противном случае услуга “Операции / Производная…” недоступна. Поскольку операция вычисления значения приращения функции и значения производной выполняется для текущей функции, то при обращении к рассмотренной услуге текущая функция автоматически становится отмеченной. После завершения операции метка ☑ возвращается в то состояние, в котором она была перед обращением к услуге.

При изменении значений параметров, которые входят в выражение функции, выражений, через которые определяются пределы A и B изменения аргумента, точка касания x, приращение аргумента Δx, соответствующие значения dX, dY, dY/dX, $Y'(x)$ перевычисляются, а также соответствующим образом изменяются графические построения (Рис. 17.4).

Примеры

1. Найти уравнение секущей к графику функции $y = \log_2 x$, которая проходит через точки (2, $\log_2 2$), (6, $\log_2 6$), и уравнение касательной к указанному графику в точке (2, $\log_2 2$).

Используя услугу “Операции / Производная...”, установив значение параметра $P1$, через которое определяется абсцисса точки касания, равным 2, а значение параметра $P2$, через которое определяется приращение Δx аргумента, равным 4, найдем угловой коэффициент секущей $k_1 = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \approx 0.4$ и угловой коэффициент касательной $k_2 = f'(x) = 0.72$ (Рис. 17.4). Учитывая общий вид уравнения прямой, проходящей через заданную точку (x_0, y_0) и угловой коэффициент которой k: $y - y_0 = k(x - x_0)$, получим искомое уравнение секущей $y = \log_2 2 + 0.4(x-2) \approx 0.4x + 0.2$ и уравнение касательной к графику в заданной точке $y = \log_2 2 + 0.72(x-2) \approx 0.72x - 0.44$.

Если возникает необходимость выяснить, в каких пределах будет изменяться значение функции, если значение аргумента изменяется в пределах $(x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$, или, наоборот, в каких пределах будет изменяться значение аргумента x, если значение функции изменяется в пределах $(f(x_0) - \Delta y, f(x_0) + \Delta y)$, можно использовать услугу изменения масштаба изображения в окне “График”. Чтобы определить, в каких пределах изменяется значение $f(x)$, если x изменяется от $x_0 - \Delta x$ до $x_0 + \Delta_x$, достаточно установить масштаб пользователя так, чтобы в прямоугольнике, который ограничивает часть графика, было $MinX = x_0 - \Delta x$, $MaxX = x_0 + \Delta x$.

При этом нижнюю и верхнюю стороны этого прямоугольника ($MinY$ и $MaxY$) нужно подобрать так, чтобы они как можно меньше были удалены одна от другой, и в то же время внутри прямоугольника находились все точки графика зависимости $y = f(x)$ на промежутке $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$. Через ординаты точек на нижней и верхней сторонах прямоугольника и будут определяться пределы изменения функции $f(x)$ на промежутке $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$ (Рис. 17.5, где $x_0 = 5$, $\Delta x = 2$).

Эту же задачу можно решать, используя координатный курсор для определения наименьшего и наибольшего значений функции $f(x)$ на промежутке $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$.

Можно также указать пределы $x_0 - \Delta x$, $x_0 + \Delta x$ промежутка, на котором задается функция $y = f(x)$. Тогда $MinY$ и $MaxY$ на отмеченном промежутке $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$ по программе определяются автоматически.

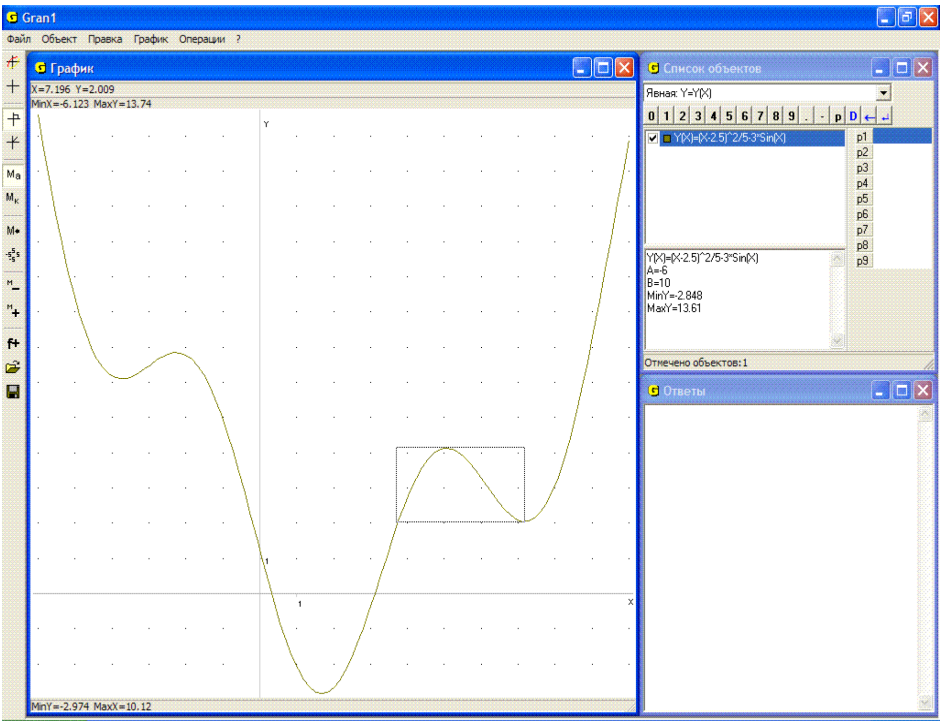


Рис. 17.5

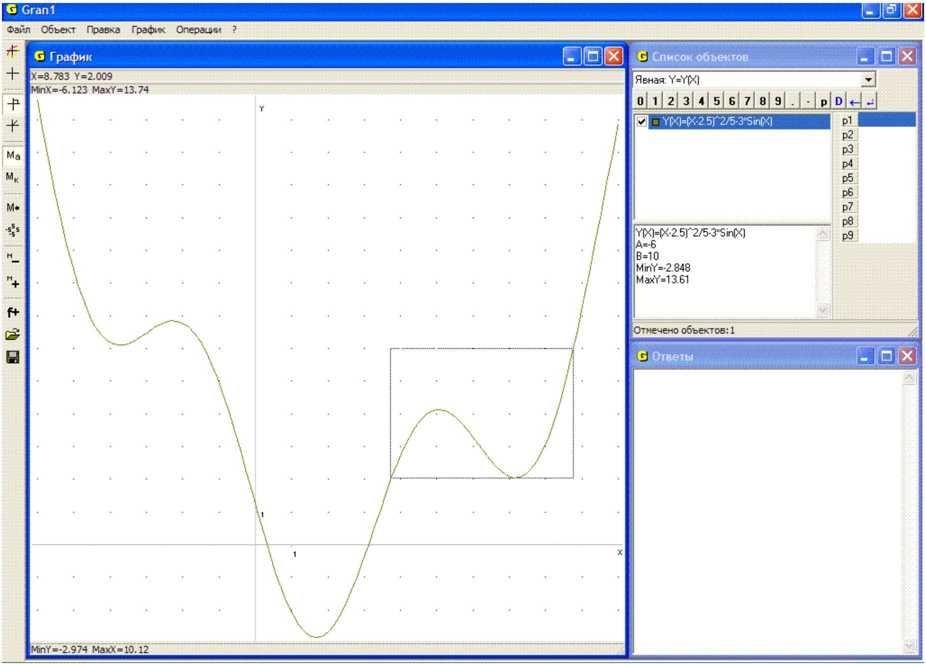


Рис. 17.6

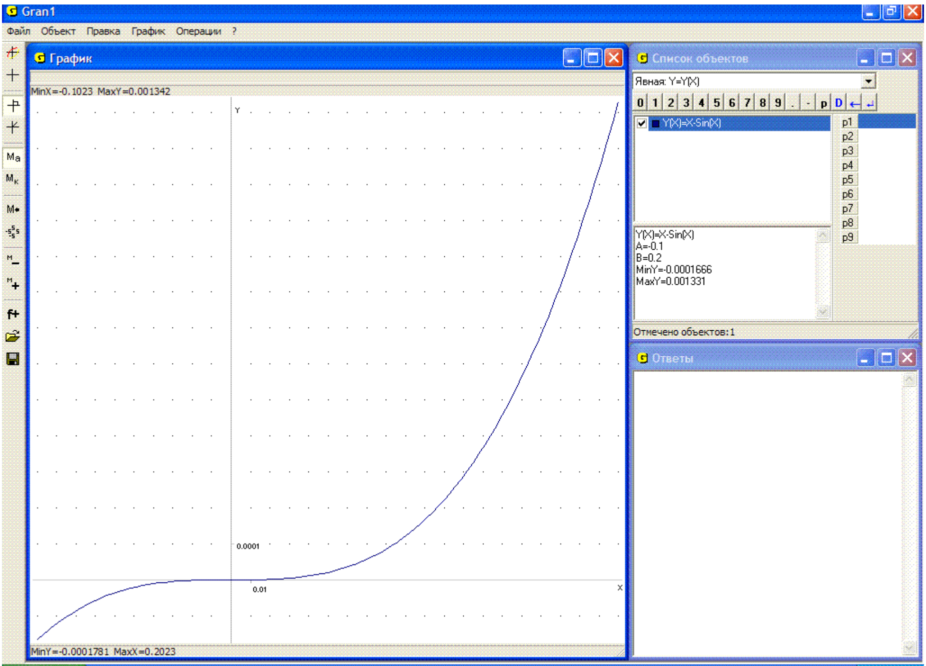


Рис. 17.7

Аналогично определяются пределы изменения аргумента x в окрестности точки x_0 при условии, что значение функции $y = f(x)$ изменяется в пределах $[f(x_0) - \Delta y, f(x_0) + \Delta y]$ (Рис. 17.6, где $y_0 = f(x_0) = 4$, $\Delta y = 2$).

Другой способ – построить графики зависимостей $y = f(x)$, $y = f(x_0) - \Delta y$, $y = f(x_0) + \Delta y$ и установить наиболее длинный промежуток $[x_1, x_2]$, в котором находится точка x_0 и в точках которого значения $f(x)$ не выходят за пределы $f(x_0) - \Delta y$, $f(x_0) + \Delta y$ (график зависимости $y = f(x)$ не выходит за прямые $y = f(x_0) - \Delta y$, $y = f(x_0) + \Delta y$).

Подобные задачи возникают в частности в теории погрешностей приближенных вычислений и во многих других случаях.

2. Найти пределы, в которых изменяются значения функции $y = f(x) = x - \sin(x)$, если аргумент x изменяется в пределах $[-0.1, 0.2]$.

Построив график зависимости $y = x - \sin(x)$ на промежутке $[-0.1, 0.2]$, легко видеть, что значения $f(x) = x - \sin(x)$ на отмеченном промежутке изменяются в пределах $[-0.00017, 0.0013]$ (Рис. 17.7).

Таким образом, если значение функции $y = \sin(x)$ заменить значением аргумента x, то погрешность такой замены по абсолютной величине не превысит 0.00017, если значения аргумента функции $y = \sin(x)$ будут находиться в пределах от -0.1 до 0.1, и не превысит 0.0013, если значения аргумента функции $y = \sin(x)$ будут находиться в пределах $[-0.2, 0.2]$.

Вопросы для самоконтроля

1. Как, используя услуги программы GRAN1, построить касательную к графику функции $y = f(x)$ в заданной точке $(x_0, f(x_0))$?
2. Как, используя услуги программы GRAN1, определить угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$?
3. Как с помощью графических построений на графике зависимости $y = f(x)$ определить точку, в которой касательная к графику параллельна хорде, проходящей через точки $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ (считается, что в любой точке промежутка $[x_1, x_2]$ функция $f(x)$ дифференцируема)?
4. Может ли касательная (если она существует) к графику выпуклой вниз функции пересекать график такой функции в некоторой точке, не являющейся точкой касания?
5. Пусть $y = f(x)$ выпуклая вниз функция, определенная на промежутке $[a, b]$; $y = f_1(x) = kx + c$ – уравнение некоторой прямой, на графике которой есть не больше одной общей точки с графиком зависимости

$y = f(x)$. Может ли быть $f(x_0) < f_1(x_0)$ хотя бы для одного $x_0 \in [a,b]$?

Упражнения для самостоятельного выполнения

1. При каких значениях аргумента x значение функции $y = \cos x$ можно заменить значением функции $y = 1 - x^2$ с погрешностью, не превышающей 0.01?
2. Найти уравнение касательной к графику функции $y = \log_2 x - \cos\frac{x}{20}$ в точке с абсциссой $x_0 = 5$.
3. Найти уравнение прямой, которая проходит через точки $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, где $f(x) = 2^x + \frac{1}{7}\sin\frac{x}{23}$, $x_1 = 1.5$, $x_2 = 7.5$.
4. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $(2, f(2))$, $(4, f(4))$ где $f(x) = \left|x^2 - 3x + 2\right|$.
5. Выяснить, при каких x значение $\sin x$ можно заменить значением x с погрешностью, не превышающей 0.1; 0.01; 0.00001.
6. Выяснить, при каких x значение $\cos x$ можно заменить значением $1 - \frac{x^2}{2}$ с погрешностью, не превышающей 0.00001; 0.0001; 0.001; 0.01; 0.1.

§18. Вычисление определенных интегралов

Для вычисления определенных интегралов вида $\int_a^b f(x)dx$ можно использовать услугу “Операции / Интегралы / Интеграл...” (Рис. 18.1).

Эта услуга предназначена для вычисления определенных интегралов от функций, заданных явно в виде $y = f(x)$, полиномов, которыми приближаются таблично заданные функции, плотностей распределения статистических вероятностей (графиками которых являются гистограммы). Интеграл вычисляется для отмеченной функции, обозначение которой в окне “Список объектов” отмечено меткой ☑. Если таких объектов нет, то интеграл вычисляется для текущей функции (на обозначение которой установлен указатель объектов).

Если отмечено несколько функций, то значения интегралов, найденных для каждой отдельной функции, суммируются. Последнее дает возможность вычислять интегралы для функций, заданных разными выражениями на разных отрезках. Если указаны пределы интегрирования, которые выходят за отрезок, на котором задана функция, то интеграл вычисляется на части отрезка, общей для двух заданных. Например, если функция задана на отрезке [-5, 5], а пределы интегрирования указаны [0, 10], то значение интеграла будет вычислено на отрезке [0, 5].

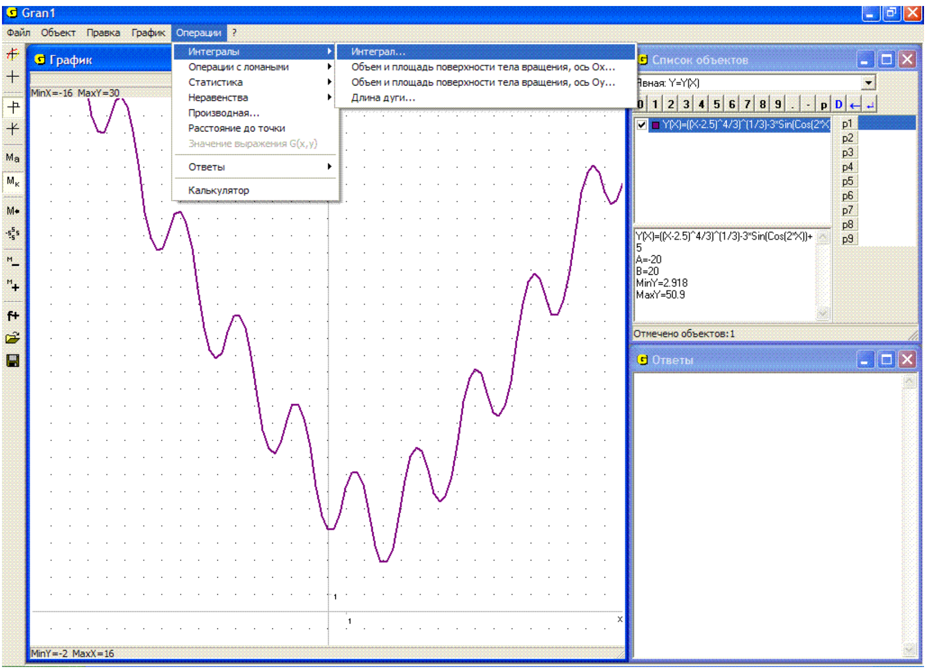


Рис. 18.1

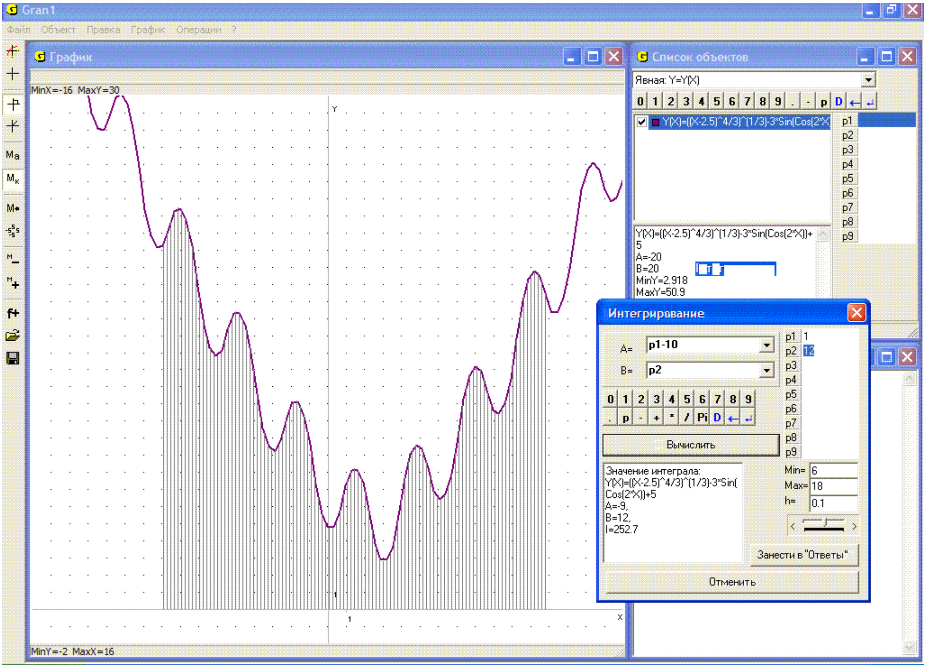


Рис. 18.2

После обращения к услуге “Операции / Интегралы / Интеграл...” появляется вспомогательное окно “Интегрирование”, в котором нужно ввести значение “A=” – левого предела отрезка интегрирования и значение “B=” – правого предела отрезка интегрирования (Рис. 18.2).

При этом как в подинтегральное выражение, так и в выражения пределов интегрирования могут входить некоторые из параметров $P1$, $P2$, …, $P9$ (Рис. 18.2).

После выполнения услуги и обращения к пункту “*Занести в “Ответы”*” в окне “Ответы” появится выражение функции, для которой проводилось вычисление интеграла, указанные пределы интегрирования, а также найденное значение определенного интеграла I .

Если при этом в окне “Графики” был построен график функции, интеграл от которой вычисляется, то область, ограниченная графиком функции, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$, заштриховывается (Рис. 18.2).

Примеры

1. Пусть необходимо вычислить площадь, ограниченную линиями $x = -3$, $x = 3$, $y = 0$, $y = \log_2(x + 3.7) + \frac{1}{3}\sin(2x^2) + 2,$ то есть определенный интеграл

$$I = \int_{-3}^{3} (\log_2(x + 3.7) + \frac{1}{3}\sin(2x^2) + 2)dx\,.$$

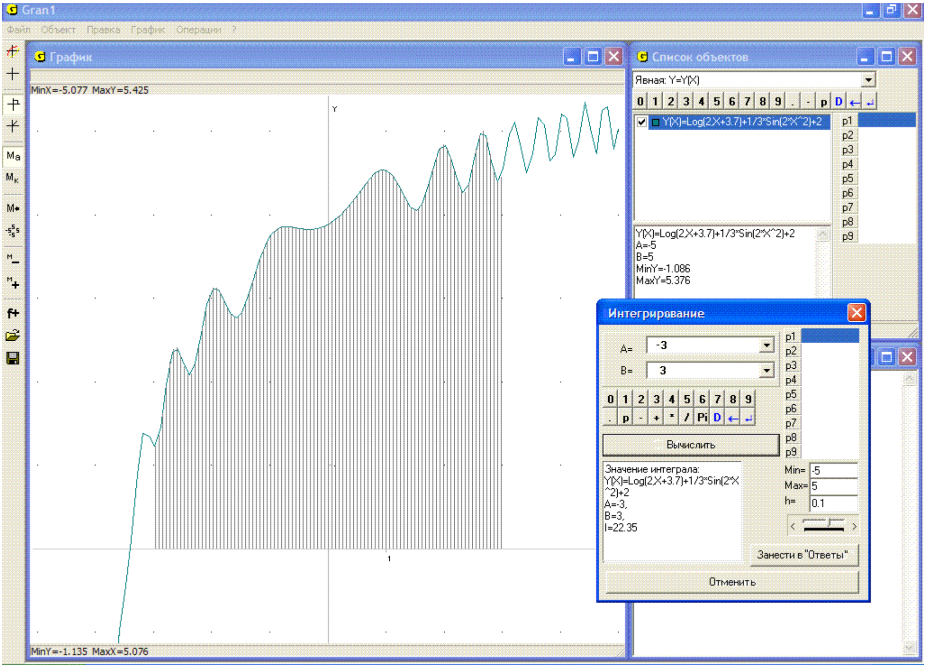


Рис. 18.3

Построив график функции $y = \log_2(x+3.7) + \dfrac{1}{3}\sin(2x^2) + 2$ на промежутке [-5, 5], обратимся к услуге “Операции / Интегралы / Интеграл...” и в ответ на соответствующие запросы введем левый предел интегрирования $a = -3$ и правый предел интегрирования $b = 3$. В результате получим $I \approx 22.35$ (Рис. 18.3).

Заметим, что точно рассмотренный интеграл вычислить невозможно, поскольку не существует в конечных выражениях первообразная к данной подинтегральной функции, поэтому в любом случае для вычисления подобных интегралов приходится применять те или иные приближены методы.

2. Вычислить $\int\limits_{-3}^{4} f(x)dx$, где

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{|x|}, & \text{когда} \quad x \le -2, \\ 3 - |x|, & \text{когда} \ -2 \le x \le 1, \\ 2 + \log_2 x, & \text{когда} \quad 1 \le x. \end{cases}$$

Построим график заданной функции на промежутке $[-5, 5]$ (на промежутке $[-5, -2]$ – график функции $y = 2 / abs(x)$, на промежутке $[-2, 1]$ – $y = 3 - abs(x)$, на промежутке $[1, 5]$ – $y = 2 + \log(2, x)$) и обратимся к услуге “Интеграл” пункта “Интегралы”. Введя пределы интегрирования $a = -3$, $b = 4$, в результате получим значение интеграла (Рис. 18.4):

$$I = \int_{-3}^{4} f(x)dx = \int_{-3}^{-2} \frac{2}{|x|} dx + \int_{-2}^{1} (3 - |x|)dx + \int_{1}^{4} (2 + \log_2 x)dx \approx 16.98 .$$

Приближенное значение определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ можно получить также как площадь многоугольника, ограниченного замкнутой ломаной с вершинами $(a, 0)$, $(a, f(a))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, ..., $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$, $(x_n, f(x_n))$, $(b, f(b))$, $(b, 0)$, где вершины $(x_i, f(x_i))$ и их количество выдбирают так, чтобы на отрезке $[a, b]$ ломаная линия была возможно ближе к кривой $y = f(x)$.

3. Пусть необходимо вычислить приближенно площадь криволинейной трапеции между параболой $y = 3 - \frac{x^2}{5}$ и прямыми $x = 0$, $y = 0$.

Обратившись к услуге “Операции / Интегралы / Интеграл...” и указав пределы интегрирования $a = 0$, $b = 3.87$, для данной функции получим $I = 7.746$ (Рис. 18.5).

Построив кроме того замкнутую ломаную с вершинами (0, 0), (0, 3), (0.1, 3.00), (0.2, 2.99), (0.3, 2.98), (0.4, 2.97), (0.5, 2.95), ... , (3.7, 0.26), (3.8, 0.11), (3.87, 0) и обращаясь к услуге “Операции / Операции с ломаными / Площадь многоугольника”, получим $S = 7.744$ (Рис. 18.6).

Заметим, что вершины ломаной могут быть введены с клавиатуры, из заранее заготовленной таблицы в файле, с экрана. При этом расстояния между вершинами ломаной могут быть разными с учетом (визуально) кривизны линии на разных ее участках, наличия изломов и т.п.

Следует иметь в виду, что подинтегральные функции при использовании услуги “Операции / Интегралы / Интеграл...” должны быть ограниченные. Для приближенного вычисления несобственных интегралов вида $\int_a^b f(x)dx,$ где у функции $y = f(x)$ на промежутке $[a, b]$ есть точка разрыва (второго рода) такая, что при $x \to x_0$ $f(x) \to \infty$ (или $f(x) \to -\infty$), можно использовать услуги программы, вычисляя интегралы $\int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x)dx$ и $\int_{x_0 + \varepsilon}^{b} f(x)dx,$ где $\varepsilon > 0$ достаточно малое.

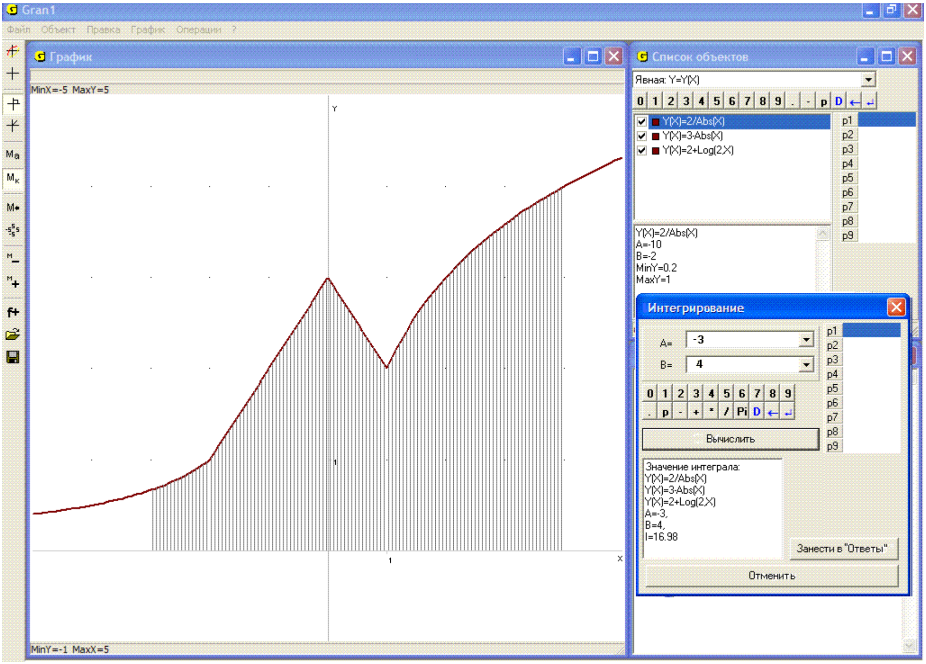


Рис. 18.4

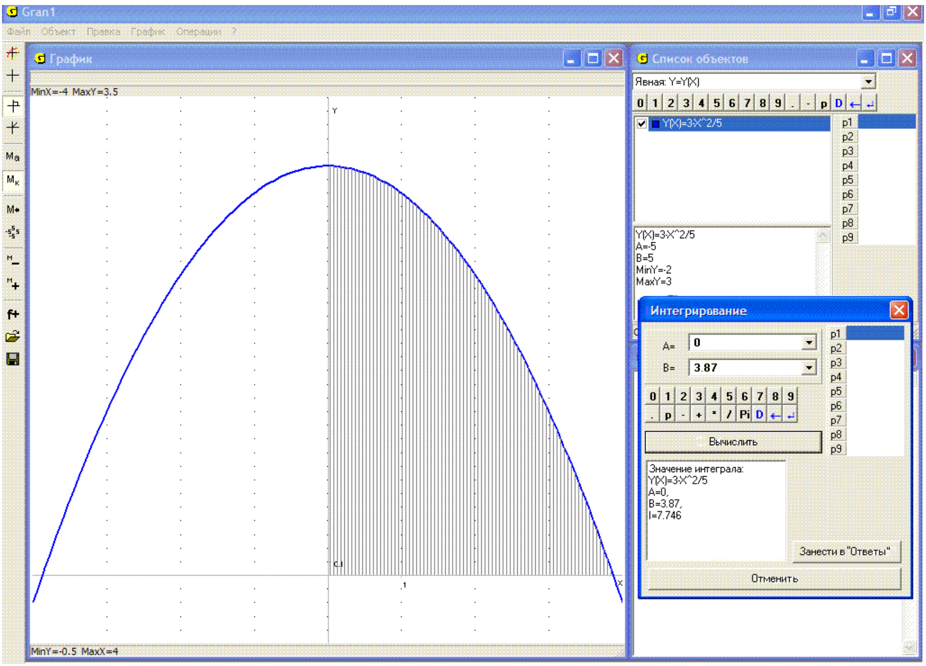


Рис. 18.5

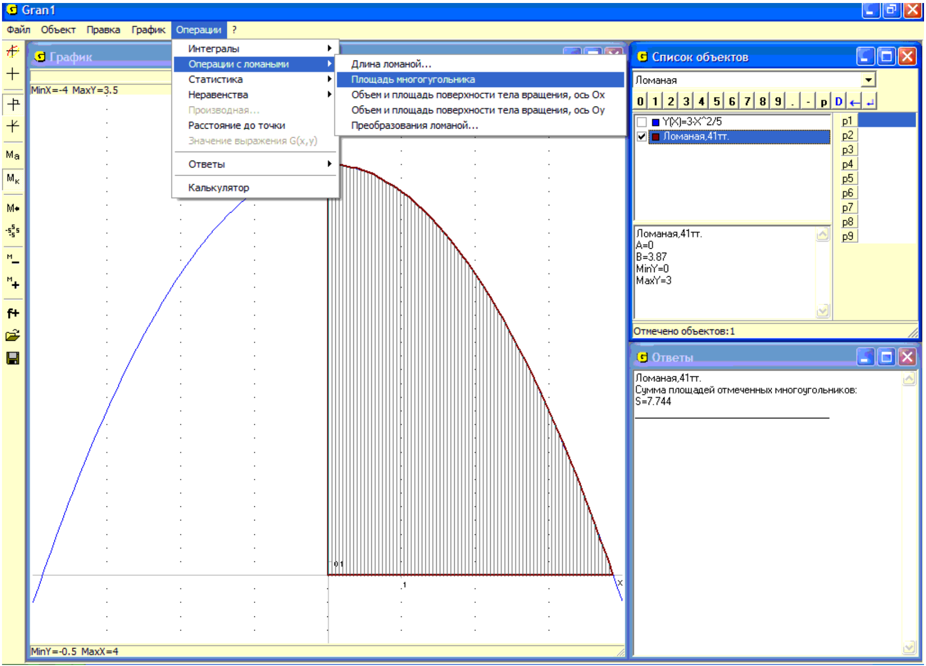


Рис. 18.6

Если интеграл сходится, то при постепенном уменьшении ε получаемые значения все меньше и меньше будут отличаться между собой и после получения определенного количества стабильных цифр можно будет прекратить вычисления. Здесь однако может понадобиться дополнительный анализ сходимости интеграла и т.п.

Аналогично для приближенного вычисления главного значения несобственного интеграла вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ можно вычислять $\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx$, постепенно увеличивая A до стабилизации определенного количества цифр (если такая наступит). Здесь также могут понадобиться дополнительные аналитические исследования сходимости интеграла и т.п.

4. Вычислить приближенно интеграл $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

Построив график функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ на промежутке $[-6, 6]$ и указав пределы интегрирования нижний $0-P1$, верхний $P1$ (Рис. 18.7), вычислим интегралы $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$, $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx$, $\int\limits_{-3}^{3} f(x)dx$, $\int\limits_{-4}^{4} f(x)dx$, $\int\limits_{-5}^{5} f(x)dx$,

$\int_{-6}^{6} f(x)dx$. В результате получим, что для данной функции интегралы на, [-3,3], [-4,4], [-5,5], [-6,6] практически не отличаются между собой и с достаточно большой точностью равны 1.

Этот результат специальными приемами можно получить и аналитически (хотя для функции $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ первообразная в точных выражениях не существует).

Можно показать, что $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$. Этот интеграл имеет специальное название – интеграл Эйлера-Пуассона. Для вычисления значений функции $y = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, которую называют функцией Лапласа, построены специальные таблицы ее значений.

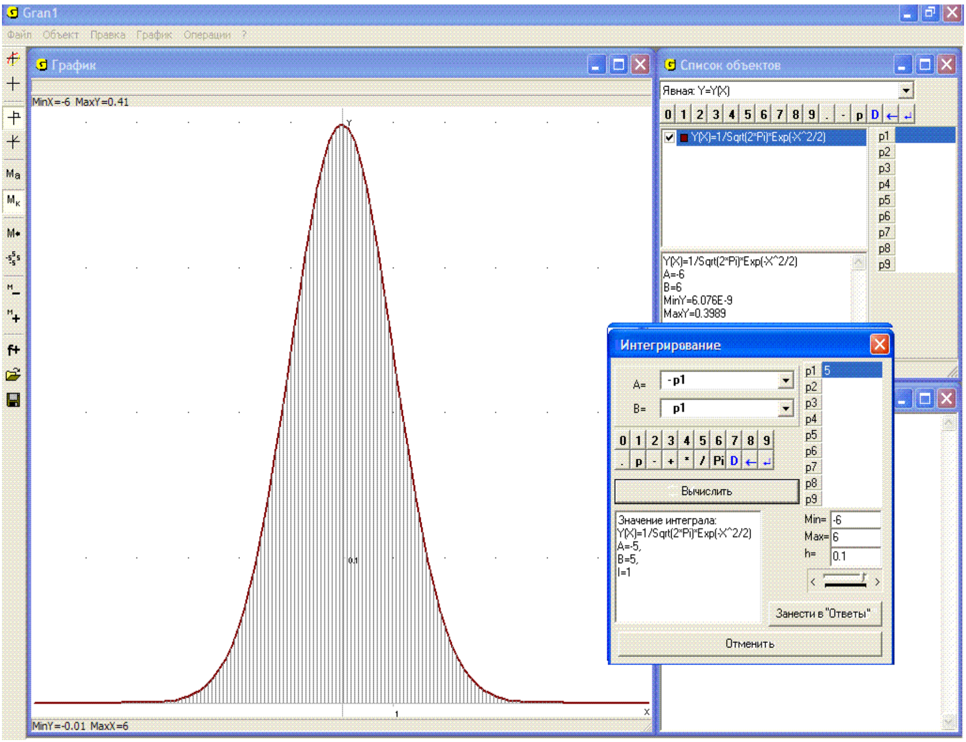


Рис. 18.7

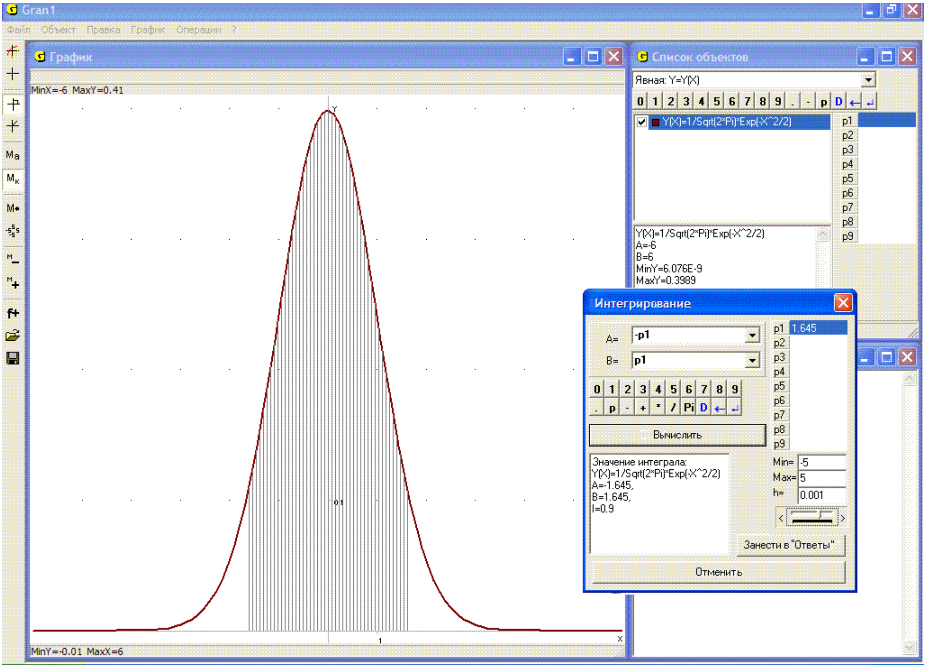


Рис. 18.8

При необходимости решить относительно $P1$ уравнение вида $\int\limits_{0}^{P1} f(x)dx = c$ или $\int\limits_{-P1}^{P1} f(x)dx = c$ и т. п., где c – некоторое число, можно воспользоваться услугой “Операции / Интегралы / Интеграл...”, задавая пределы интегрирования через выражения, в которые входит параметр $P1$, и затем, установив некоторые пределы изменения и шаг h изменения параметра $P1$, подобрать значение параметра $P1$ так, чтобы равенство $\int\limits_{0}^{P1} f(x)dx = c$ или $\int\limits_{-P1}^{P1} f(x)dx = c$ выполнялись как можно точнее.

5. Найти значение $P1$ такое, при котором будет иметь место равенство $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-P1}^{P1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.9$.

Введя выражение подинтегральной функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ и обратившись к услуге “Операции / Интегралы / Интеграл...”, указав пределы интегрирования $-P1$, $P1$ и изменяя при необходимости шаг h изменения параметра $P1$, подбирая $P1$ так, чтобы как можно точнее выполнялось равенство $\int_{-P1}^{P1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.9$, найдем, что такое равенство выполняется, когда $P1 = 1.645$ (Рис. 18.8).

Указанные интегралы имеют широкие приложения в теории вероятностей и математической статистике.

Услуга "Операции /Интегралы /Суммы Дарбу" предназначена для вычисления верхних и нижних сумм Дарбу при заданном делении промежутка $[a,b)$, на котором вычисляется интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, на интервалы $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1, k}$ (Рис. 18.9).

Измельчая интервалы $[a_{i-1}, a_i)$, за счет увеличения значения одного из параметров P1, P2, ... , P9, через которое задается количество интервалов $[a_{i-1}, a_i)$ (Рис. 18.10), можно наблюдать, как изменяются верхняя и нижняя суммы Дабру, которыми оограничивается сверху и снизу искомое значение интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$:

$$\sum_{i=1}^{k} \min_{x \in [a_{i-1}, a_i)} f(x)(a_i - a_{i-1}) \le \int_a^b f(x)dx \le \sum_{i=1}^{k} \max_{x \in [a_{i-1}, a_i)} f(x)(a_i - a_{i-1}).$$

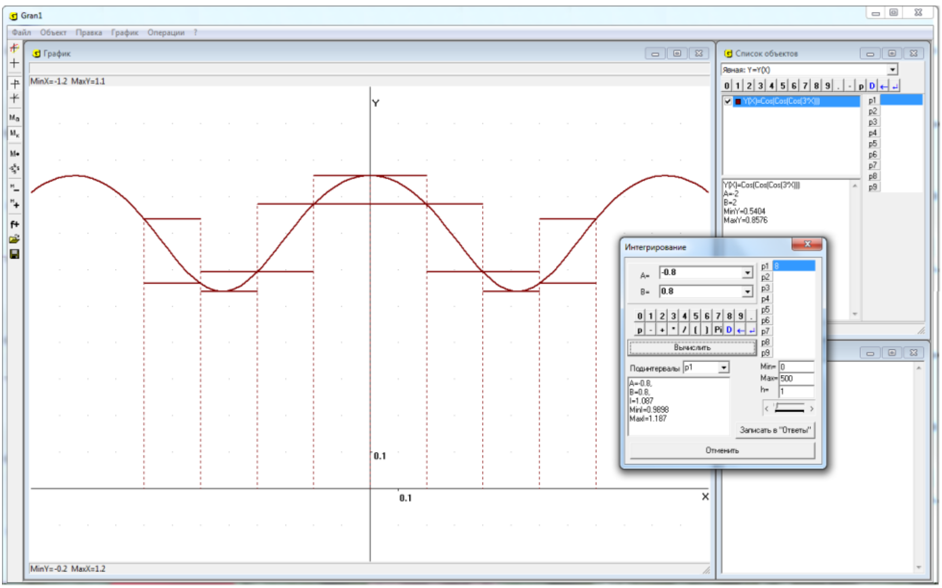


Рис. 18.9

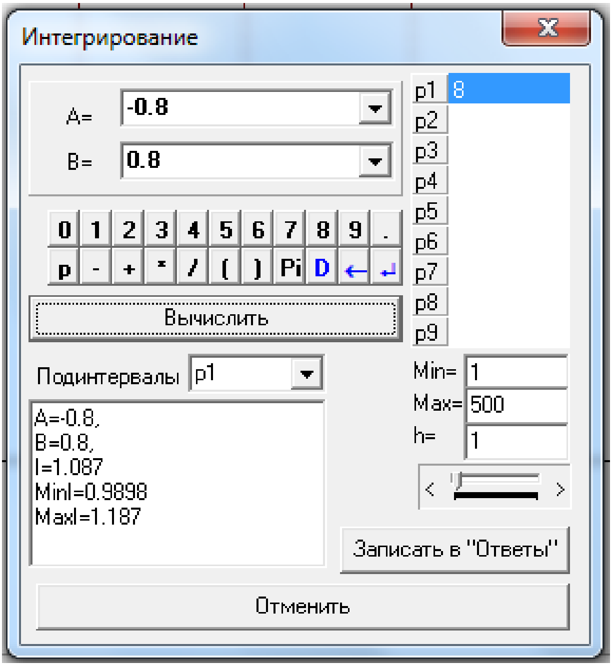


Рис. 18.10

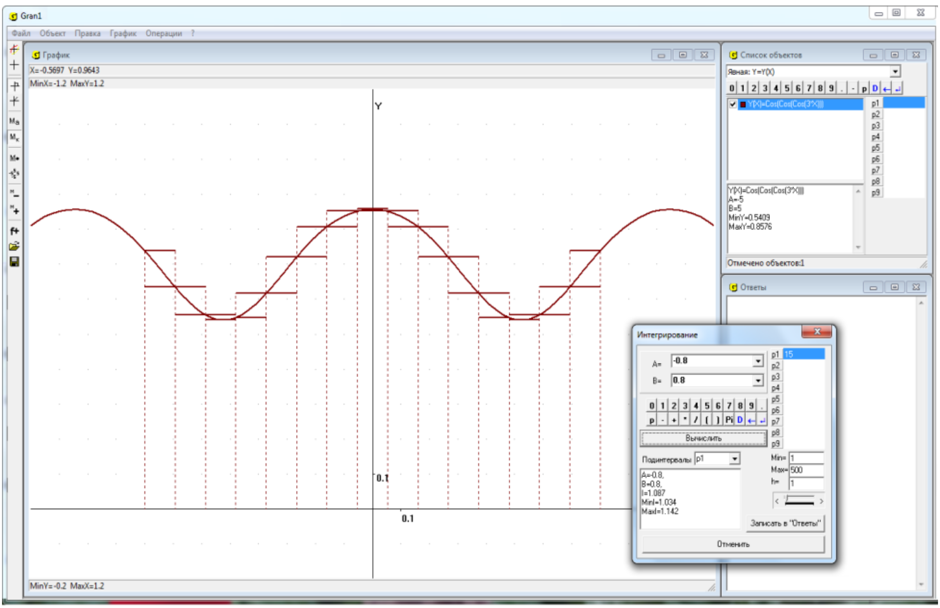


Рис. 18.11

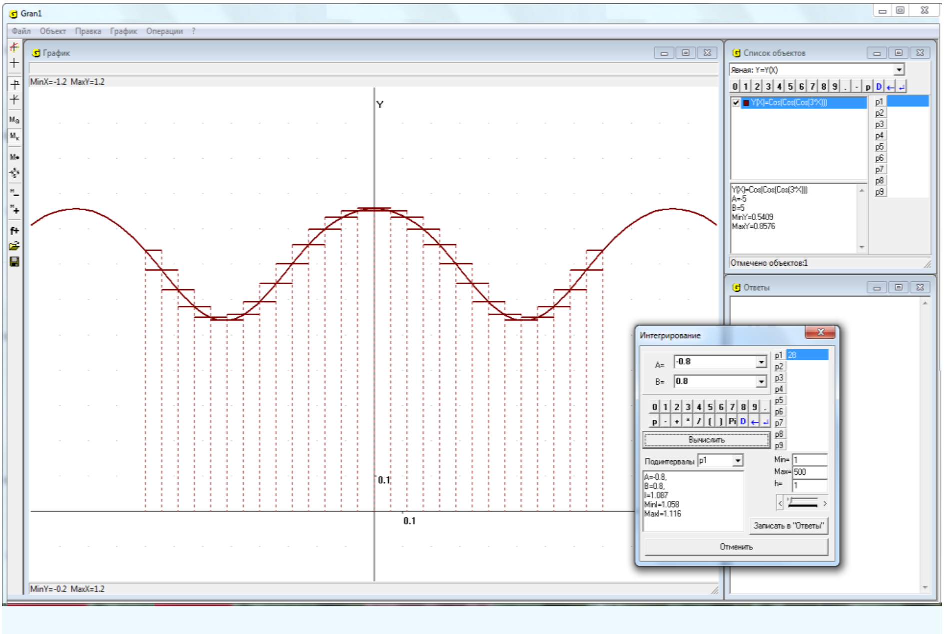


Рис. 18.12

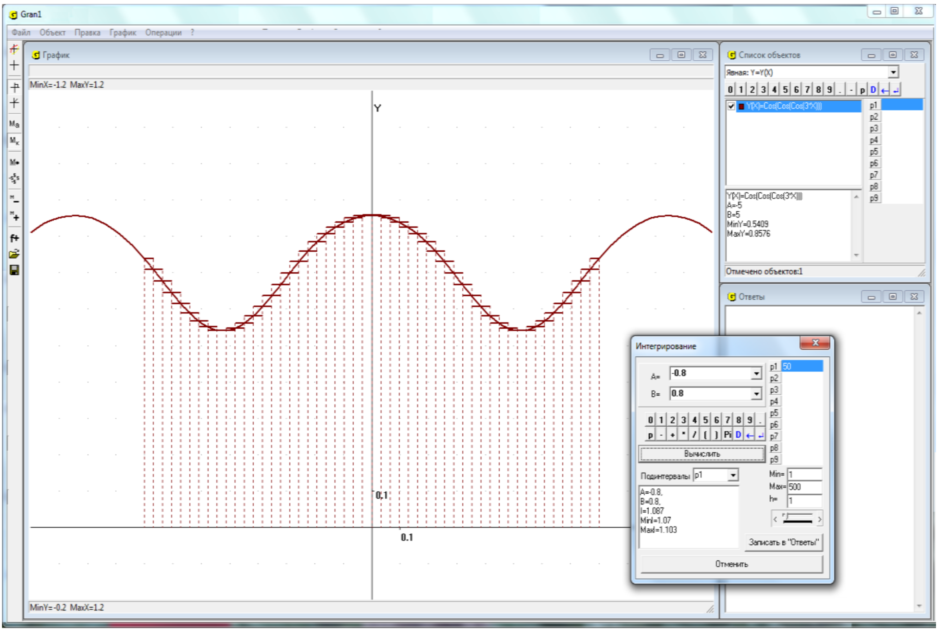


Рис. 18.13

Чтобы указать имя параметра, через значение которого определяется количество k интервалов $[a_{i-1}, a_i)$, нужно в строку “Подинтервалы” ввести одно из обозначений $P1$, $P2$, ... , $P9$, затем на соответствующей строке установить курсор “мышки” и ввести начальное значение параметра (строка окрашивается в голубой цвет). Кроме того в строки “Min=”, “Max=”, “h=” (Рис. 18.10) нужно ввести наименьшее и наибольшее значение параметра, а также шаг его изменения h (в рассматриваем случае все числа должны быть целые).

Чтобы изменить значение параметра, нужно смещать ползунок (под надписью h= ...) вправо или влево. Как видно из Рис. 18.11, Рис. 18.12, Рис. 18.13, с измельчением интервалов $[a_{i-1}, a_i)$ нижняя сумма Дарбу не уменьшается, а верхняя сумма Дарбу не увеличивется и все меньше и меньше отличаются между собой, когда количество интервалов $[a_{i-1}, a_i)$ увеличивается.

В программе GRAN1 предусмотрено, что длины всех интервалов $[a_{i-1}, a_i)$ однаковы: $a_i - a_{i-1} = h$, $i \in \overline{1, k}$. Когда k увеличивать (изменяя значение соответствующего параметра (Рис. 18.10), длины интервалов $[a_{i-1}, a_i)$ соответствующим образом изменяются.

Следует заметить, что для того, чтобы количество интервалов $[a_{i-1}, a_i)$ было целым, нужно, чтобы шаг изменения соответствующего параметра был целым (Рис. 18.10).

Услуга “Операции /Интегралы /Суммы Дарбу” может быть использована во время изучения понятия определенного интеграла в курсе “Алгебра и начала анализа”.

Услуга “Операции /Интегралы /Усреднение по интервалам” предназначена для построения кусочно-постоянной функции на промежутке $[a, b)$, $\tilde{f}(x) = c_i$, когда $x \in [a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1, k}$, $\bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i) = [a, b)$, такой, что $\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)dx = \int_{a_{i-1}}^{a_i} \tilde{f}(x)dx = c_i(a_i - a_{i-1})$, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \tilde{f}(x)dx = \sum_{i=1}^{k} c_i(a_i - a_{i-1})$ (Рис. 18.14).

Как видно из Рис. 18.14, Рис. 18.15, Рис. 18.16, с измельчением интервалов $[a_{i-1}, a_i)$ разность между функциями $f(x)$ и $\tilde{f}(x)$ уменшается и $\max|f(x) - \tilde{f}(x)| \to 0$, когда $h = a_i - a_{i-1} \to 0$.

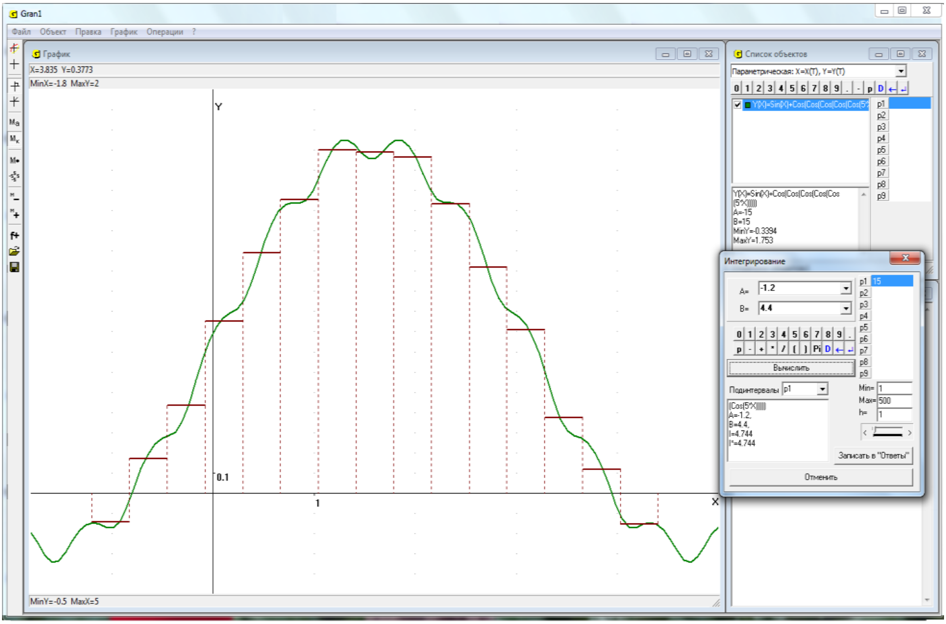


Рис. 18.14

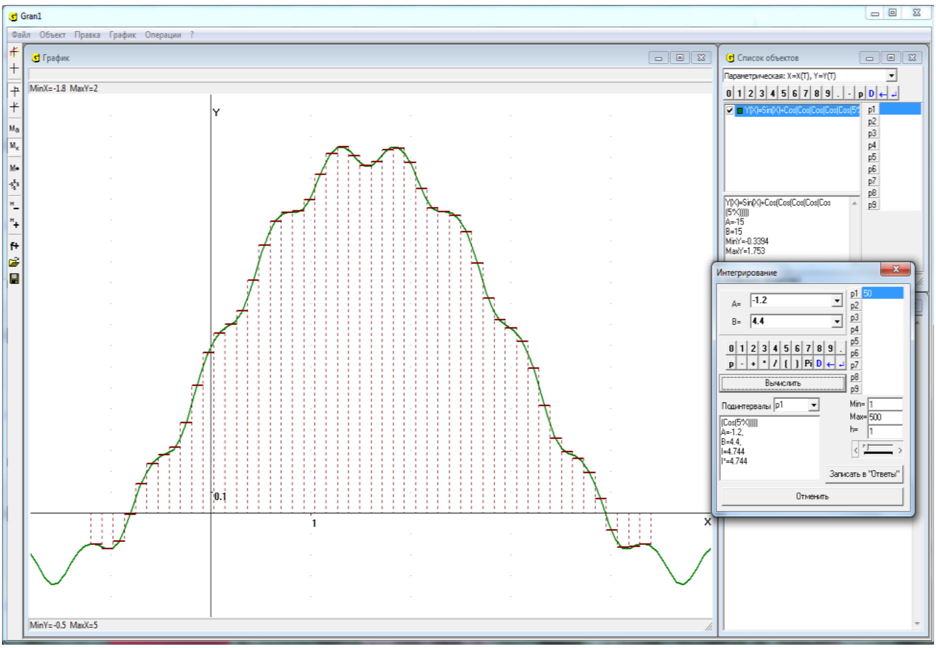


Рис. 18.15

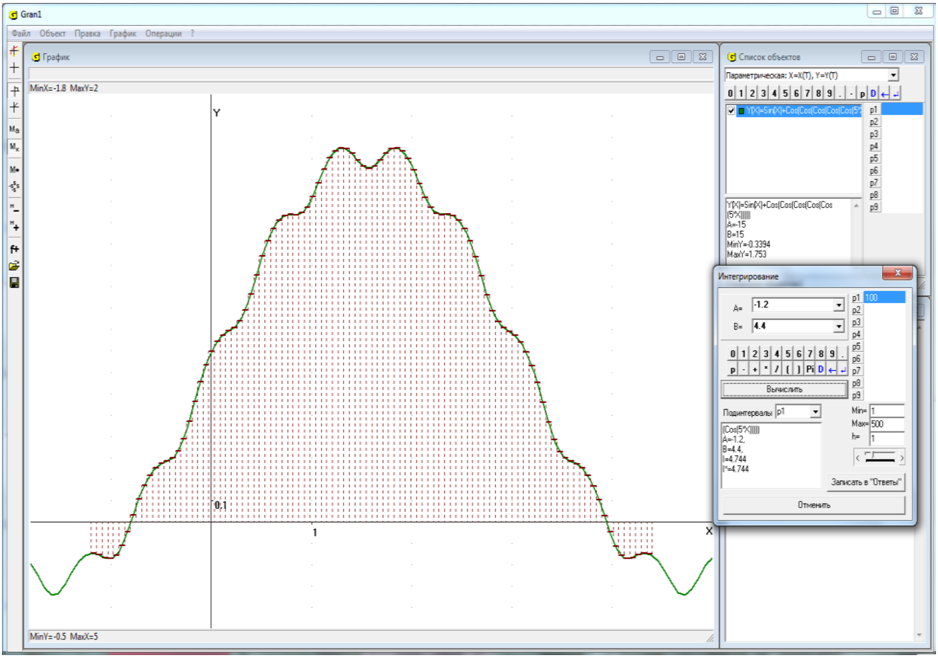


Рис. 18.16

Вопросы для самоконтроля

1. Как, используя услуги программы GRAN1, можно найти приближенное значение определенного интеграла вида $\int_a^b f(x)dx$?
2. Какое значение при обращении к услуге “Операции / Интегралы / Интеграл...” программы GRAN1 будет вычислено, если в окне “Список объектов” отмечены обозначения нескольких функций?
3. Обязательно ли строить график функции $y = f(x)$ перед тем, как обращаться к услуге “Операции / Интегралы / Интеграл...” для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$?
4. Какие графические построения дополнительно выполняются по программе GRAN1, если перед обращением к услуге “Операции / Интегралы / Интеграл...” построен график функции $y = f(x)$?
5. Как можно найти приближенное значение определенного интеграла, используя услугу “Операции / Операции с ломаными / Площадь многоугольника”?
6. Можно ли, зная значение определенного интеграла от некоторой функции $y = f(x)$, найти пределы ее интегрирования?

7. Как можно найти приближенное значение определенного интеграла, используя услугу “Операции /Интегралы /Суммы Дарбу”?

Упражнения для самостоятельного выполнения

1. Используя услугу “Операции / Интегралы / Интеграл...” программы GRAN1, вычислить определенные интегралы:

   - $\int_{1}^{5} x dx$;
   - $\int_{-1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$;
   - $\int_{0}^{4} x^2 dx$;
   - $\int_{0.1}^{7.2} \log_2 \sqrt{x^3/7+x+3} dx$;
   - $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) dx$;
   - $\int_{-3}^{3} (2+\cos(x^2)+\log_2(2|x|+|\sin(x)|+3)) dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями:

   - $y = x^2$, $y = \frac{x}{2}+5$;
   - $y = 7 - x^2$, $y = 0$;
   - $y = \frac{1}{x}$, $y = 5 - x$.

3. Определить пределы интегрирования $a = -P1$, $b = P1$ так, чтобы выполнялись равенства:

   - $\int_{-P1}^{P1} (5 - x^2/7) dx = 21$;
   - $\int_{-P1}^{P1} 3\cos x dx = 4$, $P1 \in (0, \pi/2)$;
   - $\int_{-P1}^{P1} (\frac{1}{3}(x-2.5)^{1/3} - 3\sin(\cos(2x)) + 4) dx = 20$;
   - $\int_{-P1}^{P1} (\log_2(|x|+3.7) + \frac{1}{3}\sin(2x^2)) dx = 15$.

§19. Вычисление длины дуги кривой

Длина дуги некоторой кривой в пределах от точки $A(x_1, y_1)$ до точки $B(x_2, y_2)$ может быть вычислена по формуле

$$L = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Если кривая задана через уравнение вида $y = f(x)$ (причем $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$), тогда формула принимает вид:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Если кривая задана через уравнения $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, тогда

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\phi'(t))^2}\, dt.$$

Если кривая задана в полярных координатах через уравнение вида $r = \rho(\varphi)$, тогда:

$$x = \rho(\varphi)\cos\varphi,\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi,\ dx = \left(\rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi\right)d\varphi,$$

$$dy = \left(\rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi\right)d\varphi,\ dx^2 + dy^2 = (\rho'^2(\varphi) + \rho^2(\varphi))\left(d\varphi\right)^2,$$

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho'^2(\varphi) + \rho^2(\varphi)}\, d\varphi.$$

Примеры

1. Вычислить длину дуги параболы $y = x^2$ от точки (0, 0) до точки (3, 9).

В данном примере задача сводится к вычислению интеграла $\int_0^3 \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx$.

Используя услугу “Операции / Интегралы / Интеграл...”, получим (Рис. 19.1, Рис. 19.2)

$$\int_0^3 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx \approx 9.747.$$

2. Вычислить длину дуги циклоиды $x(t) = 2(t - \sin t)$, $y(t) = 2(1 - \cos t)$ в пределах изменения параметра t от 0 до 2.

В данном случае длина дуги может быть вычислена по формуле

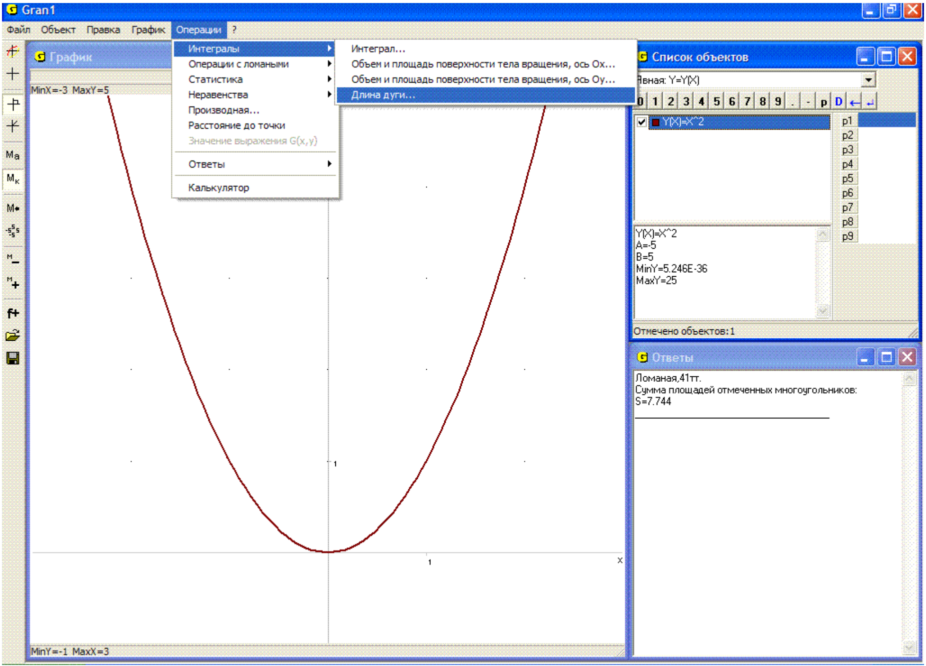


Рис. 19.1

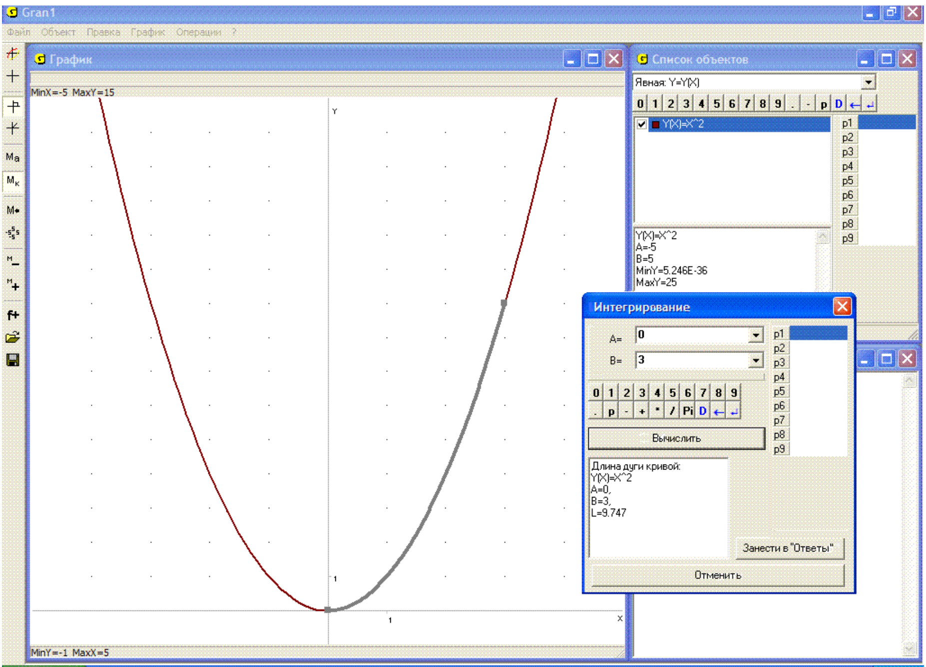


Рис. 19.2

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.$$

Для конкретных данных рассмотренного примера получаем

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{(2(1-\cos(t)))^2+(2\sin(t))^2}\,dt.$$

Используя услугу “Операции / Интегралы / Интеграл...”, в результате получим $L\approx 16.0$ (Рис. 19.3).

В программе GRAN1 предусмотрена специальная услуга “Операции / Интегралы / Длина дуги...”, обращение к которой дает возможность определить длину дуги между двумя указанными точками (Рис. 19.1).

При этом соответствующая зависимость может быть задана явно, параметрически, в полярных координатах, в виде полинома, которым приближается таблично заданная функция.

Для использования услуги необходимо ввести пределы, в которых изменяется значение аргумента, так же, как это делалось при вычислении интеграла (Рис. 19.2)

Воспользовавшись услугой “Операции / Интегралы / Длина дуги...” для вычисления длины дуги параболы $y=x^2$ в пределах от $x=0$ до $x=3$ получим $L\approx 9.75$ (Рис. 19.2). При этом на соответствующей части дуги в окне “Графики” изменяется цвет графика. При необходимости результат вычислений можно занести в окно “Ответы”.

Для длины дуги циклоиды $x(t)=2(t-\sin t)$, $y(t)=2(1-\cos t)$ в пределах изменения параметра t от 0 до 2π получим $L\approx 16.0$ (Рис. 19.3).

Приближенно длину дуги кривой с любым типом задания зависимости между переменными можно вычислить, используя услугу “Операции / Операции с ломаными / Длина ломаной...”, расположив вершины ломаной на кривой так, чтобы ломаная была как можно ближе к кривой.

3. Пусть необходимо приближенно определить длину контура одного лепестка семилепестковой розы, уравнение которой в полярных координатах имеет вид $\rho=4\sin(7\varphi)$.

Располагая вдоль контура лепестка вершины ломаной, например, как показано на Рис. 19.4, и обращаясь затем к услуге “Операции / Операции с ломаными / Длина ломаной...”, указав при этом начальный и конечный номера вершин 1, получим – длина контура одного лепестка семилепестковой розы $\rho=4\sin(7\varphi)$ приближенно равна $L\approx 8.23$ (Рис. 19.4).

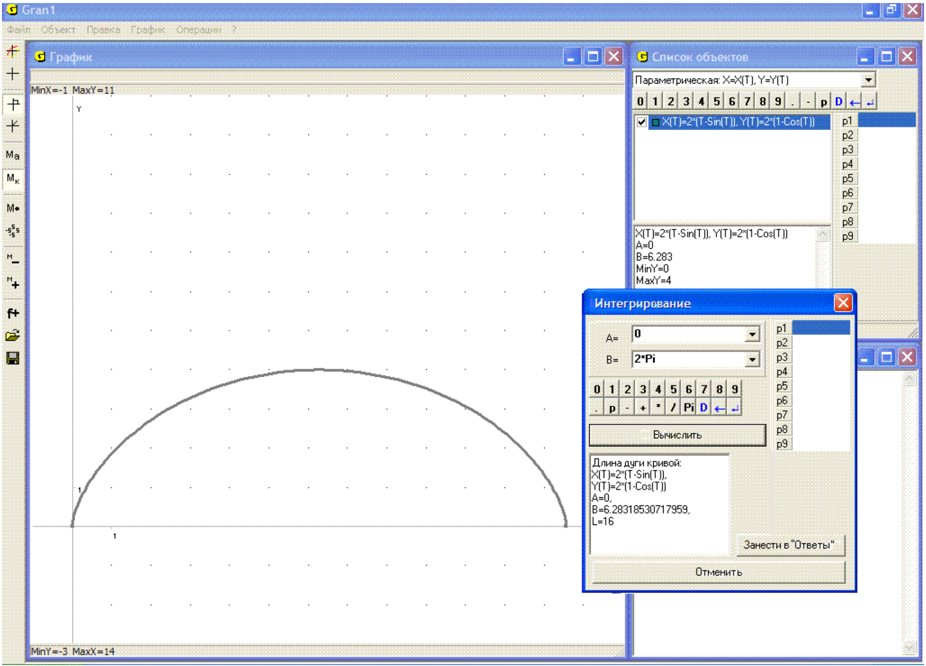


Рис. 19.3

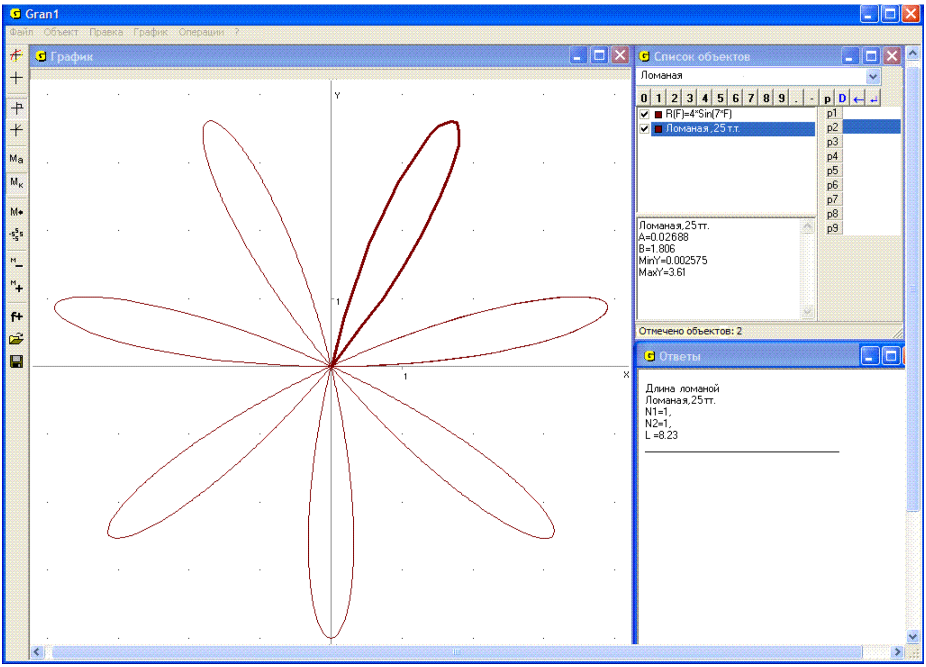


Рис. 19.4

Вопросы для самоконтроля

1. Как с использованием услуги “Операции / Интегралы / Интеграл...” вычислить длину дуги линии, уравнение которой $y = f(x)$, в пределах от точки $(a, f(a))$ до точки $(b, f(b))$?
2. Как с использованием услуги “Операции / Интегралы / Интеграл...” вычислить длину дуги линии, заданной уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, в пределах от точки $(\varphi(t_1), \phi(t_1))$ до точки $(\varphi(t_2), \phi(t_2))$?
3. Как с использованием услуги “Операции / Операции с ломаными / Длина ломаной” приближенно определить длину дуги кривой?

Упражнения для самостоятельного выполнения

1. Вычислить длину дуги линии в заданных пределах:
   - $y = 2x$ при изменении x от -2 до 3,
   - $y = \dfrac{1}{x}$ при изменении x от $\dfrac{1}{4}$ до 4,
   - $y = x^2$ при изменении x от 0 до 1,
   - $y = \sin 2x$ при изменении x от 0 до 1,
   - $y = \cos x$ при изменении x от $-\dfrac{\pi}{2}$ до $\dfrac{\pi}{2}$,
   - $y = \log_2 x$ при изменении x от $\dfrac{1}{4}$ до 8.
2. Определить, при каком $P1$ длина дуги в пределах от 0 до $P1$ будет принимать заранее заданное значение L:
   - $y = x^2$, $L = 15$;
   - $x(t) = 2(t - \sin t)$, $y(t) = 2(1 - \cos t)$, $L = 10$;
   - $y = \cos x$, $L = 2$;
   - $x(t) = 4\cos t$, $y(t) = 4\sin t$, $L = 15$.

§20. Вычисление объемов и площадей поверхностей тел вращения

Для вычисления площадей поверхностей и объемов тел, ограниченных поверхностями, образованными вращением ломаных линий вокруг одной из координатных осей, предназначены услуги “Операции / Операции с ломаными / Объем и площадь поверхности тела вращения, ось Ox” и “Операции / Операции с ломаными / Объем и площадь поверхности тела вращения, ось Oy”. При этом ломаная не должна пересекать ось вращения.

Если ломаная незамкнута, тогда вычисляется площадь поверхности, описываемой ломаной, и объем тела, которое образовалось бы при вращении замкнутой ломаной, получаемой из заданной после проектирования ее свободных концов на ось вращения и вставляния этих точек-проекций между свободными концами ломаной (обе точки-проекции соединяются со своими прообразами и между собой).

Примеры

1. Вычислить площадь боковой поверхности и объем усеченного конуса, радиус большего основания которого равен 4, меньшего 2, а высота конуса 5.

Создадим новый объект – ломаную, состоящую из одного отрезка с координатами концов (0, 2) и (5, 4).

Установив масштаб так, чтобы ось Ox проходила посредине окна “График”, построим изображение ломаной (Рис. 20.1).

Обратившись затем к услуге “Операции / Операции с ломаными / Объем и площадь поверхности тела вращения, ось Ox” (Рис. 20.1), получим в окне “График” изображение конуса (поверхности, которая получается в результате вращения ломаной вокруг оси Ox), а в окне “Ответы” – $S = 101.5$, $V = 146.6$ (Рис. 20.2), где S – площадь боковой поверхности рассматриваемого усеченного конуса, V – объем.

Если теперь построить ломаную из трех звеньев (незамкнутую) с вершинами в точках (0, 0), (0, 2), (5, 4), (5, 0), (Рис. 20.3), и обратиться к услуге “Операции / Операции с ломаными / Объем и площадь поверхности тела вращения, ось Ох”, получим $S = 164.3$, $V = 146.6$, где S – площадь полной поверхности конуса (Рис. 20.4).

Если вращать вокруг оси Ox отрезок с вершинами (5, 4), (5, 0) (Рис. 20.5), тогда получим $S = 50.27$, $V = 0$, где S – площадь нижнего (большего) основания рассматриваемого усеченного конуса (Рис. 20.6).

Если вращать вокруг оси Ox отрезок с вершинами (0, 0), (0, 2), тогда получим $S = 12.57$, $V = 0$, где S – площадь верхнего (меньшего) основания конуса (Рис. 20.7).

Если вращать отрезок, не перпендикулярный к оси вращения, один из концов которого будет лежать на оси вращения, то при обращении к услуге “Операции / Операции с ломаными / Объем и площадь поверхности тела вращения, ось Ох” получим объем и площадь боковой поверхности конуса (неусеченного), а если отрезок параллелен оси вращения, получим объем и площадь боковой поверхности соответствующего цилиндра.

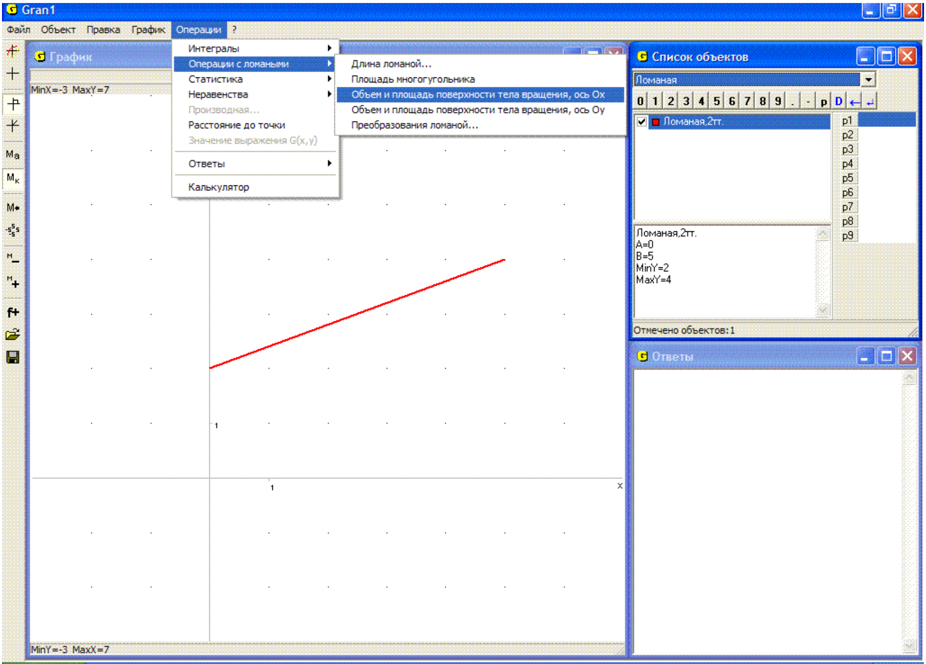


Рис. 20.1

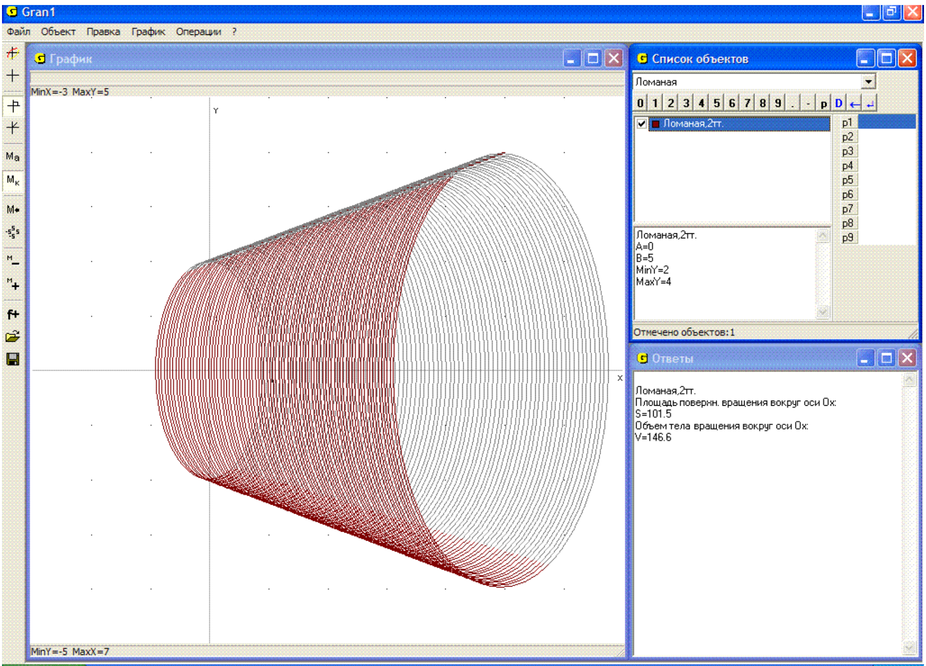


Рис. 20.2

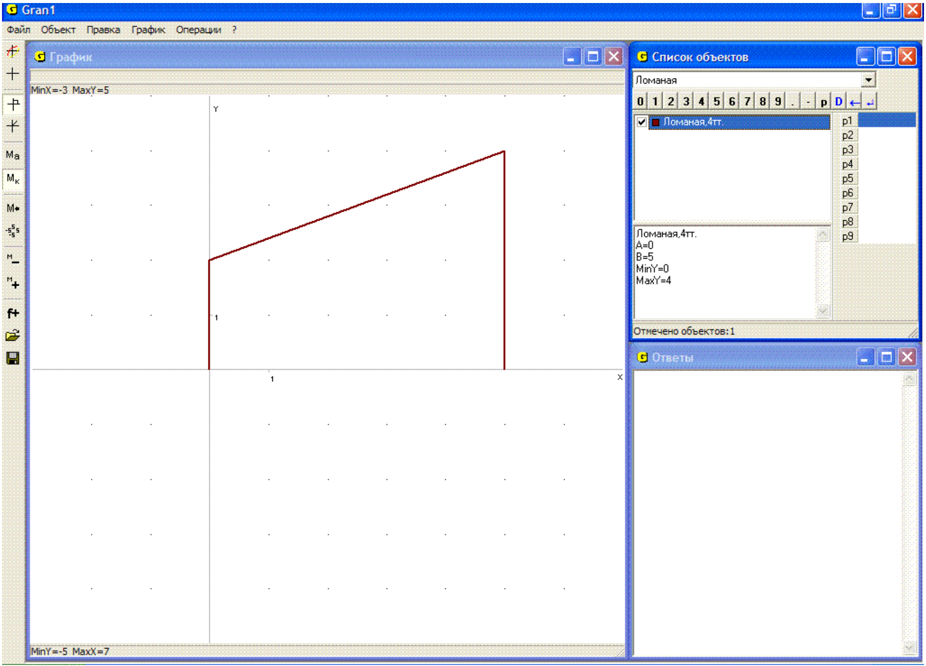


Рис. 20.3

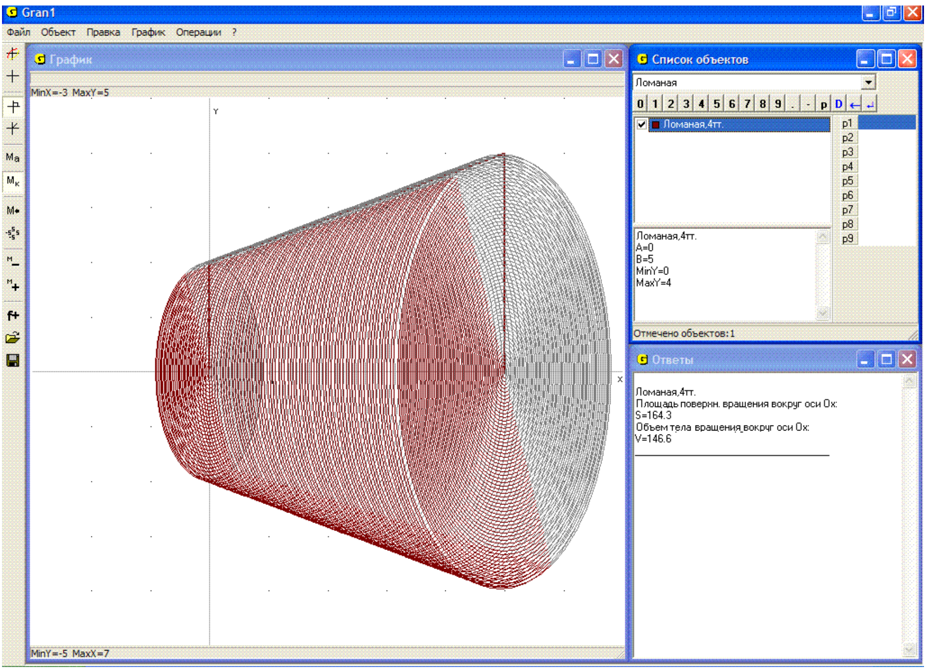


Рис. 20.4

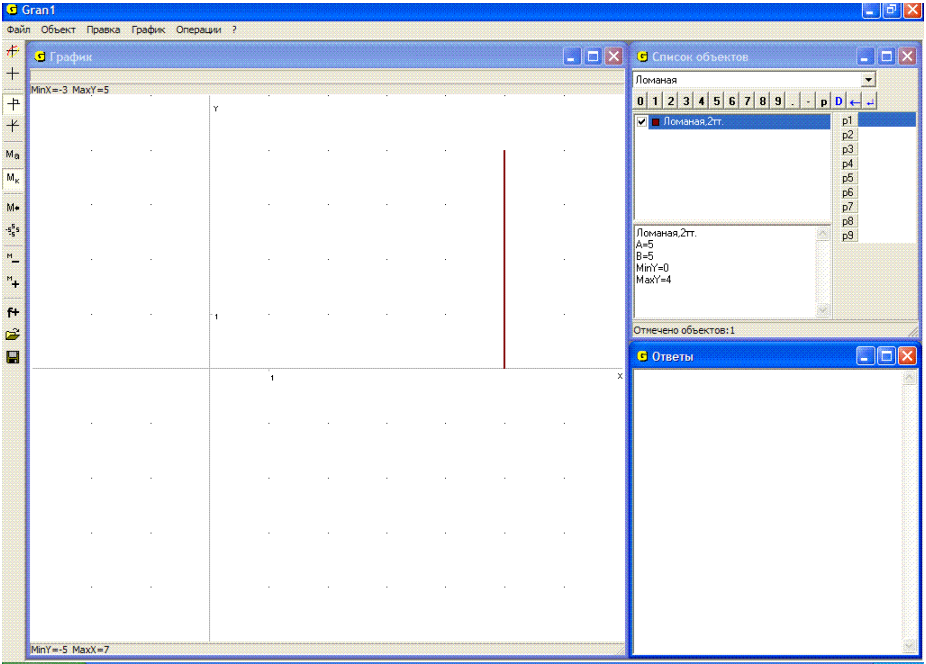


Рис. 20.5

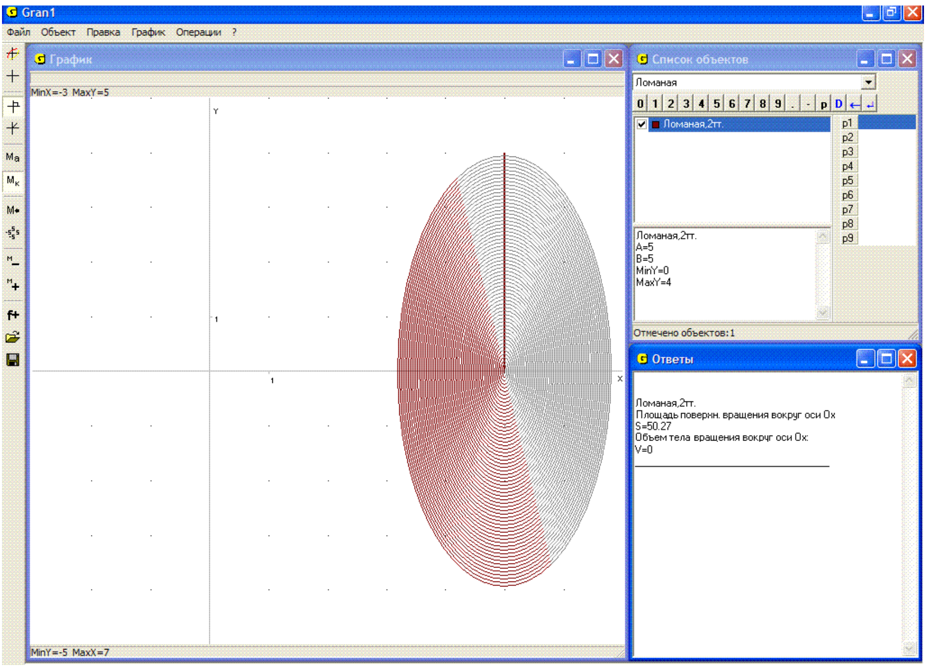


Рис. 20.6

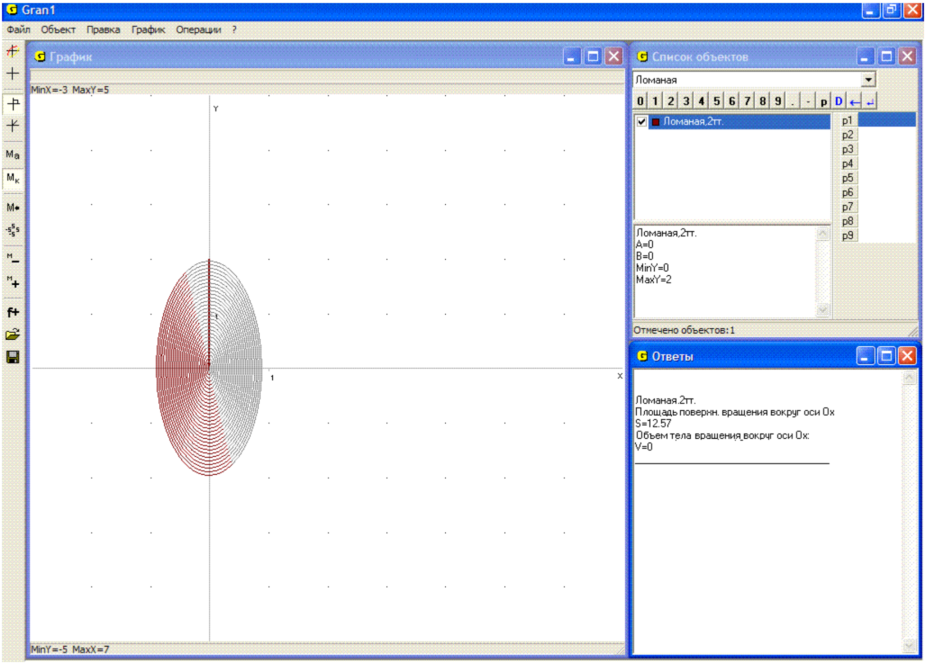


Рис. 20.7

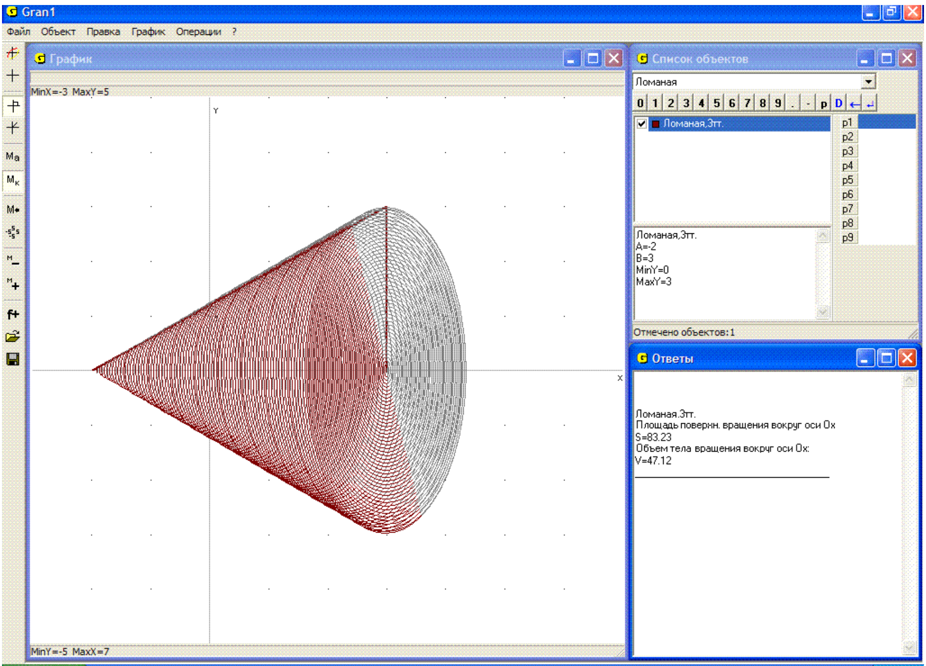


Рис. 20.8

2. Ломаная определяется тремя точками (–2, 0), (3, 3), (3, 0), то есть высота конуса 5, а радиус основания 3. Тогда при обращении к услуге “Операции / Операции с ломаными / Объем и площадь поверхности тела вращения, ось Ox”, получим – площадь полной поверхности $S = 83.23$, $V = 47.12$ (Рис. 20.8).

Используя услуги “Операции / Операции с ломаными / Объем и площадь поверхности тела вращения ...”, можно приближенно вычислять площади поверхностей и объемы тел вращения, ограниченных поверхностями, получаемыми при вращении вокруг оси Ox или оси Oy произвольных линий, которые не пересекают ось вращения.

Для этого нужно встроить в заданную линию ломаную так, чтобы она как можно меньше отклонялась от заданной линии, после чего воспользоваться услугой “Операции / Операции с ломаными / Объем и площадь поверхности тела вращения ...”.

3. Вычислить приближенно площадь поверхности и объем тела, ограниченного поверхностью, получаемой при вращении окружности радиуса 1 с центром в точке (0, 2) вокруг оси Ox.

Создадим новый объект – “Окружность”, у которой центр и радиус будут удовлетворять условия задачи. Воспользовавшись услугой создания ломаной, введем координаты вершин ломаной с экрана: впишем в заданную окружность ломаную так, чтобы она как можно меньше отклонялась от окружности. При этом удобно установить масштаб $MinX = -1.1$, $MaxX = 1.1$, $MinY = 0.9$, $MaxY = 3.1$ (Рис. 20.9).

Установив затем масштабы $MinX = -3.5$, $MaxX = 3.5$, $MinY = -3.5$, $MaxY = 3.5$, обратимся к услуге “Операции / Операции с ломаными / Объем и площадь поверхности тела вращения, ось Ox”. В итоге получим $S = 78.86$, $V = 39.25$ (Рис. 20.10). Заметим, что чем больше точек ломаной будут взяты на окружности, тем более точным будет полученный результат.

Для вычисления объема тела, ограниченного поверхностью, образованной вращением линии, описываемой уравнением вида $y = f(x)$, вокруг оси Ox (или оси Oy), и плоскостями $x = a$, $x = b$ (или $y = c$, $y = d$), в программе GRAN1 также предусмотрены соответствующие услуги.

Услуга “Операции / Интегралы / Объем и площадь поверхности тела вращения, ось Ox...” предназначена для вычисления объема и площади поверхности тела, ограниченного поверхностями, образованными вращением вокруг оси Ox графика зависимости, заданной в виде $y = f(x)$, и прямых $x = a$, $x = b$. Обозначение зависимости в окне “Список объектов” при этом должно быть отмечено (Рис. 20.11).

Услуга “Операции / Интегралы / Объем и площадь поверхности тела вращения, ось Oy...” предназначена для вычисления объема и площади поверхности тела, ограниченного поверхностями, образованными вращением вокруг оси Oy графика зависимости, заданной в виде $y = f(x)$, и прямых $y = f(a)$, $y = f(b)$ (Рис. 20.12).

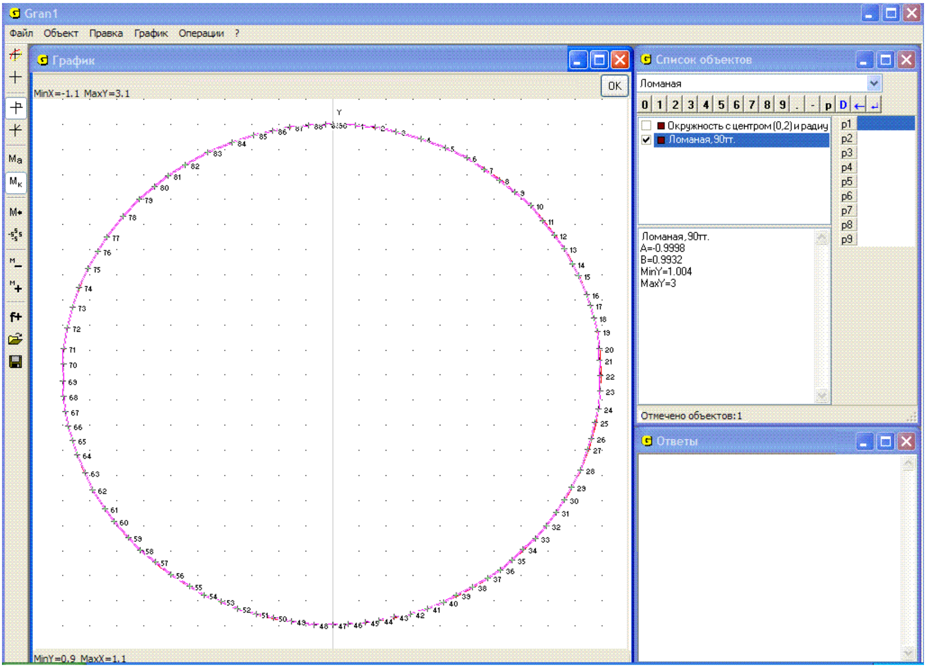


Рис. 20.9

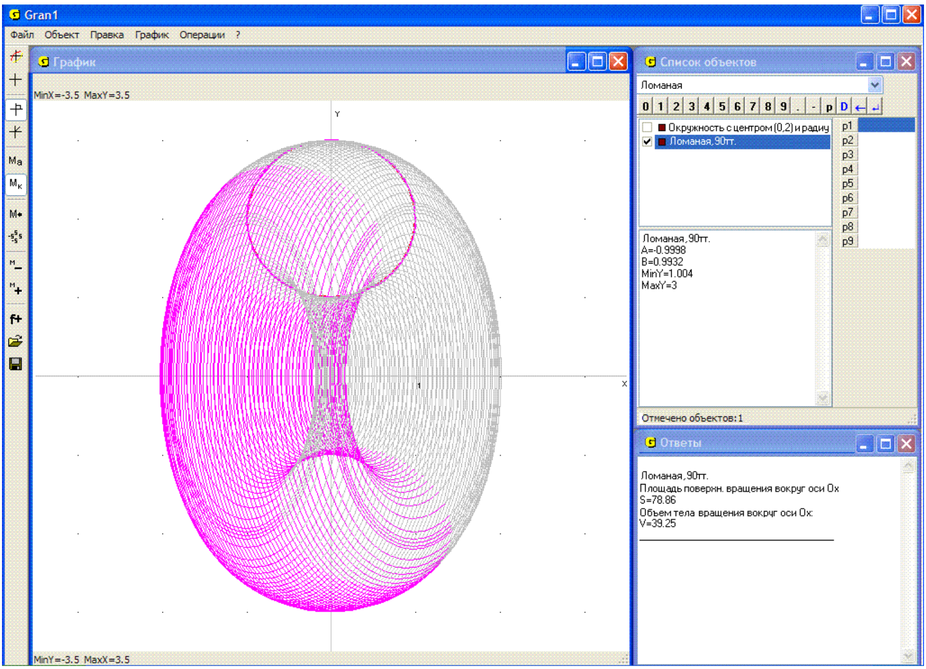


Рис. 20.10

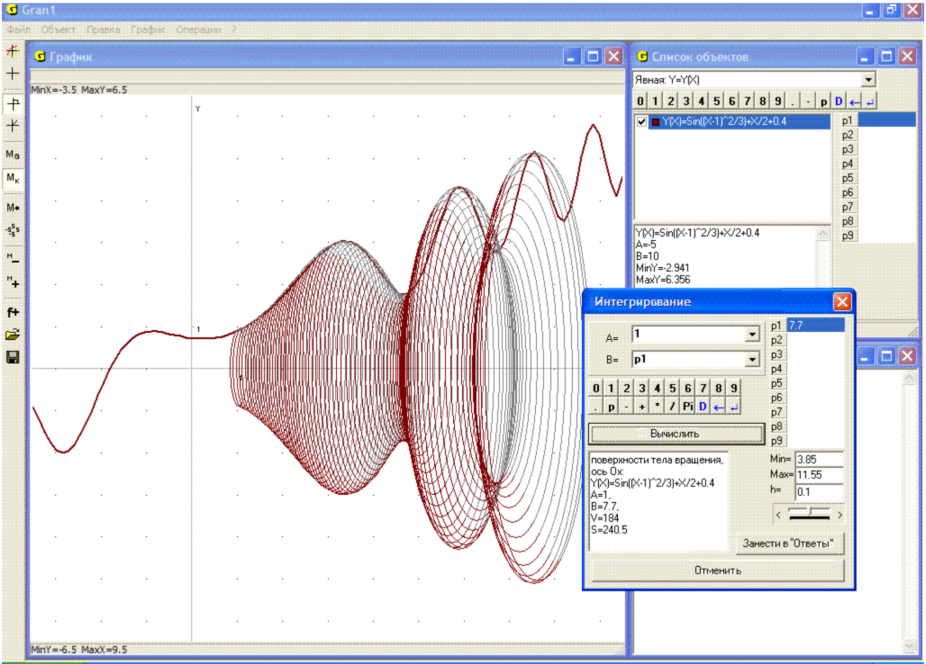


Рис. 20.11

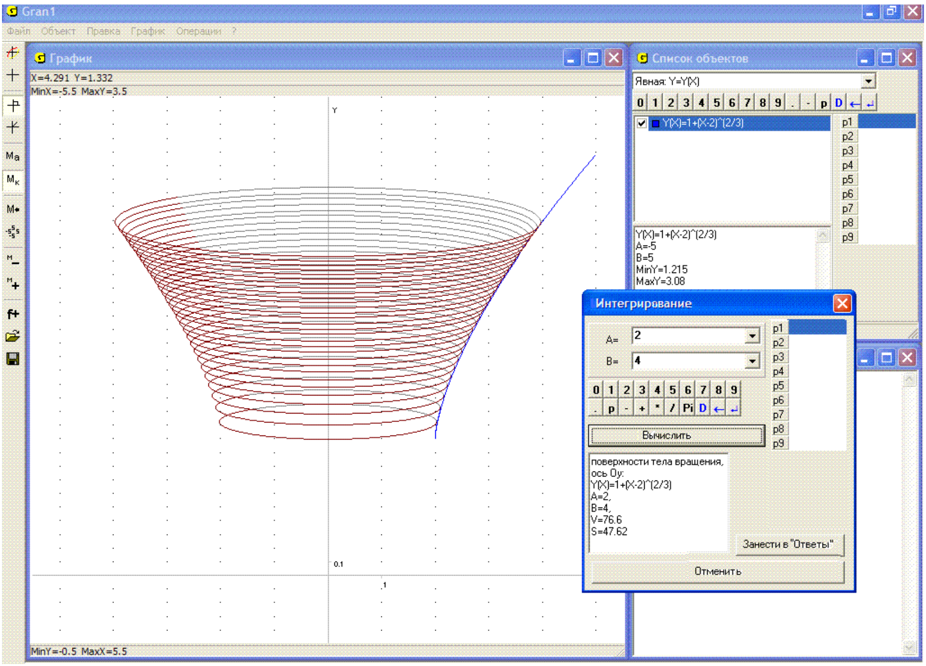


Рис. 20.12

Если подчеркнуты обозначения нескольких зависимостей, то все так найденные объемы и площади поверхностей тел вращения суммируются. При этом значения выражения $f(x)$ вычисляются лишь в пределах отрезка его задания. Это дает возможность вычислять объемы тел, образованных вращением вокруг оси Ox графиков зависимостей, заданных разными выражениями вида $y = f(x)$ на смежных отрезках.

Заметим, что объем тела, ограниченного поверхностью, образованной вращением линии, описываемой уравнением вида $y = f(x)$, вокруг оси Ox, и плоскостями $x = a$, $x = b$, можно вычислить также, воспользовавшись услугой “Операции / Интегралы / Интеграл...” для вычисления определенного интеграла вида $\int_a^b \pi y^2 dx = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx,$ значение которого и будет значением искомого объема.

Аналогично, объем тела, ограниченного поверхностью, образованной вращением линии, описываемой уравнением вида $y = f(x)$, вокруг оси Oy, и плоскостями $y = c$, $y = d$ (где $c = f(a)$, $d = f(b)$) можно вычислить, используя услугу “Операции / Интегралы / Интеграл...” для вычисления определенного интеграла $\int_c^d \pi x^2 dy = \int_a^b \pi f'(x) x^2 dx$, или $\int_c^d \pi(g(y))^2 dy,$ где $g(y)$ – функция, обратная к $f(x)$.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (при $f(x) \geq 0$) можно вычислить также по формуле $\int_a^b 2\pi x f(x) dx$.

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox кривой $y = f(x)$ в пределах от точки $(a, f(a))$ до $(b, f(b))$, вычисляется по формуле: $S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$ а если кривая описывается уравнениями вида $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, тогда по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} 2\pi\phi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\phi'(t))^2}\, dt .$$

4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью, образованной вращением кривой $y = \dfrac{x}{3} + \cos(2x) + 3$ вокруг оси Ox, в пределах от $x_1 = -\pi$ до $x_2 = \pi$.

Построив график заданной функции, обратимся к услуге “Операции / Интегралы / Объем и площадь поверхности тела вращения, ось Ox ...”, указав заданные пределы интегрирования $a = -\pi$, $b = \pi$. В результате получим $V \approx 194.7$, $S \approx 203.4$ (Рис. 20.13).

5. Вычислить объем конуса, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 6 - 2|x|$.

Построим график функции $y = 6 - 2abs(x)$. Обратившись к услуге "Операции / Интегралы / Объем и площадь поверхности тела вращения, ось Oy..." и указав пределы интегрирования $a = 0$, $b = 3$, получим $V \approx 56.55$ (при этом $S \approx 63.27$ – Рис. 20.14).

6. Вычислить объемы конусов, образованных вращением вокруг оси Ox и оси Oy отрезка прямой $y = 1 - x$ между точками (0, 1) и (1, 0).

Построим график зависимости $y = 1 - x$. Обратившись сначала к услуге "Операции / Интегралы / Объем и площадь поверхности тела вращения, ось Ox..." и указав пределы интегрирования $a = 0$, $b = 1$, получим $V \approx 1.047$, $S \approx 4.439$ (Рис. 20.15).

Обратившись затем к услуге "Объем, ось Oy" и опять указав пределы $a = 0$, $b = 1$, получим $V \approx 1.047$, $S \approx 4.446$ (Рис. 20.16).

7. Вычислить объем шара, образованного вращением полукруга радиуса 2 с центром в начале координат, вокруг оси Ox.

Построим график полуокружности $y = \sqrt{4 - x^2}$, ограничивающей указанный полукруг. Обратившись к услуге "Операции / Интегралы / Объем и площадь поверхности тела вращения, ось Ox..." и указав пределы интегрирования $a = -2$, $b = 2$, получим $V \approx 33.51$, $S \approx 50.27$ (Рис. 20.17).

В частности, если этот же объем вычислять по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ при $R = 2$, получим $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 \approx 33.51$.

8. Вычислить объем тела, образованного вращением круга радиуса 1 с центром в точке (0, 2), вокруг оси Ox.

Построив графики функций $y = 2 + \sqrt{1 - x^2}$, $y = 2 - \sqrt{1 - x^2}$, вычислим разность объемов $V_1 = \int_{-1}^{1} \pi y_1^2(x)dx$ и $V_2 = \int_{-1}^{1} \pi y_2^2(x)dx$. Для этого построим графики обеих функциональных зависимостей. Затем вычислим объем тела вращения V_1, для чего снимем метку с обозначения второй зависимости. При этом получим $V_1 \approx 49.06$ (Рис. 20.18). Затем вычислим объем тела вращения V_2, для чего снимем метку с обозначения первой зависимости и поставим на другую. Получим $V_2 \approx 9.583$ (Рис. 20.19). Вычитая от первого объема второй, получим $V = V_1 - V_2 \approx 39.48$. Таким образом, искомый объем $V \approx 39.48$.

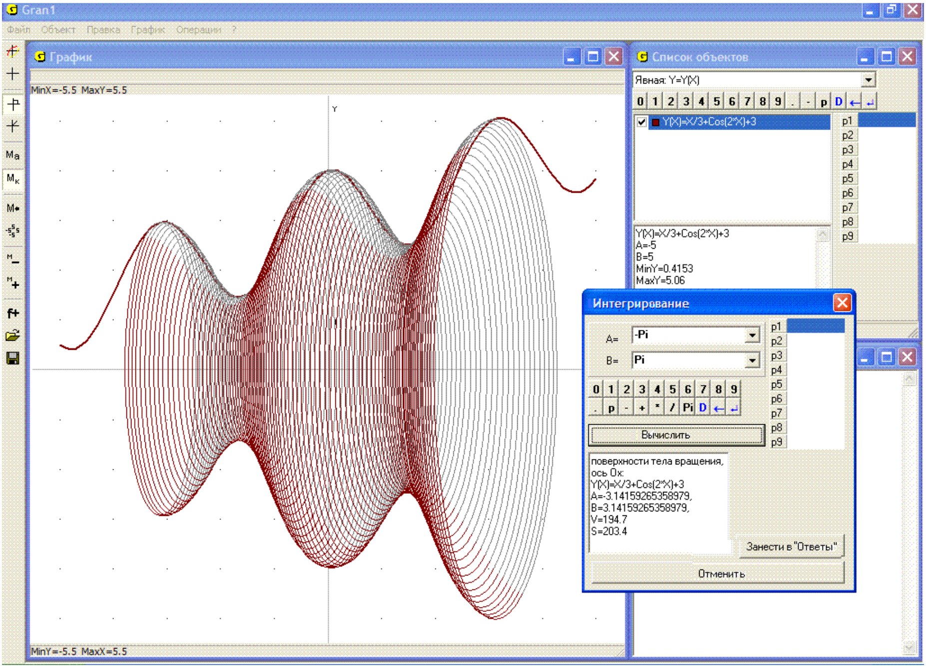


Рис. 20.13

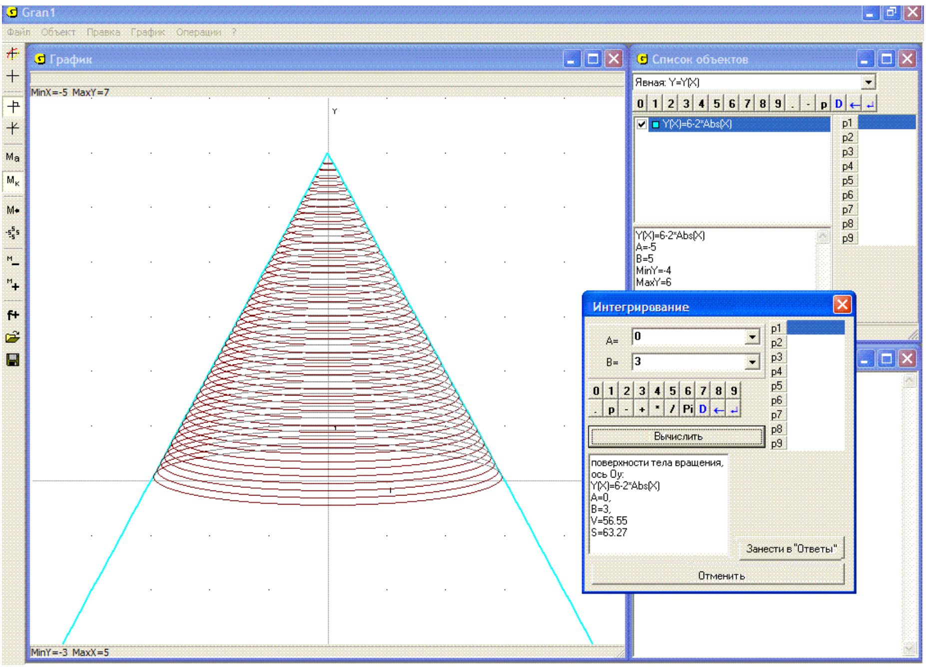


Рис. 20.14

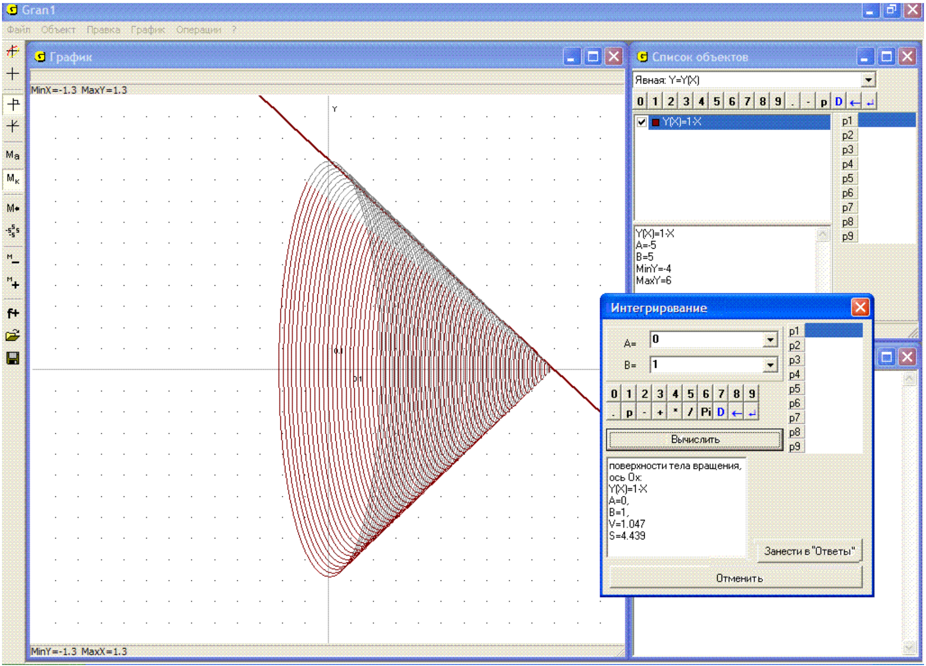


Рис. 20.15

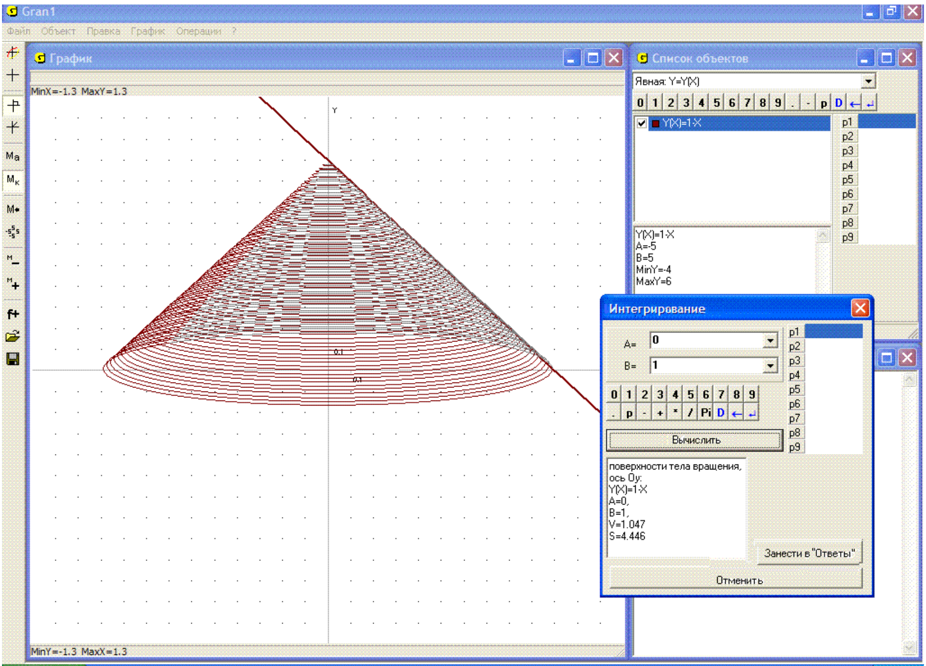


Рис. 20.16

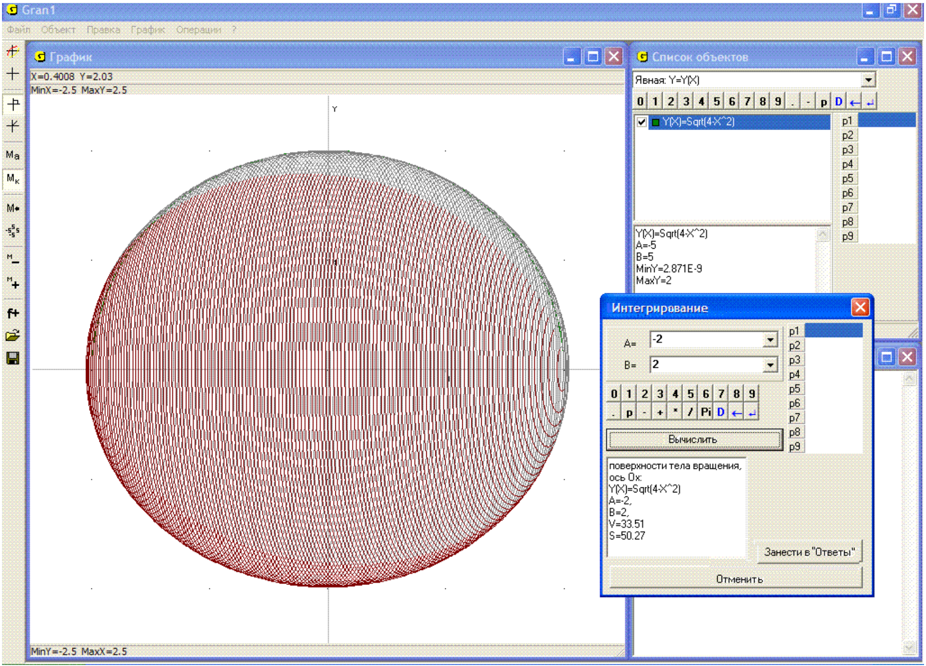


Рис. 20.17

Сравнивая этот результат с результатом, полученным с использованием ломаной (пример 3, Рис. 20.10), можно видеть, что точность вычислений объемов тел вращения путем замены участка кривой ломаной достаточно высока и зависит от того, насколько ломаная близка к графику функциональной зависимости.

Заметим, что если одновременно отметить обе функции $y = 2 + \sqrt{1 - x^2}$ и $y = 2 - \sqrt{1 - x^2}$, то найденные объемы будут суммироваться.

9. Известно, что высота цилиндра вдвое больше радиуса его основания. Определить высоту цилиндра, если его объем равен 100 кубических единиц.

Для решения задачи нужно создать объект – функцию вида $y = P1/2$, которая определяется на отрезке от 0 до $P1$. Ее график соответствует образующей боковой поверхности искомого цилиндра.

Обратившись к услуге “Операции / Интегралы / Объем и площадь поверхности тела вращения, ось Ox ...” и указав пределы интегрирования $a = 0$, $b = P1$, вычислим объем цилиндра. Плавно изменяя значение параметра $P1$, найдем такое, при котором объем будет равен 100 – $P1 = 5.0308$ (Рис. 20.20). Это и будет искомая высота цилиндра.

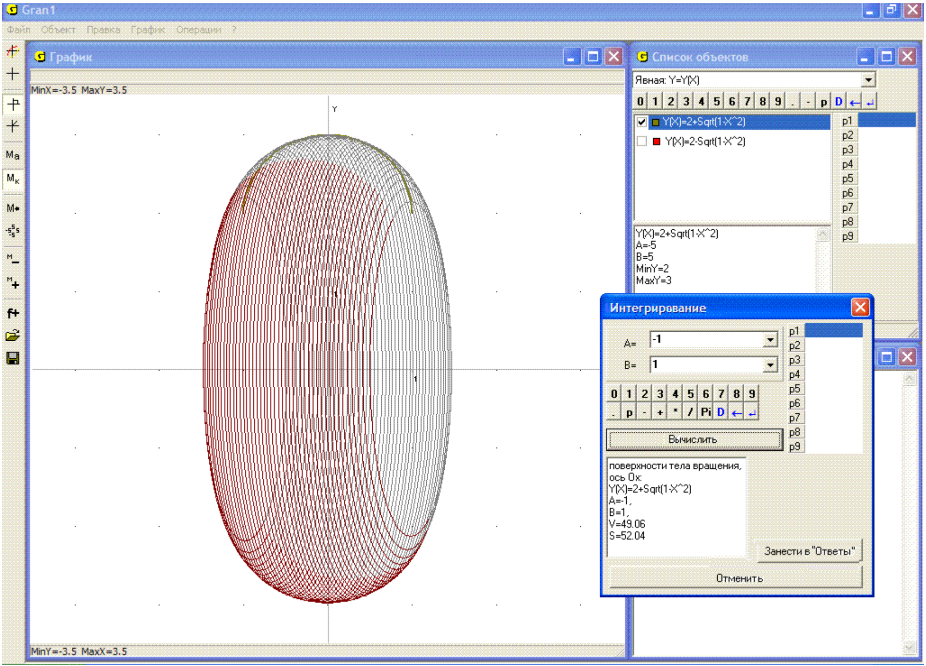


Рис. 20.18

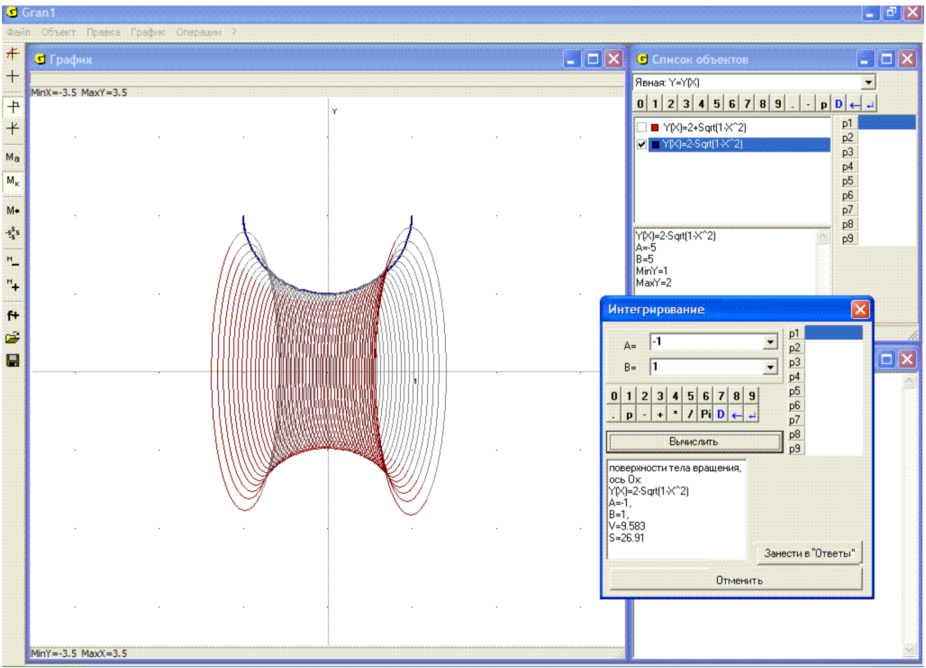


Рис. 20.19

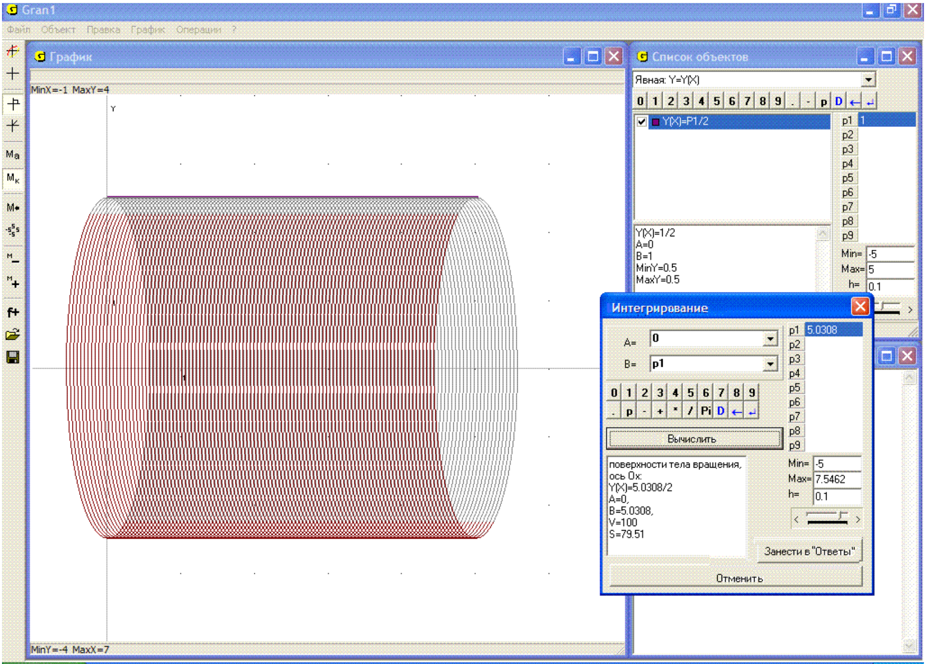


Рис. 20.20

Вопросы для самоконтроля

1. Как вычислить объем тела, ограниченного поверхностью, получаемой вращением некоторой замкнутой ломаной линии вокруг оси Ox? вокруг оси Oy?
2. Обязательно ли строить графики заданных функций при использовании услуг “Операции / Интегралы / Объем и площадь поверхности тела вращения ...”?
3. Как вычислить объем и площадь поверхности тела, образованного вращением вокруг оси Ox кривой $y = f(x)$ в пределах от $x = a$ до $x = b$?
4. Как можно вычислить объем и площадь поверхности тела, образованного вращением вокруг оси Ox кривой $y = f(x)$ и прямых $x = a$, $x = b$, $y = 0$, используя программу GRAN1?
5. Как можно вычислить объем тела, ограниченного поверхностью, образуемой вращением вокруг оси Ox кривых $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и прямых $x = a$, $x = b$?
6. Какой должна быть кривая $y = f(x)$ для того, чтобы можно было правильно вычислить объем тела, ограниченного поверхностью, образованной вращением вокруг оси Oy кривой $y = f(x)$, в пределах от $y = c$ до $y = d$?

7. Как вычислить объем тела, ограниченного вращением вокруг оси Ox (или оси Oy) кривой, заданной параметрически уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\phi(t)$?
8. Как вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox (или оси Oy) кривой, заданной параметрически уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\phi(t)$?

Упражнения для самостоятельного выполнения

1. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox прямоугольника $\{(x,y): x\in[a,b], y\in[c,d]\}$ (при $a<b$, $0<c<d$ и конкретных a, b, c, d).
2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью, образованной вращением вокруг оси Ox отрезка прямой $y=2$ для x в пределах от –3 до 3.
3. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox окружности радиуса 2 с центром в точке (0, 3).
4. Найти объем усеченного конуса, образованного вращением вокруг оси Oy трапеции, ограниченной линиями $x=0$, $y=0$, $y=3$, $y=4-2x$.
5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями, образованными вращением вокруг оси Oy кривой $y=2^x$ и прямых $y=0.5$, $y=4$.
6. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y=4-|4-x|$, $x=3$, $x=5$, $y=0$.
7. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y=6-x$, $y=x+5$, $x=1$, $x=2$. Найти также площадь полной поверхности этого тела.
8. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox кривой $y=2+\cos(\sin(9x))$ в пределах от $x=-4$ до $x=4$.
9. Определить, при каком $P1$ объем V или площадь поверхности S тела вращения будет принимать заранее заданное значение, если аргумент x изменяется в пределах от 0 до $P1$:
   - $y=\sqrt{x}$, $V=57$;
   - $y=\sqrt{x+5}$, $S=84$;
   - $y=\log_2(x+5)$, $S=14$;
   - $y=\sin(x^2)+x$, $V=20$;
   - $y=x+\sin(\sin(\sin(x)))$, $V=65$;
   - $y=x^2+\sin(\cos(\sin(\cos(x))))$, $V=400$.

§21. Элементы статистического анализа экспериментальных данных. Основные понятия

Пусть в результате наблюдений за некоторым процессом или явлением, которые при необходимости могут быть повторены достаточно большое количество раз, получен определенный набор значений некоторой характеристики этого процесса или явления: $x_{нб1}$, $x_{нб2}$, ..., $x_{нб\,n}$. В дальнейшем исследуемые характеристики будем обозначать большими буквами X, Y, Z и т.п. Полученные значения характеристики X будем называть вариантами.

Набор полученных значений называют статистической выборкой из множества возможных значений исследуемой характеристики. Точная закономерность, которую удовлетворяют значения исследуемой характеристики, неизвестна, поэтому невозможно предусмотреть, какие ее значения будут наблюдены в тот или иной момент. Эту закономерность по крайней мере приближенно и необходимо установить по результатам анализа набора наблюденных значений.

Например, невозможно заранее точно установить, какой именно урожай определенной культуры будет получен, если внести то или иное количество удобрений на 1 гектар земли, потому что невозможно точно предусмотреть и учесть влияние всех факторов, от которых зависит урожай – влажность и температура воздуха и почвы, соседство с другими культурами, наличие полезных насекомых и вредителей и т.д.

Можно привести и другие примеры процессов и явлений, значения отдельных характеристик которых невозможно предусмотреть в заранее указанные моменты времени.

Однако, если проведено достаточно большое количество наблюдений, то на их основании с большой степенью уверенности можно говорить о некоторых пределах, в которых следует ожидать значения наблюдаемой характеристики.

Рассмотрим следующий пример. Пусть есть шестигранный кубик со смещенным центром масс, причем некоторым образом (например, на основании очень большого числа наблюдений) установлено, что разные “цифры” на верхней грани выпадают с разными частотами: “1”– в $p_1 = 5\%$ наблюдений (относительная частота 0.05), “2” – в $p_2 = 5\%$ наблюдений (относительная частота 0.05), “3” – в $p_3 = 10\%$ наблюдений (относительная частота 0.10), “4” – у $p_4 = 10\%$ наблюдений (относительная частота 0.10), “5” – у $p_5 = 20\%$ наблюдений (относительная частота 0.20), “6” – у $p_6 = 50\%$ наблюдений (относительная частота 0.50). Будем говорить, что в рассмотренном эксперименте произошло событие E_1, если на верхней грани кубика оказалось “1”, E_2 – если “2”, ... , E_6 – если “6”. Обозначим через Ω множество всех возможных исходов рассматриваемого испытания – одного подбрасывания кубика: $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$. При этом сами E_i можно трактовать как одноэлементные подмножества

множества Ω. Тогда на основании свойства аддитивности относительной частоты (статистической вероятности) относительная частота попадания в любое подмножество $A \subset \Omega$ равна

$$P_n^*(A) = \sum_{E_i \in A} p_i$$

(здесь индекс n указывает количество наблюдений). Если при этом проводить механическую аналогию между распределением относительных частот на множестве Ω и распределением единичной массы таким, что на точку E_i приходится масса p_i, тогда в механической интерпретации $P_n^*(A) = \sum_{E_i \in A} p_i$ есть масса, которая приходится на множество A, то есть сумма масс, которые приходятся на точки E_i из множества A. Следует заметить, что при вычислении относительных частот (статистической вероятности) все формулы вполне аналогичны тем, которые используются при вычислении масс при заданном распределении единичной массы на некотором множестве точек.

В дальнейшем будем считать, что в результате каждого наблюдения (испытания) из некоторого множества Ω элементов (точек) наугад (независимо от наблюдателя) выбирается один единственный элемент (точка). Выбор того или иного элемента отождествляется с соответствующим элементарным событием. Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между элементами рассматриваемого множества и элементарными событиями, что дает основания рассматриваемое множество элементов и соответствующее множество элементарных событий считать эквивалентными. Множество элементарных событий также будем обозначать через Ω. Например, при подбрасывании монеты выбирается один элемент из двухэлементного множества Ω={ “герб”, “цифра”}; при подбрасывании шестигранного игрального кубика выбирается один элемент из множества Ω={ “1”, “2”, “3”, “4”, “5”, “6”}; при стрельбе в круглую мишень радиуса 1 расстояние точки попадания от центра мишени может принимать любое значение в пределах от 0 до 1 (имеется в виду, что попадание за пределы мишени невозможно), поэтому в данном случае можно считать, что наугад выбирается точка из бесконечного непрерывного множества размерности 1 – отрезка Ω=[0, 1]; если при стрельбе в мишень фиксируются координаты x и y точки попадания, тогда можно считать, что наугад выбирается точка из бесконечного непрерывного множества размерности 2 – круга $\Omega = \left\{ (x,y) : x^2 + y^2 \le 1 \right\}$ и т.д.

Если наугад выбранная в результате испытания (наблюдения) точка E из множества Ω принадлежит некоторому подмножеству A множества Ω, то есть $E \in A$, тогда говорят, что произошло событие A. Таким образом, события отождествляются с некоторыми подмножествами множества Ω. Очевидно, событие, соответствующее множеству Ω, происходит при каждом испытании, поэтому такое событие называют достоверным. Событие, которое соответствует пустому множеству $\varnothing$, называют невозможным.

Над событиями вводятся такие же операции, как и над множествами:

1. Сумма событий A и B означает объединение соответствующих множеств и обозначается $A+B$ (или $A \bigcup B$).
2. Произведение событий A и B означает пересечение соответствующих множеств и обозначается AB (или $A \bigcap B$).
3. Разность событий A и B означает разность соответствующих множеств и обозначается $A \setminus B$.
4. Событие $\overline{A}$, противоположное событию A, означает дополнение множества A до множества Ω, то есть $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

События A и B считаются равными (эквивалентными), если каждый элемент множества A есть в то же время и элементом множества B, то есть $A \subset B$, и наоборот каждый элемент множества B есть в то же время и элементом множества A, то есть $B \subset A$. В этом случае пишут $A = B$.

Пусть наблюдается некоторое событие A и проведена серия из n испытаний, в которых могло происходить событие A. Пусть $k_n(A)$ – количество испытаний, в которых событие A произошло.

Отношение $P_n^*(A) = \dfrac{k_n(A)}{n}$ называют *статистической вероятностью* (или относительной частотой) события A в рассмотренной серии из n испытаний. Само число $k_n(A)$ называют абсолютной частотой события A в серии из n испытаний.

Очевидно, $P_n^*(A)$ имеет следующие свойства:

1_p. $0 \le P_n^*(A)$.

2_p. Если $AB = \varnothing$, то $P_n^*(A+B) = P_n^*(A) + P_n^*(B)$.

3_p. $P_n^*(\Omega) = 1$.

Свойства 1_p–3_p называются основными. Из них следуют все другие свойства статистической вероятности:

4. Если $\overline{A} = \Omega \setminus A$, то $P_n^*(\overline{A}) = 1 - P_n^*(A)$.
5. $P_n^*(\varnothing) = 0$, где $\varnothing = \overline{\Omega} = \Omega \setminus \Omega$.
6. Если $A \subset B$, то $P_n^*(A) \le P_n^*(B)$.
7. $0 \le P_n^*(A) \le 1$, так как $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

Из 2 следует, что для любых $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$, $P_n^*(A+B) = P_n^*(A) + P_n^*(B) - P_n^*(AB)$, так как $A + B = A + (B \setminus AB)$, $B = AB + (B \setminus AB)$, $A(B \setminus AB) = \varnothing$, $AB(B \setminus AB) = \varnothing$.

Заметим, что $P_n^*(A)$ есть функцией от множеств $A \subset \Omega$ и задается на некоторой совокупности S подмножеств множества Ω, которая удовлетворяет требования:

1_S. $\Omega \in S$;

2_s. Если $A \in S$, то и $\overline{A} \in S$;

3_s. Если $A_i \in S$, то и $\bigcup\limits_i A_i \in S$, $i = 1, 2, \ldots$.

При этом совокупности S не обязательно должны принадлежать все элементарные события или все подмножества множества Ω.

Набор объектов $(\Omega,\, S,\, P_n^*)$ называется вероятностным пространством, элементы $E \in \Omega$ называются элементарными событиями, а множество Ω – пространством элементарных событий, элементы совокупности S называются событиями, а сама совокупность S – пространством событий, числа $P_n^*(A)\,, A \in S$, называются статистическими вероятностями событий A из S.

Если задано вероятностное пространство $(\Omega,\, S,\, P_n^*)$, то говорят, что задано распределение статистических вероятностей на множестве Ω (поскольку заданы статистические вероятности попадания в подмножества A множества Ω, $A \in S$).

Любую функцию $P(A)$, заданную на совокупности S подмножеств множества Ω, удовлетворяющей условия 1_s–3_s, и такую, которая удовлетворяет требования 1_p–3_p, называют вероятносной мерой (или вероятностью) событий A из S.

Очевидно, статистическая вероятность $P_n^*(A)$, $A \in S$, есть вероятностной мерой на S.

Пусть проведена достаточно большая серия испытаний, в каждом из которых могло произойти одно из элементарных событий E из некоторого множества элементарных событий Ω, и в серии наблюдений произошли элементарные события $E_{нб1}$, $E_{нб2}$, ..., $E_{нб\,n}$, где $E_{нб\,i}$ – элементарное событие, которое произошло в i-ом испытании.

Будем при этом различать случаи, когда множество Ω дискретное и конечное – $\Omega = \{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$, и когда множество Ω бесконечное и непрерывное типа $\Omega = [a, b)$.

Например, при подбрасывании шестигранного кубика, когда $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$, $E_i = "i"$, весьма возможно, что в некоторой серии испытаний могли быть получены результаты:

$E_{нб1} = E_5 =$ “5”	$E_{нб2} = E_6 =$ “6”	$E_{нб3} = E_6 =$ “6”
$E_{нб4} = E_6 =$ “6”	$E_{нб5} = E_4 =$ “4”	$E_{нб6} = E_5 =$ “3”
$E_{нб7} = E_5 =$ “5”	$E_{нб8} = E_2 =$ “2”	$E_{нб9} = E_6 =$ “6”
$E_{нб10} = E_4 =$ “4”	$E_{нб11} = E_5 =$ “5”	$E_{нб12} = E_6 =$ “6”
$E_{нб13} = E_5 =$ “5”	$E_{нб14} = E_6 =$ “6”	и т.д.

Очевидно, в данном примере никакие другие результаты испытаний, кроме появления одного из шести возможных элементарных событий из $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$, быть получены не могли.

Пусть проведено n испытаний и событие E_1 произошло m_1 раз, E_2 – m_2 раз ..., E_k – m_k раз, причем $m_1 + m_2 + ... + m_k = n$.

Тогда $P_n^*(E_1) = \dfrac{m_1}{n}$, $P_n^*(E_2) = \dfrac{m_2}{n}$, …, $P_n^*(E_k) = \dfrac{m_k}{n}$.

Очевидно $P_n^*(E_i) \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{k} P_n^*(E_i) = 1$.

Заметим, что статистические вероятности $P_n^*(A)$ определяются лишь для таких подмножеств A из множества Ω, которые принадлежат S, то есть $A \in S$.

Следует подчеркнуть, что далеко не всегда удобно и корректно рассматривать как события все подмножества множества Ω.

Будем считать, что $E_i \in S$ при любом $i \in \overline{1, k}$, откуда следует, что $A \in S$ для любого $A \subset \Omega$, то есть все подмножества множества Ω принадлежат совокупности S.

В таком случае статистическая вероятность (относительная частота) $P_n^*(A)$ попадания в любое подмножество $A = \bigcup\limits_{i \in I} E_i \subset \Omega$, $I \subset \{1, 2, ..., k\}$, по результатам данных n наблюдений равна

$$P_n^*(A) = \sum_{i \in I} P_n^*(E_i).$$

Таким образом получено поточечное распределение статистических вероятностей (относительных частот) на конечном множестве $\Omega = \{E_1, E_2, ..., E_k\}$ элементарных событий.

Таблицу вида

E_i	E_1	E_2	$\cdots$	E_k
$P_n^*(E_i)$	$P_n^*(E_1)$	$P_n^*(E_2)$	$\cdots$	$P_n^*(E_k)$

называют рядом поточечного распределения статистических вероятностей (относительных частот) на множестве $\Omega = \{E_1, E_2, ..., E_k\}$.

Если каждому элементарному событию поставить во взаимно однозначное соответствие некоторую точку на оси Ox, так что элементы E_i множества Ω фактически лишь переобозначаются новыми обозначениями x_i, тогда совокупность наблюденных значений $x_{нб1}$, $x_{нб2}$, ..., $x_{нб\,n}$ называют выборкой объема n, элементы выборки называют вариантами, а упорядоченный по возрастанию набор наблюденных значений (элементов выборки) называют вариационным рядом.

В приведенном примере серии из 14 испытаний с игральным кубиком вариационный ряд будет иметь вид 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, а ряд поточечного распределения статистических вероятностей (относительных частот) на множестве Ω – вид:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P_n^*(\{x_i\})$	0	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{6}{14}$

Заметим, что на практике в таблицу заносят лишь варианты (элементарные события), которые были наблюдены хотя бы один раз в проведенной серии испытаний. Вместе с тем занесение в таблицу вариант, которые не были, но могли быть наблюдены, никак не влияет на результаты последующих вычислений статистических вероятностей (относительных частот) попадания в различные подмножества множества Ω, некоторых числовых характеристик распределения статистических вероятностей и др.

Если на координатной плоскости построить точки (x_i , $P_n^*(\{x_i\})$) и соединить их ломаной линией, то получится так называемый многоугольник распределения статистических вероятностей (или полигон относительных частот, Рис. 21.1).

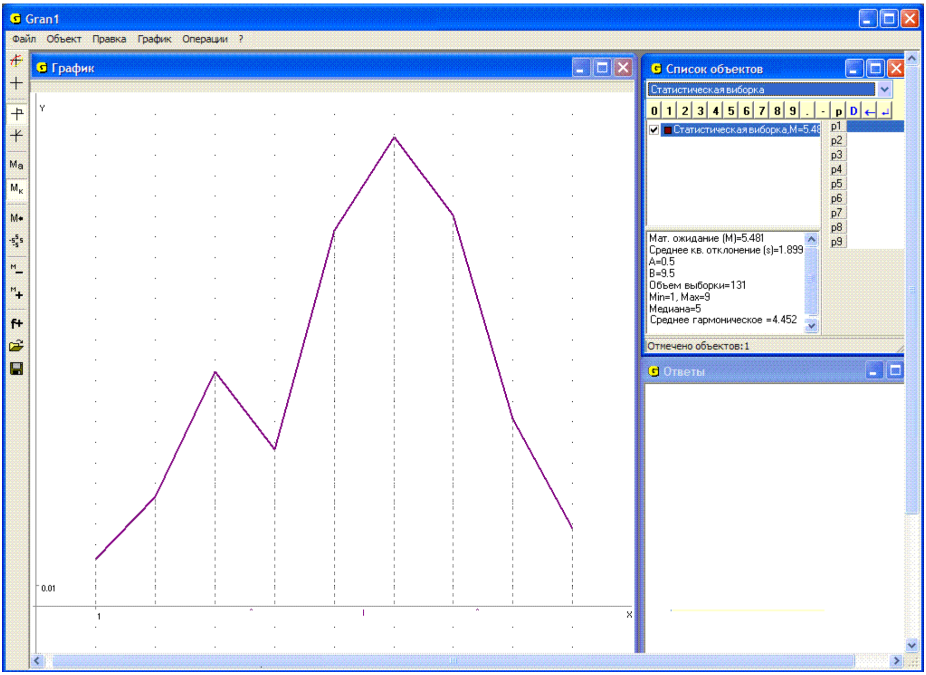


Рис. 21.1

Распределение статистических вероятностей (относительных частот) на конечном множестве $\Omega = \{E_1, E_2, ..., E_k\}$ элементарных событий E_i такое, что для каждого $\{E_i\} \subset \Omega$, $\{E_i\} \in S$, определено $P_n^*(\{E_i\})$, $i \in \overline{1, k}$,. будем называть поточечным распределением. Аналогичные названия сохраняются и в случае, если множество $\Omega = \{E_1, E_2, ..., E_k, ...\}$ счетное, то есть если его элементы можно перенумеровать с помощью всех натуральных чисел (каждому элементу $E_i \in \Omega$ поставить во взаимно-однозначное соответствие натуральное число i, $i \in N$).

Если множество Ω состоит из конечного числа элементов (точек) x_1, x_2, ..., x_k, а в таблицу заносят абсолютные частоты m_i появления значений x_i, то результаты наблюдений можно представить в виде таблицы

x_i	x_1	x_2	...	x_k
m_i	m_1	m_2	...	m_k

,

где x_i, $(i = 1, 2, \ldots, k)$, – возможные значения величины, которая наблюдается, m_i – число появлений значения x_i среди всех наблюденных значений $x_{нб\ 1}$, $x_{нб\ 2}$, ..., $x_{нб\ n}$. При этом не исключается, что $m_i = 0$ для некоторых x_i.

Как правило, значения x_1, x_2, ..., x_k располагают в порядке возрастания. При этом $x_1 = \min\limits_{1 \le i \le n}(x_i) = x_{\min}$, $x_k = \max\limits_{1 \le i \le n}(x_i) = x_{\max}$.

Так построенную таблицу называют рядом распределения абсолютных частот на множестве Ω возможных значений исследуемой величины. Очевидно, сумма абсолютных частот m_i, $(i = 1, 2, \ldots, k)$, равна n.

Если вместо абсолютной частоты m_i значения x_i в таблицу заносят его статистическую вероятность (относительную частоту) $p_i^* = \dfrac{m_i}{n}$:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
p_i^*	p_1^*	p_2^*	·	p_k^*

,

то такую таблицу называют рядом поточечного распределения статистических вероятностей (или относительных частот) на множестве Ω возможных значений исследуемой величины. Очевидно, сумма всех относительных частот всегда равна 1.

Пусть теперь Ω – бесконечное множество элементарных событий, для которого существует взаимно однозначное соответствие между его элементами и точками некоторого интервала вида $[a, b)$, так что любое значение $x \in [a, b)$ может быть получено во время испытаний. Пусть в результате некоторой (достаточно длинной) серии испытаний наблюдены те или иные элементарные события, во взаимно однозначное соответствие которым поставлены наблюденные значения $x_{нб\ 1}$, $x_{нб\ 2}$, ..., $x_{нб\ n}$, ($x_{нб\, i} \in [a, b)$). В этом случае строить таблицу, подобную ряду распределения частот, некорректно, поскольку частота попадания в большинство точек будет равна нулю и только для некоторых (наблюденных) будет отличаться от нуля, хотя нет никаких оснований отдавать предпочтение наблюденным точкам перед ненаблюденными.

В частности, если наблюдений очень много, а наблюденные значения разные, то относительная частота каждого из них будет равной нулю в пределах точности вычислений, особенно если такая точность небольшая.

Поскольку в результате наблюдений могут быть получены любые значения из интервала $[a,b)$, целесообразно разделить Ьнтервал $[a,b)$ на конечное количество достаточно мелких интервалов $[a_0,a_1), [a_1,a_2),\dots,[a_{k-1},a_k)$ одинаковой длины $h=\dfrac{b-a}{k}$, так что $a_0=a$, $a_k=b$, $a_i=a_{i-1}+h=a_{i-1}+\dfrac{a_k-a_0}{k}$, и найти статистические вероятности (относительные частоты) попадания в такие интервалы, а как события вместе с множеством $\varnothing$ рассматривать всевозможные объединения $A=\bigcup\limits_{i\in I}[a_{i-1},\ a_i)$, $I\subset\{1,2,\dots,k\}$, то есть в совокупность S включить $\varnothing$, все интервалы $[a_{i-1},\ a_i)$ и всевозможные их объединения по два, по три, по четыре и т.д., и таким образом положить

$$\mathrm{S}=\{\mathrm{A}\,|\,\mathrm{A}=\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}[\mathrm{a}_{\mathrm{i}-1},\mathrm{a}_{\mathrm{i}}),\ \mathrm{I}\subset\{1,2,\dots,\mathrm{k}\}\}.$$

Таблицу вида

$[a_{i-1},a_i)$	$[a_0,a_1)$	$[a_1,a_2)$	$\cdots$	$[a_{k-1},a_k)$
$P_n^*([a_{i-1},a_i))$	$P_n^*([a_0,a_1))$	$P_n^*([a_1,a_2))$	$\cdots$	$P_n^*([a_{k-1},a_k))$

называют рядом поинтервального распределения статистических вероятностей (относительных частот) на множестве $\Omega=\bigcup\limits_{i=1}^{k}[a_{i-1},a_i)=[a,b)$ по интервалам $[a_{i-1},a_i)\in S$, $i\in\overline{1,\,k}$.

Тогда для произвольного $A\in S$, $A=\bigcup\limits_{i\in I}[a_{i-1},\ a_i)$, будет,

$$P_n^{\,*}(A)=\sum_{i\in I}P_n^{\,*}([\,a_{i-1},a_i)),\ \ I\subset\{i=1,2,\dots,k\}.$$

Если теперь на координатной плоскости xOy построить график кусочно постоянной функции $y=f_n^*(x)$, равной нулю за пределами промежутка $[a_0,a_k)$ и $\dfrac{1}{h}P_n^{\,*}([a_{i-1},a_i))=\dfrac{P_n^{\,*}([a_{i-1},a_1))}{a_i-a_{i-1}}$ на промежутке $[a_{i-1},a_1)$, $i=1,2,\dots,k$, то есть

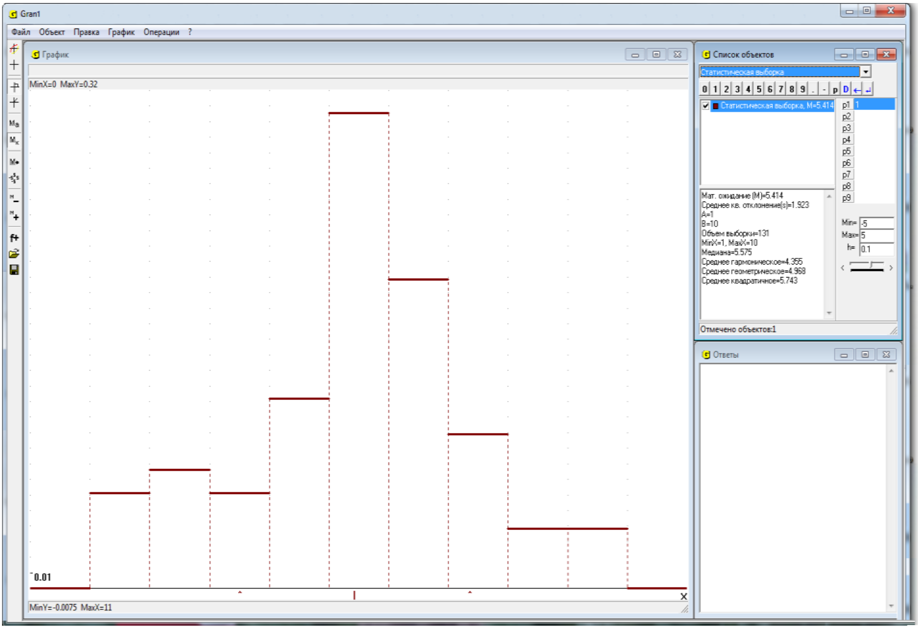


Рис. 21.2

$$f_n^*(x)=\begin{cases}\dfrac{P_n^*([a_{i-1},a_i))}{h}, & \text{когда } x\in[a_{i-1},a_i),\ i=1,2,\dots,k,\\ 0, & \text{когда } x\,\overline{\in}\,[a_0,a_k),\end{cases}$$

то получится так называемая гистограмма поинтервального распределения статистических вероятностей (относительных частот) наблюденных значений исследуемой величины (Рис. 21.2). Функцию $f_n^*(x)$ называют усредненной плотностью распределения статистических вероятностей (относительных частот) на множестве $\Omega=\bigcup\limits_{i=1}^{k}[a_{i-1},a_i)=[a,b)$ по интервалам $[a_{i-1},a_1)$, $i\in\overline{1,\,k}$.

Поскольку в геометрической интерпретации для $x\in(a_{i-1},a_i]$ значение $f_n^*(x)\cdot h=P_n^*([a_{i-1},a_i))$ есть площадь прямоугольника, длина основания которого равна $h=a_i-a_{i-1}$, а высота $f_n^*(x)=\dfrac{1}{h}P_n^*([a_{i-1},a_i))$, то $P_n^*([a_{i-1},a_i))$ можно представить в виде:

$$P_n^*([a_{i-1},\,a_i))=\int\limits_{a_{i-1}}^{a_i}f_n^*(x)dx\ .$$

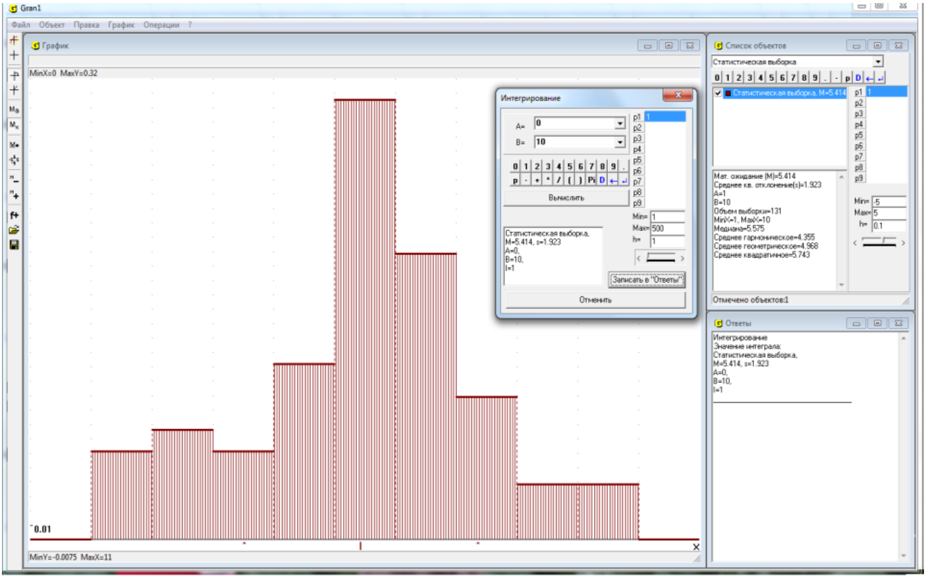


Рис. 21.3

Очевидно, функция $y = f_n^*(x)$ имеет свойства:

1. $f_n^*(x) \geq 0$,

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n^*(x)dx = \sum\limits_{i=1}^{k} \int\limits_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x)dx = \sum\limits_{i=1}^{k} P_n^*((a_{i-1}, a_i]) = 1.$

В геометрической интерпретации это значит, что площадь под графиком функции $y = f_n^*(x)$ (и над осью Ox) всегда равна 1 (Рис. 21.3).

Если теперь рассматривать подмножество $A \subset \Omega$, которое можно представить как объединение некоторых из указанных интервалов, $A = \bigcup\limits_{i \in I} [a_{i-1}, a_i) \in S$, $I \subset \{1, 2, \ldots, k\}$, тогда

$$P_n^*(A) = \int\limits_A f_n^*(x)dx = \sum\limits_{[a_{i-1}, a_i) \subset A} \int\limits_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x)dx = \sum\limits_{[a_{i-1}, a_i) \subset A} P_n^*([a_{i-1}, a_i)) .$$

Следует подчеркнуть, что и в случае непрерывного множества $\Omega = [a, b)$ как события можно рассматривать не любые подмножества множества $\Omega = [a, b)$, а лишь такие, которые входят в совокупность S так называемых измеримых по заданой на S мере $P_n^*(A)$, $A \in S$, подмножеств множества Ω.

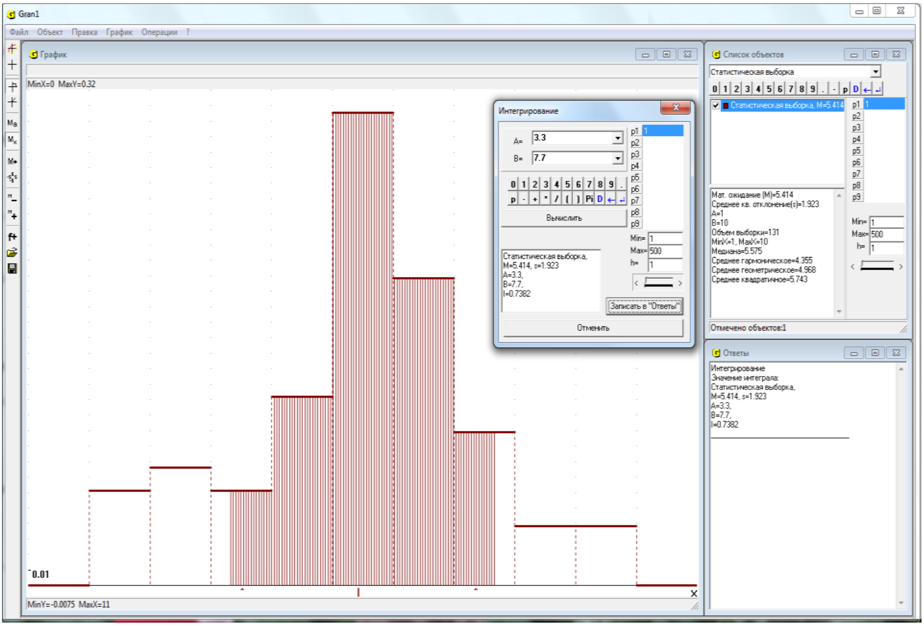


Рис. 21.4

Как и раньше, совокупность S должна удовлетворять свойства:

1_S. $\Omega \in S$;

2_S. Если $A \in S$, то и $\overline{A} = \Omega \setminus A \in S$;

3_S. Если $A_i \in S,\ i = 1, 2, 3, \ldots$, то и $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in S,\ n \geq 1,\ \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in S$.

На Рис. 21.4 показано некорректное задание пределов интегрирования, так как $[3.3; 7.7) \overline{\in} S$, где $S = \{A \mid A = \bigcup\limits_{i \in I} = (a_{i-1}, a_i],$

$I \subset \{(1,2,3,\ldots,8,9)\},\ a_0 = 1,\ a_9 = 10,\ a_i - a_{i-1} = 1,\ i \in \overline{1,9}$.

Из указанных свойств следует, что вместе с любыми множествами A и B в совокупность S входят также $A \bigcup B$, $A \bigcap B$, $A \setminus B$, вместе с множествами A_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ в совокупность S входят $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i,\ \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i,\ \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i,\ \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. В частности в совокупность S входят всевозможные объединения конечного или бесконечного числа промежутков вида $[\alpha_j, \beta_j)$, $[\alpha_j, \beta_j]$, $(\alpha_j, \beta_j]$, (α_j, β_j), которые попарно не пересекаются, когда $\langle \alpha_j, \beta_j \rangle \in S$.

Обозначим $[a_{i-1}, a_i)$ через H_i, $m([a_{i-1}, a_i)) = a_i - a_{i-1}$ через $m(H_i)$.

Если $\tilde{\Omega} \supset \Omega$ некоторое измеримое по мере m множество, $\tilde{S} \supset S$ –

совокупность измеримых по мере m подмножеств множества $\tilde{\Omega}$, удовлетворяющая требования 1_s-3_s, $G \in \tilde{S}$ – произвольное измеримое по мере m подмножество множеств $\tilde{\Omega}$, тогда на совокупности $\tilde{S} \supset S$ измеримых по мере m множеств можно ввести новую вероятную меру P, положив

$$P(G) = P(G \bigcap (\bigcup_{i=1}^{k} H_i)) = P(\bigcup_{i=1}^{k} (G \bigcap H_i)) = \sum_{i=1}^{k} P(G \bigcap H_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{m(G \bigcap H_i)}{m(H_i)} P_n^*(H_i) = \sum_{i=1,\, E \in G \bigcap H_i}^{k} \frac{m(G \bigcap H_i)}{m(H_i)} f_n^*(E) m(H_i) =$$

$$= \sum_{i=1, E \in G \bigcap H_i}^{k} f(E) m(G \bigcap H_i)\,.$$

где $P(G)$, $G \in \tilde{S}$, уже не есть статистическая вероятность $P_n^*(G) = \dfrac{k_n(G)}{k_n(\Omega)}$, $G \in \tilde{S}$, полученная по результатам серии из n проведенных испытаний (по статистическим данным), а вероятностная мера, введеная на основании предположения (гипотезы) о том, что на каждом из множеств H_i статистические вероятности, полученные по статистическим данным (результатам серии из n проведенных испытаний), распределены равномерно, то есть если есть два подмножества $Q \subset H_i$ і $G \subset H_i$ одинаковой меры $m(Q) = m(G)$, то и

$$P(Q) = \frac{m(Q)}{m(H_i)} \cdot P_n^*(H_i) = \frac{m(G)}{m(H_i)} \cdot P_n^*(H_i) = P(G),$$

$$f(E) = \begin{cases} \dfrac{P(G \bigcap H_i)}{m(G \bigcap H_i)} = f_n^*(E), \text{ когда } E \in G \bigcap H_i, \\ \qquad 0, \qquad\qquad \text{когда } E \,\overline{\in}\, G \bigcap H_i. \end{cases}$$

Заметим, что когда $G = \Omega$, тогда $f(E) = f_n^*(E)$ для всех $E \in \Omega$.

Такии образом *вероятностная мера* $P_n^*(A)$, $A \in S$, *заданная на совокупности событий S, порожденной системой подмножеств* H_i, $i \in \overline{1,k}$, *распространяется* (*продолжается*) *на совокупность* $\tilde{S} \supset S$ *множеств, измеримых по мере m*. Очевидно, для $A \in S$ имеет место равенство $P(A) = P_n^*(A)$.

Здесь также делается предположение (гипотеза), что плотность распределения статистических вероятностей на каждом из множеств H_i

постоянна, то есть $f_n^*(E) = c_i = \dfrac{P_n^*(H_i)}{m(H_i)}$, $E \in H_i$, $i \in \overline{1,k}$.

В действительности же по результатам проведенных испытаний (по статистическим данным) может оказаться (если фиксировать не только количества точек, которые попадают в разные множества H_i, а и количества точек, которые попадают в разные подмножества множеств H_i, $i \in \overline{1,k}$), что $k_n(Q) \neq k_n(G)$, когда $Q \subset H_i$, $G \subset H_i$, $m(Q) = m(G)$, $Q \in \tilde{S}$, $G \in \tilde{S}$, поэтому вероятностные меры

$$P(G \cap H_i) = \frac{m(G \cap H_i)}{m(H_i)} P_n^*(H_i),\ G \in \tilde{S},$$

являются гипотетическими, которые вводятся на основании предположения, что на каждом из множеств H_i статистические вероятности распределены равномерно, то есть что $P_n^*(G \cap H_i) = P_n^*(Q \cap H_i)$, когда $m(G) = m(Q)$, $G \subset H_i$, $Q \subset H_i$, $G \in \tilde{S}$, $Q \in \tilde{S}$, и что $f(E) = f_n^*(E)$, когда $E \in G \cap H_i$, то есть что

$$f(E) = \frac{P(G \cap H_i)}{m(G \cap H_i)} = f_n^*(E) = \frac{P_n^*(H_i)}{m(H_i)},\ E \in G \cap H_i,$$

когда $E \in G \cap H_i$, $f(E) = 0$, когда $E \bar{\in} G \cap H_i$, $i \in \overline{1,k}$, $G \in \tilde{S}$.

В дальнейшем вероятностную меру события A, $A \in S$, введеную на основании предположения, базирующегося на результатах некоторой серии из n испытаний или нескольких таких серий, будем обозначать $P(A)$, $A \in S$, и называть *обобщенной статистической вероятностью*, или *гипотетической вероятностной мерой*, или *гипотетической вероятностью,* или *просто вероятностью*, если это не будет приводить к противоречиям, неопределенности, необходимости дополнительных разъяснений.

Если же гипотетическая вероятностная мера, заданная на совокупности S подмножеств множества Ω, удовлетворяющей требования 1_s-3_s, вводится произвольно, без проведения предварительно каких либо испытаний и собирания статистических данных, лишь требуется, чтобы такая вероятностная мера удовлетворяла требования 1_p-3_p, тогда такую вероятностную меру также будем называть гипотетической вероятностной мерой, или гипотетической вероятностью или просто вероятностью и также будем обозначать $P(A)$, $A \in S$.

В таком случае вероятностное пространство (Ω, S, P) не связывается с какими либо конкретными испытаниями и есть лишь теоретической моделью любого вероятностного пространства. Вместе с тем все теоретические модели проистекают из практики.

Заметим, что и в случае, когда множество Ω конечно, не всегда коректно в совокупность S включать любые подмножества множества Ω.

Например, если $\Omega = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_k\}$, где $x_0 = 0$, $x_k = 1$, $x_{i+1} = x_i + h$, $i \in \overline{0, k}$, $k = 10^{1000000}$, $h = 10^{-k}$, тогда хотя множество Ω и конечно, скорее всего целеобразно поделить его на практически приемлимое количество m подмножеств H_j, $j \in \overline{1, m}$, $H_i H_j = \varnothing$, когда $i \neq j$. Например, $H_j = \{x_i \mid x_i \in [a_{j-1}, a_j)\}$, $j \in \overline{1, m}$, $a_0 = 0$, $a_m = 1 + \varepsilon$, $m \approx 25$, $\varepsilon = 0.001$, определить $P_n^*(H_j)$, $j = \overline{1, m}$, а как события вместе с $\varnothing$ расматривать лишь всевозможные объединения подмножеств H_j, то есть в совокупность S вместе с $\varnothing$ включать $A = \bigcup\limits_{j \in I} H_j$, $I \subset \{1, 2, ..., m\}$. Тогда для каждого $A \in S$, $A = \bigcup\limits_{i \in I} H_i$, будет $P_n^*(A) = \sum\limits_{j \in I} P_n^*(H_j)$, $I \in \{1, 2, ..., m\}$.

Следует подчеркнуть, что и в случае небольшого количества элементов во множестве Ω не всегда целеобразно включать в совокупность S все подмножества множества Ω. Пусть, например, $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ (эксперимент заключался в подбрасывании кубика). Пусть на основании большого количества n испытаний определено $P_n^*(\{E_6\}) = 0.60$, $P_n^*(\{E_5\}) = 0.30$, $P_n^*(\{E_1, E_2, E_3, E_4\}) = 0.10$. Тогда в совокупность S коректно вместе с пустым множеством $\varnothing$ включить подмножества $H_1 = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, $H_2 = \{E_5\}$, $H_3 = \{E_6\}$, и всевозможные их объєденения, то есть положить $S = \{\varnothing, H_1, H_2, H_3, H_1 + H_2, H_1 + H_3, H_2 + H_3, H_1 + H_2 + H_3 = \Omega\}$. В таком случае для произвольного $A \in S$, $A = \bigcup\limits_{i \in I} H_i$, будет $P_n^*(A) = \sum\limits_{i \in I} P_n^*(H_i)$, $I \subset \{1, 2, 3\}$, а именно: $P_n^*(\varnothing) = 0$, $P_n^*(H_1) = 0.10$, $P_n^*(H_2) = 0.30$, $P_n^*(H_3) = 0.60$, $P_n^*(H_1 + H_2) = 0.40$, $P_n^*(H_1 + H_3) = 0.70$, $P_n^*(H_2 + H_3) = 0.90$, $P_n^*(H_1 + H_2 + H_3) = P_n^*(\Omega) = 1$. Вместе с тем при указанных условиях на вопрос, чему равно $P_n^*(\{E_2, E_4, E_6\})$, $P_n^*(\{E_1, E_3, E_5\})$, $P_n^*(\{E_1, E_2, E_3\})$ и т.п., то есть как часто выпадало четное число очков, нечетное число очков, число очков было не больше трех и т.п. ответить невозможно.

Пусть в одномерном координатном пространстве дискретное поточечное распределение статистических вероятностей на множестве $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ определяется по таблице 21.1:

Табл. 21.1.

x_i	x_1	x_2	...	x_k
$P_n^*(\{x_i\})$	$P_n^*(\{x_1\})$	$P_n^*(\{x_2\})$	...	$P_n^*(\{x_k\})$

а как пространство событий S рассматривается наиболее широкая совокупность подмножеств множества Ω, то есть $S = \{A \mid A = \bigcup\limits_{i \in I} \{x_i\}, I \subset \{1,\ 2,\ ...,\ k\}\}$.

Тогда при предположении, что $\tilde{\Omega} = (-\infty, \infty)$, $(-\infty, x) \in \tilde{S}$ для произвольного $x \in (-\infty, \infty)$, то есть множества $(-\infty, x)$ для произвольного $x \in (-\infty, \infty)$ есть события из пространства $\tilde{S}$, на котором определена вероятносная мера $\tilde{\mathrm{P}}_\mathrm{n}^*(G) = \sum\limits_{x_i \in G \bigcap \Omega} P_n^*(\{x_i\})$, $G \in \tilde{S}$, для каждого $x \in \overline{R} = R \bigcup \{+\infty, -\infty\}$ можно определить число $\tilde{P}_n^*((-\infty; x))$ – обобщенную статистическую вероятность попадания наблюденных значений $x_i \in \Omega$ в промежуток $(-\infty;\ x)$, равное сумме всех $P_n^*(\{x_i\})$, для которых $x_i \in (-\infty;\ x)$ (или, что тоже, $x_i < x$), то есть

$$\tilde{P}_n^*((-\infty; x)) = \sum_{x_i \in (-\infty; x) \bigcap \Omega} P_n^*(\{x_i\}) = \sum_{x_i < x} P_n^*(\{x_i\}).$$

Для этой статистической вероятности $\tilde{P}_n^*((-\infty; x))$ пространством элементарных событий считают множество $\tilde{\Omega} = R = (-\infty, \infty)$, а пространством событий – пространство, породженное совокупностью конечных объединений всевозможных промежутков. В частности, к этому пространству относятся любые промежутки, а также их конечные и счетные объединения и дополнения этих объединений до R.

Заметим вместе с тем, что $(-\infty, x) \overline{\in} S$, и поэтому выражение $P_n^*((-\infty, x))$ некорректно, так как вероятностная мера P_n^* задана лишь на совокупности S подмножеств множества Ω.

Функцию

$$F_n^*(x) = \tilde{P}_n^*((-\infty, x)) = \sum_{x_i \in (-\infty; x) \bigcap \Omega} P_n^*(\{x_i\}),\ i \in \overline{1, k},\ \ x \in R,$$

називают *функцией поточечного распределения обобщенных статистических вероятностей* (*относительных частот*) *на конечном множестве* $\{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_k\}$.

Пример 21.1. Пусть распределение статистических вероятностей задано в таблице 21.2.

Табл. 21.2

x_i	1	2	3	4	5	6
$P_n^*(\{x_i\})$	0	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

Тогда

$$F_n^*(x) = \widetilde{P}_n^*((-\infty, x)) = \begin{cases} 0, \text{ когда } x \le 2, \\ \frac{1}{15}, \text{ когда } 2 < x \le 3, \\ \frac{4}{15}, \text{когда } 3 < x \le 4, \\ \frac{6}{15}, \text{ когда } 4 < x \le 5, \\ \frac{10}{15}, \text{ когда } 5 < x \le 6, \\ 1, \text{ когда } 6 < x. \end{cases}$$

Так как $-\infty < x_i$ для всех i, то $F_n^*(-\infty) = P_n^*(\varnothing) = 0$ как статистическая вероятность невозможного события, которое заключается в появлении значения $x_{нб\,i}$, меньшего чем $-\infty$.

Аналогично, поскольку $x_i < +\infty$ для всех i, то

$$F_n^*(+\infty) = \sum_{x_i \in (-\infty;\infty) \bigcap \Omega} P_n^*(\{x_i\}) = \widetilde{P}_n^*((-\infty, +\infty)) = P_n^*(\Omega) = 1$$

как статистическая вероятность достоверного события, заключающегося в попадании точки $x_{нб\,i}$ на промежуток $(-\infty; +\infty)$.

На Рис. 21.5 изображен график функции поточечного распределения обобщенных статистических вероятностей, определяемого по таблице 21.2.

Отметим *основные свойства функции распределения обобщенных статистических вероятностей*:

1. $F_n^*(x) \ge 0$, как обобщенная статистическая вероятность события $G = (-\infty; x) \subset \widetilde{\Omega}$, $G \in \widetilde{S}$,

2. $F_n^*(-\infty) = 0$, кк обобщенная статистическая вероятность невозможного события $\varnothing = \{x : x < -\infty\}$, то есть статистическая вероятность появления значений $x_{нб\,i}$, меньших чем $-\infty$.

3. $F_n^*(+\infty)=1$, как обобщенная статистическая вероятность достоверного события $\tilde{\Omega}=(-\infty;\infty)$, то есть статистичкая вероятность появления значений $x_{нб\,i}$, меньших чем $+\infty$.

4. Если $u<v$, то $F_n^*(u)\le F_n^*(v)$, то есть функция распределения обобщенных статистических вероятностей неубывающая.

В самом деле,

$$F_n^*(v)=\sum_{x_i<v}P_n^*(\{x_i\})=\sum_{x_i<u}P_n^*(\{x_i\})+\sum_{u\le x_i<v}P_n^*(\{x_i\})\ge\sum_{x_i<u}P_n^*(\{x_i\})=F_n^*(u),$$

так как $P_n^*(\{x_i\})\ge 0$ для всех i.

Из приведенного, в частности, следует, что

$$\tilde{P}_n^*([u;v))=\sum_{x_i\in(u,v]}P_n^*(\{x_i\})=F_n^*(v)-F_n^*(u),$$

то есть обобщенная статистическая вероятность попадания точек $x_{нб}$ в промежуток $[u;v)$ равна приращению функции распределения обобщенных статистических вероятностей на этом промежутке.

5. На каждом промежутке $(\alpha;x_i]$, на котором нет точек множества $\{x_1,x_2,\dots\}$, кроме точки x_i, функция распределения обобщенных статистических вероятностей постоянна, причем $F_n^*(x)=F_n^*(x_i)$, когда $x\in(\alpha;x_i]$.

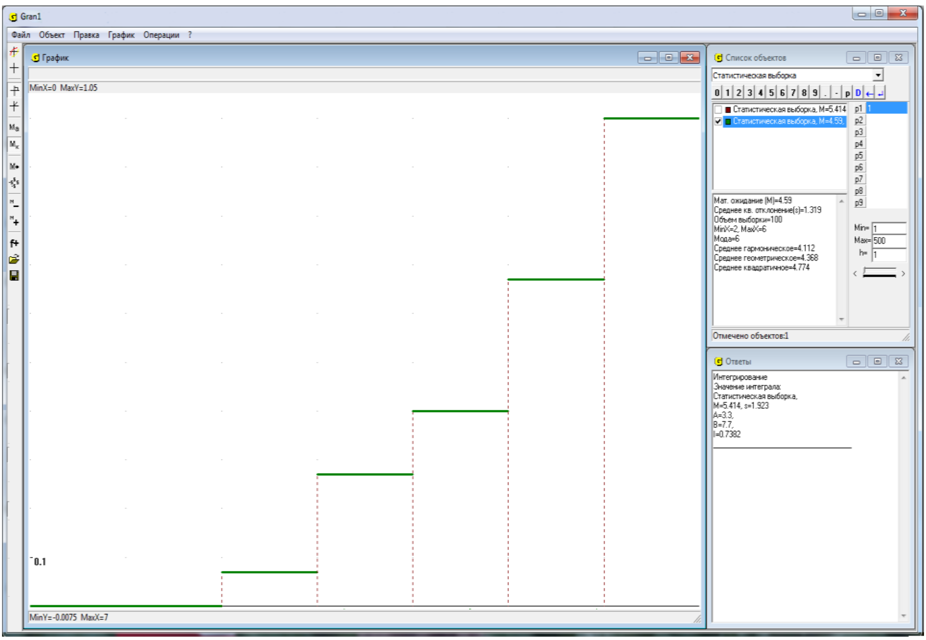


Рис. 21.5.

Любую функцию, удовлетворяющую условия 1–5, называют *функцией распределения статистических вероятностей на множестве* $\tilde{\Omega} = (-\infty, \infty)$, определенной по поточечному распределению статистических вероятностей $P_n^*(\{x_i\})$, $i \in \overline{1,k}$, на конечном множестве $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$.

Заметим, что когда число k очень большое, например $k = 10^{1000000}$, $k = 10^{1000000000}$ и т.п., а все $P_n^*(\{x_i\})$, $i \in \overline{1,k}$, равны или близкие между собой, тогда вычисление $\tilde{P}_n^*((-\infty, x))$ непосредственно по формуле $F_n^* = \tilde{P}_n^*((-\infty, x)) = \sum_{x_i \in (-\infty, x) \cap \Omega} P_n^*(\{x_i\})$, $x \in R$, становится практически неприемлемым, так как все $P_n^*(\{x_i\})$ практически равны нулю, и для произвольного $x < \infty$ будет $\tilde{P}_n^*((-\infty, x)) = 0$, что приводит к противоречиям. Например, если все $x_i \in [0,1]$ удалены одна одна от другой на растояние $h = 10^{-1000000000}$, а все $P_n^*(\{x_i\})$ равны между собой, тогда для произвольного $x \le \infty$ практически будет $F_n^*(x) = \tilde{P}_n^*((-\infty, x)) = \sum_{x_i < x} P_n^*(\{x_i\}) = 0$, что приводит к противоречию, так как для произвольного $x > 1$ должно быть $F_n^*(x) = 1$.

В подобных вслучаях целеобразно множество $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ заменить на $[x_1, x_k + \varepsilon)$ и поделить этот промежуток на практически приемлемое количество m подмножеств $H_i = [a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,m}$, где $a_0 = x_1$, $a_m = x_k + \varepsilon$, $a_i = a_{i-1} + h$, $h = \frac{a_m - a_0}{m}$, $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число, и определять не $P_n^*(\{x_i\})$, $i \in \overline{1,k}$, а $\tilde{P}_n^*(H_i)$, $i \in \overline{1,m}$, а $F_n^*(x)$ приближенно вычислять по формуле:

$$F_n^*(x) = \sum_{a_i < x} \tilde{P}_n^*(H_i) + \frac{x - a_{i-1}}{h} \tilde{P}_n^*(H_i),\ x \in [a_{i-1}, a_i)\ ,\ i \in \overline{1,m}.$$

Тогда для всех x таких, что $x \le a_0$, будет $F_n^*(x) = 0$, а для всех x таких, что $x > a_m$, будет $F_n^*(x) = 1$.

Заметим, что подобным образом действуют и в случае, когда множество Ω непрерывное.

Прежде чем рассмотреть определение функции поинтервального распределения обобщенных статистических вероятностей на непрерывном множестве точек, напомним некоторые понятия из теории множеств.

Пусть Ω – некоторое фиксированное непустое множество.

Определение. Система V подмножеств множества Ω называется *алгеброй*, если:

1) $\Omega \in V$;

2) из того, что $A \in V$, следует, что $\overline{A} \in V$;

3) из того, что $A \in V$ и $B \in V$, следует, что $A \bigcup B \in V$.

Легко видеть, что все рассмотренные раньше операции над конечным количеством подмножеств не выводят из алгебри V.

Примеры алгебр подмножеств множества Ω:

1. Совокупность $S_* = \{\varnothing, \Omega\}$ – *тривиальная или “наиболее бедная” алгебра подмножеств множества* Ω.

2. $\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$ – алгебра множеств, порожденная множеством A.

3. Система S^* всех подмножеств множества Ω – “наиболее богатая” алгебра подмножеств множества Ω.

4. Пусть $H_1, H_2, ..., H_k$ – некоторые подмножества множества Ω такие, что $H_i \; H_j = \varnothing$, когда $i \neq j$, причем $H_i \neq \varnothing$, $\bigcup\limits_{i=1}^{k} H_i = \Omega$.

Если создать систему множеств, в которую входят пустое множество $\varnothing$, все множества H_i, все возможные суммы множеств H_i по два, по три, по четыре и т.д. слагаемые, то такая система множеств будет алгеброй множеств. Такая *алгебра* множеств называется *порожденной делением* $D = \{H_1, H_2, ..., H_n\}$ *множества* Ω *на подмножества* H_i, которые попарно не пересекаются, то есть $H_i H_j = \varnothing$, когда $i \neq j$. Множества H_i в таком случае называют *атомами деления* D. Таким образом, по делению D однозначно определяется алгебра $V = \alpha(D)$. Наоборот, по алгебре множеств, породженной делением D, можно восстановить это деление, причем единственное. В самом деле, если $H \in V$ такое, что для любого $B \in V$ либо $H \bigcap B = H$, либо $H \bigcap B = \varnothing$, тогда совокупность таких H образует искомое деление.

Определение. Система S подмножеств из Ω называется σ*–алгеброй*, если:

1_S. $\Omega \in S$;

2_S. из того, что $A \in S$, следует, что $\overline{A} \in S$;

3_s. из того, что $A_i \in S$, $i = 1, 2, \ldots$, следует, что $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in S$.

Легко видеть, что все рассмотренные операции над конечным или счетным количеством подмножеств не выводят из σ–алгебры S. В частности, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in S$, когда $A_i \in S,\ i \in N$.

Примером σ–алгебры есть совокупность S^* всех подмножеств множества Ω.

Системы множеств $S_* = \{\varnothing, \Omega\}$, $S^* = \{A \,|\, A \subset \Omega\}$ есть и алгебры, и σ–алгебры, причем S_* – тривиальная, “наиболее бедная” σ–алгебра, а S^* – “наиболее богатая” σ–алгебра, в которую входят все подмножества множества Ω. Если $D = (H_1,\ H_2, \ldots)$ – некоторое счетное деление множества Ω на непустые подмножества

$$\Omega = H_1 + H_2 + \ldots,\ H_i\ H_j = \varnothing,\ i \neq j,$$

то система $S = \alpha(D)$, составленная из множеств, которые являются суммами конечного или счетного количества элементов из D, и присоединенным к ним пустым множеством $\varnothing$, является и алгеброй, и $\sigma-$алгеброй.

Понятно, что всякая σ–алгебра является и алгеброй, но не наоборот.

Определение. Пусть W – некоторая система подмножеств из Ω.

σ–алгебра $\sigma(W)$ называется *наименьшей, включающей систему* W, если:

1) $W \subset \sigma(W)$;

2) для любой σ-алгебры S, которая также включает систему $W, W \subset S$, имеет место включение $\sigma(W) \subset S$.

Для любой системи множеств W существует наименьшая σ–алгебра $\sigma(W)$, в которую входит система W. В самом деле, существует по крайней мере одна σ–алгебра (а именно S^*), которая включает систему W. Пересечение всех σ–алгебр, в которые входит система W, и есть искомая σ–алгебра. Систему $\sigma(W)$ называют σ–алгеброй, порожденной системой множеств W.

Пусть $\Omega = R^1 = (-\infty, \infty)$ – действительная прямая,

$$[a, \mathrm{b}) = \{x \in R^1 \,|\, a \leq x < b\}$$

для всех $-\infty \le a \le b \le \infty$. В частности $[a,a) = \varnothing$. Обозначим через $(b,\infty]$ интервал $[b,\infty)$ (чтобы дополнения до R^1 промежутка $[b,\infty)$ было того же типа, то есть замкнутым слева и открытым справа).

Обозначимо через L систему множеств из R^1, составленных из конечных сумм промежутков вида $[a,b)$:

$$A \in L, \text{ если } A = \sum_{i=1}^{n} [a_i, b_i), \ n < \infty.$$

Система L является алгеброй, но не σ–алгеброй, так как если $A_n = [0 + \frac{1}{n}, 1) \in L$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0,1) \overline{\in} L$.

Определение. Пусть $\mathscr{B}(R^1)$ – наименьшая σ–алгебра $\sigma(L)$, в которую входит система L. Элементы σ–алгебри $\sigma(L)$ называют *борелевскими множествамии*, а сама σ–алгебра $\sigma(L)$ называется *σ–алгеброй борелевских множеств в R^1*.

Так как $\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, a) \in \sigma(L)$, то одноточечные множества борелевские. Промежутки $(a,b) = [a,b) - \{a\}$, $(a,b] = (a,b) + \{b\}$, $[a,b] = [a,b) + \{b\}$ – борелевские множества. Каждое открытое множество – борелевское, так как произвольное открытое множество R^1 является суммой конечного или счетного количества интервалов. Каждое замкнутое множество также борелевское (дополнение замкнутого множества до R^1 – открытое множество).

Если $\Omega = R^n$ и L – система параллелепипедов вида

$$\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i) = \{x \mid x = (x_1, x_2, ..., x_n), \ a_i \le x_i < b_i, \ i = \overline{1, n}\},$$

то наименьшая σ–алгебра $\mathscr{B}(R^n)$, в которую входит система L, называется *σ–алгеброй борелевских множеств в R^n*.

Таким образом, если множество A можно получить, исходя из замкнутых и открытых множеств, с помощью конечного или счетного количества операций обьединения и пересечения, то множество A будет борелевским.

Ограниченное борелевское множество называется $\mathscr{B}$–измеримым (*измеримым по Борелю*).

Пусть $\Omega = [a,b) = \bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i)$, $a \in (-\infty, \infty)$, $b \in (-\infty, \infty)$, $0 < b - a < \infty$,

$H_i=[a_{i-1},a_i)$, $i\in\overline{1,k}$, $a_i-a_{i-1}=h>0$ для всех $i\in\overline{1,k}$, $S=\{A\,|\,A=\bigcup\limits_{i\in I}H_i, I\subset\{1,\ 2,\ \dots,\ k\}\}$, $\tilde{\Omega}=R^1=(-\infty,\infty)\supset\Omega$, $\tilde{S}=\mathscr{B}(R^1)$ – σ-алгебра борелевских множеств из R^1, $\tilde{S}\supset S$, $m(H_i)=a_i-a_{i-1}=h>0$ и пусть на Ω задано поинтервальное распределение статистических вероятностей по таблице 21.3.:

Табл. 21.3

$[a_{i-1};a_i)$	$[a_0;a_1)$	$[a_1;a_2)$	...	$[a_{k-1};a_k)$
$P_n^*([a_{i-1};a_i))$	$P_n^*([a_0;a_1))$	$P_n^*([a_1;a_2))$	...	$P_n^*([a_{k-1};a_k))$

откуда усредненная плотность $f(x)$ поинтервального распределения статистических вероятностей на множестве $\Omega=[\mathrm{a},\mathrm{b})$ по інтервалам $[a_{i-1},a_i)$, $i\in\overline{1,k}$, принимает вид

$$f_n^*(x)=\begin{cases}\dfrac{P_n^*(H_i)}{m(H_i)}, & \text{когда } x\in H_i=[a_{i-1},a_i),\ i\in\overline{1,k},\\ 0, & \text{когда}\, x\in\overline{\Omega}.\end{cases}$$

Так как $0\le P_n^*(H_i)\le 1$, $m(H_i)=a_i-a_{i-1}=h>0$, $i\in\overline{1,k}$, то $0\le f_n^*(x)\le c<\infty$ для всех $x\in\tilde{\Omega}\supset\Omega$, то есть значения функции $f(x)$ ограничены некоторым постоянным числом $c<\infty$.

Пусть $G=(-\infty,x)\subset\tilde{\Omega}$, $G\in\tilde{S}=\mathscr{B}(R^1)$.

Положим

$$\begin{aligned}F(x)&=P_n^*(G_*)+\alpha(P_n^*(G^*)-P_n^*(G_*))=\\&=P(G)=P((-\infty,x)),\ \alpha\in[0,\,1],\end{aligned}\tag{21.1}$$

где $G_*=\bigcup\limits_{\cup H_i\subset G\cap\Omega}(\cup H_i)$ - объединение всех объединений $\cup H_i$ таких, что $\bigcup H_i\subset G\bigcap\Omega=(-\infty,x)\bigcap[a,b)$, $G^*=\bigcap\limits_{G\cap\Omega\subset\cup H_i}(\cup H_i)$ – пересечение всех объеденений $\cup H_i$ таких, что

$$G\bigcap\Omega=(-\infty,x)\bigcap[a,b)\subset\bigcup H_i=\bigcup[a_{i-1},a_i),$$

$P(G)=P(G_*)+\alpha(P(G^*)-P(G_*))$, $a\in[0,1]$, обобщенная статистическая вероятность на $(R^1,\ \mathscr{B}(R^1))$ - вероятностная мера на $(R^1,\ \mathscr{B}(R^1))$, полученная как продолжение меры $P_n^*(A)$, $A\in S$, из пространства событий S на пространство $\tilde{S}=\mathscr{B}(R^1)$.

Очевидно $G_* \subset G \bigcap \Omega \subset G^*$, поэтому $P(G_*) \le P(G^*)$.

Легко видеть, что функция $F(x) = P((-\infty, x))$ имеет такие свойства:

1. $F(x) \ge 0$, так как $P(G_*) \ge 0$, $P(G^*) - P(G_*) \ge 0$, $0 \le \alpha \le 1$.

2. $F(x)$ неубывающая функция, то есть когда $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.

В само деле, если $x_1 < x_2$, то $G_1 = (-\infty, x_1) \subset G_2 = (-\infty, x_2)$, поэтому $G_{1*} \subset G_{2*}$, $G_1^* \subset G_2^*$, $P(G_{1*}) \le P(G_{2*})$, $P(G_1^*) \le P(G_2^*)$, откуда $F(x_1) = (1-\alpha)P(G_{1*}) + \alpha P(G_1^*) \le (1-\alpha)P(G_{2*}) + \alpha P(G_2^*) = F(x_2)$.

3. $F(x) \to 0$, когда $x \to -\infty$.

В самом деле, когда $x \to -\infty$, то $(-\infty, x) \to (-\infty, -\infty) = \varnothing$, поэтому $G_* = \varnothing$, $G^* = \varnothing$, $P(G_*) = 0$, $P(G^*) = 0$, $(1-\alpha)P(G_*) + \alpha P(G^*) = 0$.

4. $F(x) \to 1$, когда $x \to \infty$.

В самом деле, когда $x \to \infty$, то $(-\infty, x) \to (-\infty, \infty) = \tilde{\Omega} \supset \Omega$, поэтому для $G = \tilde{\Omega}$ будет $G \bigcap \Omega = \Omega$, $G_* = \bigcup\limits_{\bigcup H_i \subset G \bigcap \Omega} (\bigcup H_i) = \Omega$, $G^* = \bigcap\limits_{G \bigcap \Omega \subset \bigcup H_i} (\bigcup H_i) = \Omega$, откуда

$$F(x) = (1-\alpha)P_n^*(\Omega) + \alpha P_n^*(\Omega) = (1-\alpha)\cdot 1 + \alpha \cdot 1 = 1.$$

Так как $P_n^*(H_i) = f(x) \cdot m(H_i) = \int\limits_{H_i} f(x)dx$, $x \in H_i$, $i \in \overline{1, k}$, то

$$P(G) = (1-\alpha)P(G_*) + \alpha P(G^*) = (1-\alpha)\int\limits_{G_*} f(x)dx + \alpha \int\limits_{G^*} f(x)dx =$$

$$= \int\limits_{G_*} f(x)dx + \alpha(\int\limits_{G^*} f(x)dx - \int\limits_{G_*} f(x)dx), \quad \alpha \in [0, 1]. \qquad (21.2)$$

Так как $m(G^*) - m(G_*) \le h$, то

$$\int\limits_{G^*} f(x)dx - \int\limits_{G_*} f(x)dx \le \max_{x \in [a,b)} f(x) \cdot h = c \cdot h \to 0, \text{ когда } h \to 0.$$

5. Если $h > 0$, $x_1 \ne x_2$, $x_1 \in H_{i_0} = [a_{i_0-1}, a_{i_0})$, $x_2 \in H_{i_0} = [a_{i_0-1}, a_{i_0})$, то есть две разные точки x_1 и x_2 лежат в одном и том же интервале, то $F(x_1) = F(x_2)$, то есть функция $F(x_1)$ принимает постоянные значения c_i на каждом из интервалов $[a_{i-1}, a_i)$.

Так как $F(x) = 0$, когда $x \le a$, $F(x) = 1$, когда $b < x$, то когда $h > 0$, существуют по крайней мере два соседние интервала $[a_{i_1-1}, a_{i_1})$ и

$[a_{i_2-1}, a_{i_2})$ такие, что $|F(x_2)-F(x_1)|>0$, когда $x_1 \in [a_{i_1-1}, a_{i_1})$, $x_2 \in [a_{i_2-1}, a_{i_2})$, даже когда $x_1 \to x_2$.

Это значит, что когда $h>0$, то функция $F(x)$ поинтервального распределения обобщенных статистических вероятностей не может быть непрерывной и принимает не больше, чем $k+2$ значений.

Вместе с тем, когда $x_1 \in [a_{i_0-1}, a_{i_0})$, $x_2 \in [a_{i_0}, a_{i_{01}+1})$, то есть точки x_1 и x_2 лежат в соседних интервалах, тогда

$$F(x_2) - F(x_1) \le \max_{x\in[a,b)} f(x)\cdot h = c\cdot h,$$

так как при переходе точки x из интервала $[a_{i_0-1}, a)]$ в соседний интервал $[a_{i_0}, a_{i_0+1})$ значение функции $F(x)$ увеличивается на величину, $(1-a)P_n^*([a_{i_0-1}, a_{i_0})) + aP_n^*([a_{i_0}, a_{i_0+1})) \le c\cdot h$, поскольку к $G_* = \bigcup_{\cup H_i \subset G\cap\Omega} (\cup H_i) \subset (-\infty, x)\cap[a,b)$ добавляется еще один интервал, так же, как и к $G^* = \bigcap_{G\cap\Omega\subset\cup H_i} (\cup H_i)$. Поэтому когда $h\to 0$, тогда $x_2 \to x_1$, $F(x_2)\to F(x_1)$, то есть при неограниченном уменьшении $h>0$, $h\to 0+0$, функция роспределения обобщенных статистических вероятностей становится практически непрерывной (см. Рис. 21.11а) – 21.11д)), то есть для как угодно малых $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ будет иметь место неравенство $|F(x_2)-F(x_1)|<\delta$, когда $|x_2-x_1|\le 2h<\varepsilon$.

Кроме того, когда $h\to 0$, то и $G_*\to G$, $G^*\to G$, $\lim_{h\to 0} G_* = \lim_{h\to 0} G^* = G$, $m(G^*\setminus G_*) = m(G^*) - m(G_*) \to 0$, поэтому, учитывая формулу (21.2), для $G=(-\infty, x)$ получаем

$$F(x) = P((-\infty,x)) = P(G) = \int_{G_*} f(x)dx + \alpha\Big(\int_{G^*} f(x)dx - \int_{G_*} f(x)dx\Big) \le$$

$$\le \int_{G_*} f(x)dx + ch \underset{h\to 0}{\to} \int_G f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Функция $F(x)$, *определенная по формуле* (21.1), *называется функцией поинтервального роспределения обобщенных статистических вероятностей на множестве*

$$\tilde{\Omega} = (-\infty,\infty) \supset \Omega = [a,b) = \bigcup_{i-1}^{k} [a_{i-1}, a_i),\ \ a_i - a_{i-1} = h > 0.$$

Если плотность $f(x)$ распределения обобщенных статистических вероятностей ограничена, то есть $f(x) \le c < \infty$, тогда

$$F(x) = P(-\infty, x) = \int_{G_*} f(x)dx + \alpha\left(\int_{G^*} f(x)dx - \int_{G_*} f(x)dx\right) \underset{h\to 0}{\to} \int_{-\infty}^{x} f(x)dx .$$

Такая функция $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$ *непрерывна, а соответствующее распределение обобщенных статистических вероятностей, когда* $h \to 0$, *также называется непрерывным.*

Заметим, что когда $h > 0$ достаточно малое положительное число, $a_i = a_{i-1} + h$, тогда

$$F(a_i) - F(a_{i-1}) = P_n^*([a_{i-1}, a_i)) = f(x) \cdot h, \; x \in [a_{i-1}, a_i)) ,$$

откуда

$$f(x) = \frac{F(a_i) - F(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}}, \; x \in [a_{i-1}, a_i),$$

то есть значение усредненной плотности $f(x)$ поинтервального распределения статистических вероятностей на множестве $\Omega = [a, b) = \bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i)$ характеризует среднюю скорость возрастания функции $F(x)$ при переходе от точки $x = a_{i-1}$ к точке $x = a_i$. Если $h \to 0$, то $a_i \to a_{i-1}$ и

$$\frac{F(a_i) - F(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}} \to F'(a_i) = f(a_i),$$

то есть в случае, когда $F(x)$ - непрерывная функция на $\tilde{\Omega} = R^1$, то $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$ во всех точках $x \in [a_{i-1}, a_i) \subset (-\infty, \infty)$, для которых существует предел $\lim\limits_{a_i \to a_{i-1}} \frac{F(a_i) - F(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}}, \; x \in [a_{i-1}, a_i)$.

Пример 21.2. Если поинтервальное распределение статистических вероятностей определяется по таблице 21.4:

Табл. 21.4

$[a_{i-1}; a_i)$	$\left(0; \frac{1}{10}\right]$	$\left(\frac{1}{10}; \frac{2}{10}\right]$	$\left(\frac{2}{10}; \frac{3}{10}\right]$	$\left(\frac{3}{4}; \frac{4}{10}\right]$	$\left(\frac{4}{10}; \frac{5}{10}\right]$
$P_{100}^*([a_{i-1}; a_i))$	0.5	0.2	0.1	0.1	0.04

	$\left(\frac{5}{10}; \frac{6}{10}\right]$	$\left(\frac{6}{10}; \frac{7}{10}\right]$	$\left(\frac{7}{10}; \frac{8}{10}\right]$	$\left(\frac{8}{10}; \frac{9}{10}\right]$	$\left(\frac{9}{10}; 1\right]$
	0	0.02	0.01	0.02	0.01

то

$$F(x) = P_n^*(G_*) = \begin{cases} 0, & \text{когда} \quad x \le 0.1, \\ 0.5, & \text{когда } 0.1 < x \le 0.2, \\ 0.7, & \text{когда } 0.2 < x \le 0.3, \\ 0.8, & \text{когда } 0.3 < x \le 0.4, \\ 0.9, & \text{когда } 0.4 < x \le 0.5, \\ 0.94, & \text{когда } 0.5 < x \le 0.6, \\ 0.94, & \text{когда } 0.6 < x \le 0.7, \\ 0.96, & \text{когда } 0.7 < x \le 0.8, \\ 0.97, & \text{когда } 0.8 < x \le 0.9, \\ 0.99, & \text{когда } 0.9 < x \le 1, \\ 1, & \text{когда} \quad x > 1. \end{cases}$$

На Рис. 21.6 показан график функции поинтервального распределения обобщенных статистических (гипотетических) вероятностей, определенных по поинтервальному распределению статистических вероятностей, заданному в таблице 21.4.

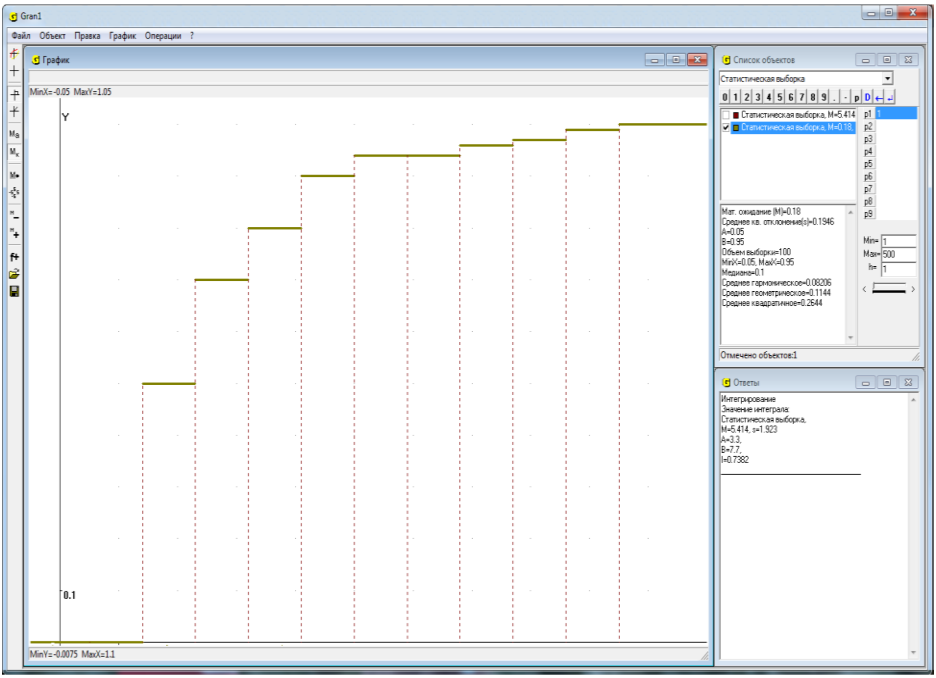


Рис. 21.6

Если

$$G = \bigcup_{i \in I} (a_{i-1}, a_i],\ \ I \subset \{1,\ 2,\ ...,k\},$$

тогда

$$P(G) = P_n^*(G) = P_n^*(\bigcup_{i \in I} (a_{i-1}, a_i]) = \sum_{i \in I} P_n^*((a_{i-1}, a_i]).$$

Таким образом, по заданной функции $F(x)$ поинтервального распределения обобщенных статистических вероятностей на множестве, $\tilde{\Omega} = (-\infty, \infty) \supset \Omega = \bigcup_{i=1}^{k} (a_{i-1}, a_i]$, $a_i - a_{i-1} = h > 0$, можно определить статистические вероятности $P_n^*((a_{i-1}, a_i])$ (относительные частоты попадания наблюдаемых значений в промежутки $(a_{i-1}, a_i])$ для любых промежутков $(a_{i-1}, a_i]$, заданных в таблице 21.4.

Поэтому через функцию $F(x)$ распределения обобщенных статистических вероятностей вполне определяется обобщенная статистическая (гипотетическая) вероятность $P(x)$ произвольного события (измеримого множества) $G \subset \tilde{\Omega}$, гипотетические вероятности попаданяя в которые вычисляются по формуле (21. 2).

Если $G = \bigcup_{i \in I} [a_{i-1}, a_i)$, $I \subset \{1,\ 2, \ldots,\ k\}$, тогда

$$P(G) = P_n^*(G) = P_n^*(\bigcup_{i \in I} [a_{i-1}, a_i)) = \sum_{i \in I} P_n^*([a_{i-1}, a_i)) \qquad (21.3)$$

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, S, P_n^*), $\tilde{\Omega} = (-\infty, \infty)$, $\tilde{S} = \mathscr{B}(R^1)$ - совокупность подмножеств множества $\tilde{\Omega}$, удовлетворяющего требования 1_s-3_s, в частности к $\tilde{S}$ относятся подмножества $(-\infty, x) \subset \tilde{\Omega}$ для произвольных $x \in (-\infty, \infty)$, $S \subset \tilde{S}$.

Обозначим через $\bigcup_{A \subset (-\infty, x)} A$ сумму всех событий A из S таких, что $A \subset (-\infty, x) \in \tilde{S}$. Очевидно такая сумма $\bigcup_{A \subset (-\infty, x)} A$ будет входить в совокупность S, то есть будет событием.

Положим

$$F_n^*(x) = \tilde{P}_n^*((-\infty, x)) = P_n^*\left(\bigcup_{A \subset (-\infty, x)} A \right),\ A \in S,\ (-\infty, x) \in \tilde{S}.$$

Очевидно, функция $F_n^*(x)$ определена для всех $x \in (-\infty, \infty)$.

Легко видеть, что функция $F_n^*(x)$ удовлетворяет такие свойства:

1. $F_n^*(x) \geq 0$ как статистическая вероятность некоторого события.

2. $F_n^*(-\infty) = 0$ как статистическая вероятность невозможного события, поскольку для произвольного Ω

$$\bigcup_{A \subset (-\infty, -\infty)} A = \varnothing, \text{ ибо } (-\infty, -\infty) = \varnothing.$$

3. Для произвольного $x \in (-\infty, \infty)$

$$m_*((-\infty, x)) = \max_{\bigcup A \subset (-\infty, x) \bigcap \Omega} P_n^*(\bigcup A) \leq F_n^*(x) \leq \min_{(-\infty, x) \bigcap \Omega \subset \bigcup A} P_n^*(\bigcup A) =$$

$$= m^*((-\infty, x)), \; A \in S.$$

4. Функция $F_n^*(x)$ неубывающая, то есть если $u < v$, то $F_n^*(u) \leq F_n^*(v)$.

В самом деле, пусть $u < v$. Тогда

$$\bigcup_{A \subset (-\infty, u)} A \subset \bigcup_{A \subset (-\infty, v)} A, \; A \in S,$$

Поэтому по свойствам вероятностной меры

$$P_n^*\left(\bigcup_{A \subset (-\infty, u)}\right) \leq P_n^*\left(\bigcup_{A \subset (-\infty, v)}\right),$$

То есть $F_n^*(u) \leq F_n^*(v)$.

Очевидно

$$P_n^*\left(\bigcup_{A \subset (-\infty, v)} A \setminus \bigcup_{A \subset (-\infty, u)} A\right) =$$
$$= P_n^*\left(\bigcup_{A \subset (-\infty, v)} A\right) - P_n^*\left(\bigcup_{A \subset (-\infty, u)} A\right) = F_n^*(v) - F_n^*(u) \tag{21.4}$$

Вместе с тем не исключено, чо $\bigcup_{A \subset (-\infty, v)} A \setminus \bigcup_{A \subset (-\infty, u)} A \neq \varnothing$, однако $\bigcup_{A \subset [u, v)} A = \varnothing$. Например, когда $\Omega = [a, b)$, пространство событий S породжено делением множества Ω на подмножества $[a_{i-1}, a_i),$, $i \in \overline{1, k}$, такие, что $\bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i) = \Omega$, $A = \bigcup_{i \in I} [a_{i-1}, a_i) \in S$, $I \subset \{1, 2, \ldots, k\}$, то есть,

$S = \{A | A = \bigcup_{i\in I} [a_{i-1}, a_i),\ I \subset \{1, 2, \dots , k\}\}$, $a_{i-1} < u < a_i$, $a_i < v < a_{i+1}$, тогда будет $\bigcup_{A\subset(-\infty,v)} A \setminus \bigcup_{A\subset(-\infty,u)} A = [a_{i-1}, a_i)$, однако $\bigcup_{A\subset[u,v)} A = \varnothing$, так как ни один из промежутков $[a_{i-1}, a_i)$ не есть подмножеством промежутка $[u, v)$. Поэтому не исключено, что

$$P_n^*\left(\bigcup_{A\subset[u,v)} A\right) \neq P_n^*\left(\bigcup_{A\subset(-\infty,v)} A\right) - P_n^*\left(\bigcup_{A\subset(-\infty,u)} A\right) = F_n^*(v) - F_n^*(u).$$

Так как $\bigcup_{A\subset[u,v)} A \subset \bigcup_{A\subset(-\infty,v)} A \setminus \bigcup_{A\subset(-\infty,u)} A$, то

$$P_n^*\left(\bigcup_{A\subset[u,v)} A\right) \leq P_n^*\left(\bigcup_{A\subset(-\infty,v)} A \setminus \bigcup_{A\subset(-\infty,u)} A\right) =$$

$$= P_n^*\left(\bigcup_{A\subset(-\infty,v)} A\right) - P_n^*\left(\bigcup_{A\subset(-\infty,u)} A\right) = F_n^*(v) - F_n^*(u).$$

Заметим, что записи вида $P_n^*([u, v)) = F_n^*(v) - F_n^*(u)$, $F_n^*(x) = P_n^*((-\infty, x))$ и т.п. могут оказаться некорректными, если множества $[u, v)$, $(-\infty, x)$ и т.п. не являются элементами пространства событий *S*, то есть не являются событиями, так как вероятностная мера P_n^* определена лишь на элементах совокупности *S* подмножеств множества Ω, то есть на событиях *A* из пространства событий *S*.

Из равенства (21.4) следует, что и для поточечного распределения статистических вероятностей на конечном множестве $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, когда как события $A \in S$ вместе с пустым множеством $\varnothing$ рассматриваются всевозмодные объединения $A = \bigcup_{i\in I} H_i$, $I \subset \{1, 2, ..., k\}$, $k \leq m$, подмножеств H_i множества Ω таких, что $H_i H_j = \varnothing$, когда $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = \Omega$ (в частности H_i могут быть одноэлементными подмножествами множества Ω), и для поинтервального распределения статистических вероятностей на бесконечном непрерывном множестве $\Omega = [a, b)$, когда как события $A \in S$ вместе с пустым множеством $\varnothing$ рассматриваются всевозможные объединения $A = \bigcup_{i\in I} (a_{i-1}, a_i]$, , $I \subset \{1, 2, ..., k\}$, интервалов $(a_{i-1}, a_i]$ таких, что $(a_{i-1}, a_i] \bigcap (a_{j-1}, a_j] = \varnothing$, , когда $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{k} (a_{i-1}, a_i] = \Omega$, функция $F_n^*(x)$ кусочно постоянна, то есть принимает одно и то же значение во всех точках x из промежутка $(u,v]$, , если $P_n^*\left(\bigcup\limits_{A\subset(-\infty,v)} A \setminus \bigcup\limits_{A\subset(-\infty,u)} A\right)=0$, в частности когда $\bigcup\limits_{A\subset(-\infty,v)} A \setminus \bigcup\limits_{A\subset(-\infty,u)} A=\varnothing$.

Очевидно, когда $\Omega=\{x_1,x_2,...,x_k\}$, $A=\bigcup\limits_{i\in I}\{x_i\}\in S$, $I\subset\{1,2,...,k\}$, и $u\in\{x_1,x_2,...,x_k\}$, $v\in\{x_1,x_2,...,x_k\}$, или когда $\Omega=[a,b)=\bigcup\limits_{i=1}^{k}[a_{i-1},a_i)$, $A=\bigcup\limits_{i\in I}[a_{i-1},a_i)\in S$, $I\subset\{1,2,...,k\}$, и $u\in\{a_0,a_1,...,a_k\}$, $v\in\{a_0,a_1,...,a_k\}$, тогда будет $[u,v)\in S$ и $P_n^*([u,v))=F_n^*(v)-F_n^*(u)$.

Пример 21.3. Пусть на множестве $\Omega=\{1,2,3,4,5\}$ задано поточечное распределение статистических вероятностей через ряд распределения

x_i	1	2	3	4	5
$P_n^*(\{x_i\})$	0.05	0.20	0.50	0.20	0.05

Как события вместе с пустым множеством $\varnothing$ будем рассматривать всевозможные объединения $A=\bigcup\limits_{i\in I}\{x_i\}$, $I\subset\{1,2,3,4,5\}$, $x_i=i$, $i\in\overline{1,5}$, то есть всевозможные подмножества множества $\Omega=\{1,2,3,4,5\}$. Таким образом $S=\{A\,|\,A=\bigcup\limits_{i\in I}\{x_i\},\ I\subset\{1,\ 2,\ ...,\ 5\}\}$.

Тогда для данного распределения статистических вероятностей будет:

1) $F_n^*(x)=0$, когда $x\le 1$, так как ни одно из непустых подмножеств $\bigcup\limits_{i\in I}\{x_i\}$, $I\subset\{1,2,3,4,5\}$, $I\ne\varnothing$, множества Ω не есть подмножеством множества $(-\infty,1)$;

2) когда будет $1<x\le 2$, тогда во множество $(-\infty,x)$ будет входить подмножество $\{1\}$ множества Ω, и поэтому

$$F_n^*(x)=P_n^*(\{1\})=0.05,\ \text{когда}\ 1<x\le 2;$$

3) когда x будет изменятся в пределах от 2 до 3 включительно, то есть будет $2<x\le 3$, тогда во множество $(-\infty,x)$ будут входить подмножества $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$, которые есть элементами совокупности S, то есть событиями, и объединение которых $\{1\}\bigcup\{2\}\bigcup\{1,2\}$ будет множеством, являющимся элементом совокупности S, то есть событием, и кроме того будет подмножеством множества $(-\infty,x)$, когда $x\in(2,3]$. Поэтому

$$F_n^*(x) = P_n^*\left(\bigcup_{A\subset(-\infty,\,x)} A\right) = P_n^*(\{1\}\cup\{2\}\cup\{1,2\}) = P_n^*(\{1,2\}) =$$

$$= P_n^*(\{1\}) + P_n^*(\{2\}) = 0.25,$$

когда $2 < x \le 3$, то есть $F_n^*(x) = 0.25$, когда $2 < x \le 3$.

Рассуждая аналогично, найдем

4) $F_n^*(x) = 0.75$, когда $3 < x \le 4$;

5) $F_n^*(x) = 0.95$, когда $4 < x \le 5$;

6) $F_n^*(x) = 1.00$, когда $5 < x$.

Окончательно получаем

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{когда } x \le 1, \\ 0.05, & \text{когда } 1 < x \le 2, \\ 0.25, & \text{когда } 2 < x \le 3, \\ 0.75, & \text{когда } 3 < x \le 4, \\ 0.95, & \text{когда } 4 < x \le 5, \\ 1.00, & \text{когда } 5 < x. \end{cases}$$

График функции $F_n^*(x)$ для заданного дискретного поточечного распределения статистических вероятностей на конечном множестве точек $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ показан на Рис. 21.7.

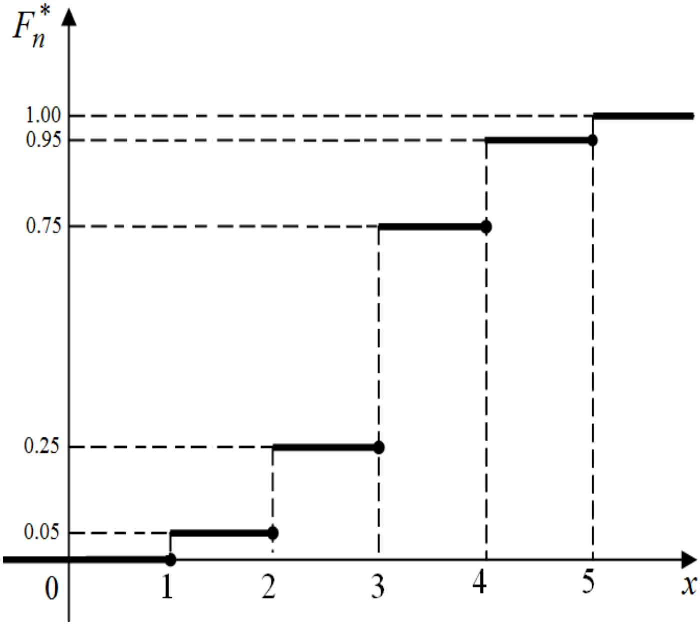


Рис. 21.7

Подчеркнем, что в данном примере множества вида $(-\infty, x)$ не есть событиями относительно вероятносного пространства (Ω, S, P_n^*), так как таких множеств нет в совокупности S подмножеств рассматриваемого множества Ω, то есть в пространстве событий, в которое вместе с пустым множеством $\varnothing$ ввключены подмножества $\bigcup\limits_{i \in I} \{x_i\}$, $I \subset \{1,2,3,4,5\}$, множества Ω, а поэтому записи вида $F_n^*(x) = P_n^*((-\infty, x))$ в рассматриваемом случае некорректны.

Пример 21.4. Пусть на множестве $\Omega = (0,5]$ задано поинтервальное распределение статистических вероятностей

$(a_{i-1}, a_i]$	$(0,1]$	$(1,2]$	$(2,3]$	$(3,4]$	$(4,5]$
$P_n^*((a_{i-1}, a_i])$	0.05	0.20	0.50	0.20	0.05

График усредненной плотности $f_n^*(x)$ этого распределения статистических вероятностей по интервалам $(i-1, i]$, $i \in \overline{1,5}$, на множестве $\Omega = (0,5] = (0,1] \cup (1,2] \cup (2,3] \cup (3,4] \cup (4,5]$ показан на Рис. 21.8.

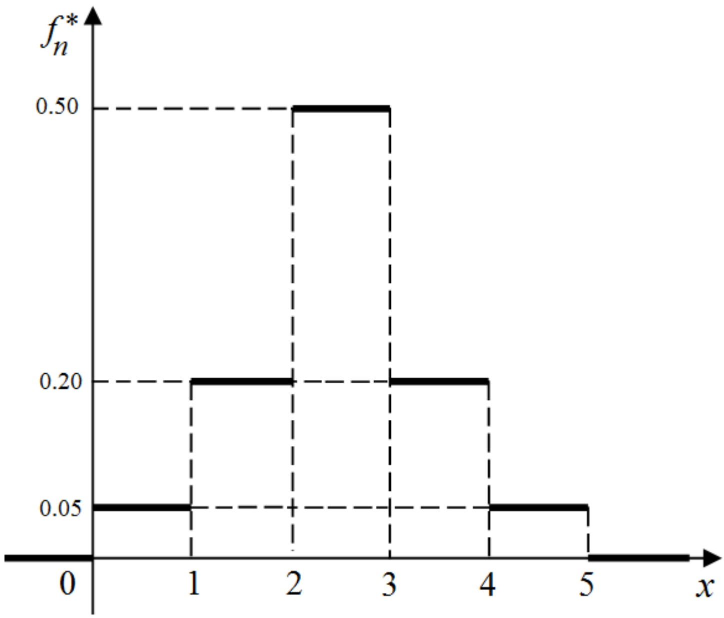


Рис. 21.8

Как события вместе с пустым множеством $\varnothing$ будем рассматривать всевозможные объединения интервалов $(a_{i-1}, a_i]$, то есть $S = \{A \mid A = \bigcup_{i \in I} (a_{i-1,} a_i]\ ,\ I \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}\}$

Пусть $\tilde{\Omega} = (-\infty, \infty) \supset \Omega$, $\tilde{S} = \mathscr{B}(R^1) \supset S$. Тогда, учитывая формулу $F_n^{\ *}(x) = \tilde{P}_n^{\ *}((-\infty, x)) = P_n^{\ *}(\bigcup_{A \subset (-\infty, x)} A), \quad A \in S,\ (-\infty, x) \in \tilde{S} = B(R^1),$ для данного поинтервального распределения статистических вероятностей получим: $F_n^*(x) = 0$, когда $x \le 1$, так как ни одно из подмножеств $A = \bigcup_{i \in I} (a_{i-1}, a_i] \in S, \quad I \subset \{1,2,3,4,5\}$, $I \ne \varnothing$, не есть подмножеством множества $(-\infty, x)$, когда $x \le 1$. Когда x будет в пределах от 1 до 2 включительно, то есть $x \in (1,2]$, тогда интервал $(0,1]$ будет подмножеством множества $(-\infty, x)$, и поэтому для $x \in (1,2]$ будет

$$F_n^*(x) = P_n^*([0,1)) = \int_0^1 f_n^*(x)dx = 0.05 \text{, когда } x \in (1,2].$$

Когда x будет в пределах от 2 до 3 включительно, то есть $x \in (2,3]$, тогда сумма событий $(0,1] \in S,\quad (1,2] \in S,\quad (0,1] \bigcup (1,2] \in S,$ то есть $(0,1] \bigcup (1,2] \bigcup ((0,1] \bigcup (1,2]) \in S$ будет подмножеством множества $(-\infty, x)$, $x \in (2,3]$, поэтому

$$\begin{aligned} F_n^*(x) &= P_n^*((0,1] \cup (1,2] \cup ((0,1] \cup (1,2])) = \\ &= P_n^*((0,1] \cup (1,2]) = P_n^*((0,1]) + P_n^*((1,2]) = \\ &= \int_0^1 f_n^*(x)dx + \int_1^2 f_n^*(x)dx = 0.05 + 0.20 = 0.25, \end{aligned}$$

когда $x \in (2,3]$.

Рассуждая аналогично, найдем

$$F_n^*(x) = 0.75 \text{, когда } x \in (3;4];$$

$$F_n^*(x) = 0.95 \text{, когда } x \in (4;5];$$

$$F_n^*(x) = 1.00 \text{, когда } x \in (5;+\infty).$$

Таким образом

$$F_n^*(x)=\begin{cases}0, & \text{когда } x\le 1,\\ 0.05, & \text{когда } 1<x\le 2,\\ 0.25, & \text{когда } 2<x\le 3,\\ 0.75, & \text{когда } 3<x\le 4,\\ 0.95, & \text{когда } 4<x\le 5,\\ 1.00, & \text{когда } 5<x.\end{cases}$$

Вид графика так определенной функции $F_n^*(x)$ поинтервального распределения обобщенных статистических вероятностей на множестве $\widetilde{\Omega}=(-\infty,\infty)\supset\Omega=(0,5]$, рассматриваемого в примере 21.4, будет такой же, как и вид графика функции $F_n^*(x)$ дискретного поточечного распределения статистических вероятностей на конечном множестве $\Omega=\{1,2,3,4,5\}$, рассматриваемого в примере 21.3 (см. Рис. 21.7, Рис. 21.11 а)). Одинаковый вид имеют и представления самих функций $F_n^*(x)$ распределения обобщенных статистических вероятностей в обоих рассматриваемых в примерах 21.3 и 21.4 случаях.

Поэтому в случаях рассматриваемого способа построения пространства событий S, $S=\{A\,|\,A=\bigcup\limits_{i\in I}H_i,\,I\subset\{1,\,2,\,\ldots,\,k\}\}$, *когда как события вместе с пустым множеством* $\varnothing$ *рассматриваются всевозможные объединения* $A=\bigcup\limits_{i\in I}H_i\in S$, $I\subset\{1,2,\ldots,k\}$, *подмножеств* (*возможно одноточечных*) H_i, $i\in\overline{1,k}$, *конечного множества* $\Omega=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$, $(k\le m)$, *или всевозможные объединения подмножеств* $H_i=(a_{i-1},a_i]$, $i\in\overline{1,k}$, *бесконечного непрерывного множества* $\Omega=(a,b]$, *таких, что* $H_iH_j=\varnothing$, *когда* $i\ne j$, $\bigcup\limits_{i=1}^{k}H_i=\Omega$, *и* $(-\infty,x)\,\overline{\in}\,S$ *для произвольных* $x\in(-\infty,\infty)$, *по виду описания функции* $F_n^*(x)$ *распределения обобщенных статистических вероятностей невозможно определить, рассматривается поточечное распределение статистических вероятностей на конечном множестве* $\Omega=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$, *или поинтервальное распределение статистических вероятностей на бесконечном непрерывном множестве*

$$\Omega=(a,b]=\bigcup_{i=1}^{k}(a_{i-1},a_i],\ (a_{i-1},a_i]\bigcap(a_{j-1},a_j]=\varnothing\ \text{когда}\ i\ne j\,.$$

Пример 21.5. Пусть на множестве $\Omega = (0,5]$ задано поинтервальное распределение статистических вероятностей такое же, как и в примере 21.4, а пространство событий *S* порождено делением множества Ω на 25 интервалов ддлиной 0.2, то есть как события вместе с пустым множеством $\varnothing$ рассматриваются всевозможные объединения $\bigcup\limits_{i\in I}(a_{i-1}, a_i]$, $I \subset \{1,2,...,25\}$, интервалов $(a_{i-1}, a_i]$, $i \in \overline{1,25}$, $a_0 = 0$, $a_i - a_{i-1} = 0.2$.

Это значит, что рассматривается новое пространство событий $\hat{S} = \{A \mid A = \bigcup\limits_{i\in I}(a_{i-1}, a_i], \quad I \subset \{1, 2, \ldots, 25\}\}$, порожденное совокупностью промежутков $(a_{i-1}, a_i]$, $i \in \overline{1,25}$, элементами которого есть множества вида $A = \bigcup\limits_{i\in I}(a_{i-1}, a_i]$, $I \subset \{1,2,...,25\}$. Очевидно, все события пространства *S*, рассматриваемого в примере 21.4, являются также и элементами пространства $\hat{S}$, то есть $S \subset \hat{S}$. Новую вероятностную меру $\hat{P}_n^*$ на пространстве событий $\hat{S}$ определим по формуле

$$\hat{P}_n^*(A) = \int\limits_A f_n^*(x)dx = \sum_{x\in(a_{i-1},a_i]\subset A} f_n^*(x)\cdot(a_i - a_{i-1}), \quad A \in \hat{S} ,$$

где $f_n^*(x)$ – плотность распределения статистических вероятностей такая же, как и в примере 21.4 (см. Рис. 21.8, Рис. 21.9).

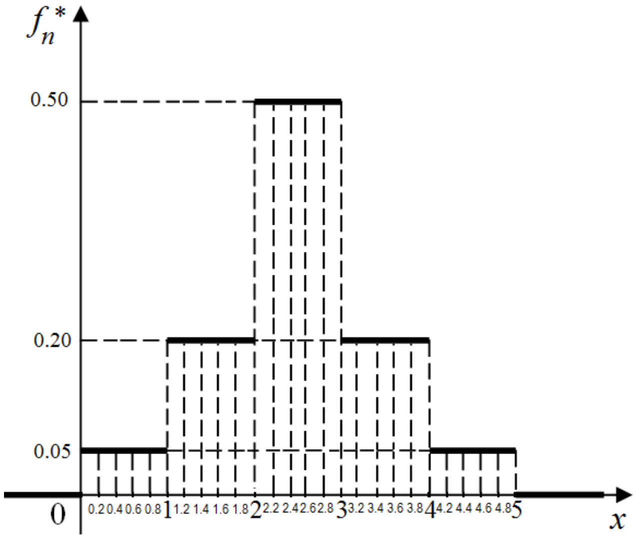


Рис. 21.9

Очевидно, при той же усредненной плотности $f_n^*(x)$ распределения статистическиих вероятностей, что и в примере 21.4, статистические вероятности попадания в промежутки, полученные делением промежутков из примера 21.4 на 5 промежутков однаковой длины, в 5 раз меньшей, чем длины исходных промежутков, будут в 5 раз меньше, чем статистические вероятности попадания в исходные промежутки, и будут, как и раньше, вычисляться по формуле

$$\hat{P}_n^*((a_{i-1},\, a_i]) = f_n^*(x)(a_i - a_{i-1}),\ i \in \overline{1{,}25}.$$

Очевидно, $\hat{P}_n^{\,*}(A) = P_n^{\,*}(A)$, когда $A \in S$. В таком случае говорят, что мера $\hat{P}_n^*(A)$, $A \in \hat{S}$, есть продолжением меры $P_n^*(A)$, $A \in S$, из пространства S на пространство $\hat{S}$.

Если промежутки $(a_{i-1},\, a_i]$, из которых составляются события $A = \bigcup_{i\in I}((a_{i-1},\, a_i] \in \hat{S}$, $I \subset \{1, 2, \ldots, 25\}$, поделить каждый на какое нибудь число еще более мелких промежутков однаковой длины, получим новое пространство событий $\hat{\hat{S}}$ и новую вероятностную меру $\hat{\hat{P}}_n^{\,*}$ вполне аналогично предыдущему. Такое измельчение промежутков $(a_{i-1},\, a_i]$ можно продолжать как угодно долго до тех пор, пока разность $h = a_i - a_{i-1}$ станет меньше, чем любое как угодно малое наперед заданное число $\varepsilon > 0$. В результате каждого уменьшения длины $h = a_i - a_{i-1}$ промежутков $(a_{i-1},\, a_i]$, одинаковой для всех i, будем получать все новые и новые вероятностные пространства $(\Omega, S^{(j)}, P_n^{*(j)})$, $j \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, (с одними и теми же Ω и $f_n^*(x)$).

Очевидно, функция $F_n^*(x)$ будет принимать постоянные значения на промежутках $(a_{i-1}, a_i]$, $i \in \overline{1{,}25}$, и при переходе через точку a_i будет получать приращение

$$f_n^*(x)\cdot(a_i - a_{i-1}),\ x \in (a_{i-1}, a_i]. \qquad (21.5)$$

Рассуждая аналогично тому, как это было сделано в примере 21.4 при построении функции $F_n^*(x)$ поинтервального распределения обобщенных статистичеих вероятностей на множестве $\Omega = (0{,}5]$ по интервалам $(0{,}1]$, $(1{,}2]$, $(2{,}3]$, $(3{,}4]$, $(4{,}5]$, в рассматриваемом примере получим:

$F_n^*(x) = 0$, когда $x \le 0.2$, $F_n^*(x) = 0.01$, когда $0.2 < x \le 0.4$,

$F_n^*(x) = 0.02$, когда $0.4 < x \le 0.6$, $F_n^*(x) = 0.03$, когда $0.6 < x \le 0.8$,

$F_n^*(x) = 0.04$, когда $0.8 < x \le 1.0$, $F_n^*(x) = 0.05$, когда $1.0 < x \le 1.2$,

$F_n^*(x) = 0.09$, когда $1.2 < x \le 1.4$, $F_n^*(x) = 0.13$, когда $1.4 < x \le 1.6$,

$F_n^*(x) = 0.17$, когда $1.6 < x \le 1.8$, $F_n^*(x) = 0.21$, когда $1.8 < x \le 2.0$,

$F_n^*(x) = 0.25$, когда $2.0 < x \le 2.2$, $F_n^*(x) = 0.35$, когда $2.2 < x \le 2.4$,

$F_n^*(x) = 0.45$, когда $2.4 < x \le 2.6$, $F_n^*(x) = 0.55$, когда $2.6 < x \le 2.8$,

$F_n^*(x) = 0.65$, когда $2.8 < x \le 3.0$, $F_n^*(x) = 0.75$, когда $3.0 < x \le 3.2$,

$F_n^*(x) = 0.79$, когда $3.2 < x \le 3.4$, $F_n^*(x) = 0.83$, когда $3.4 < x \le 3.6$,

$F_n^*(x) = 0.87$, когда $3.6 < x \le 3.8$, $F_n^*(x) = 0.91$, когда $3.8 < x \le 4.0$,

$F_n^*(x) = 0.95$, когда $4.0 < x \le 4.2$, $F_n^*(x) = 0.96$, когда $4.2 < x \le 4.4$,

$F_n^*(x) = 0.97$, когда $4.4 < x \le 4.6$, $F_n^*(x) = 0.98$, когда $4.6 < x \le 4.8$,

$F_n^*(x) = 0.99$, когда $4.8 < x \le 5.0$, $F_n^*(x) = 1.00$, когда $5.0 < x$.

На Рис. 21.11 б) показан график так определенной функции $F_n^*(x)$ поинтервального распределения обобщенных статистических вероятностей на множестве $\Omega = \bigcup_{i=1}^{25} (a_{i-1}, a_i]$, $a_0 = 0$, $a_i - a_{i-1} = 0.2$, $i \in \overline{1,25}$, по интервалам $(a_{i-1}, a_i]$, $i \in \overline{1,25}$, с плотностью (см. Рис. 21.9, Рис. 21.10).

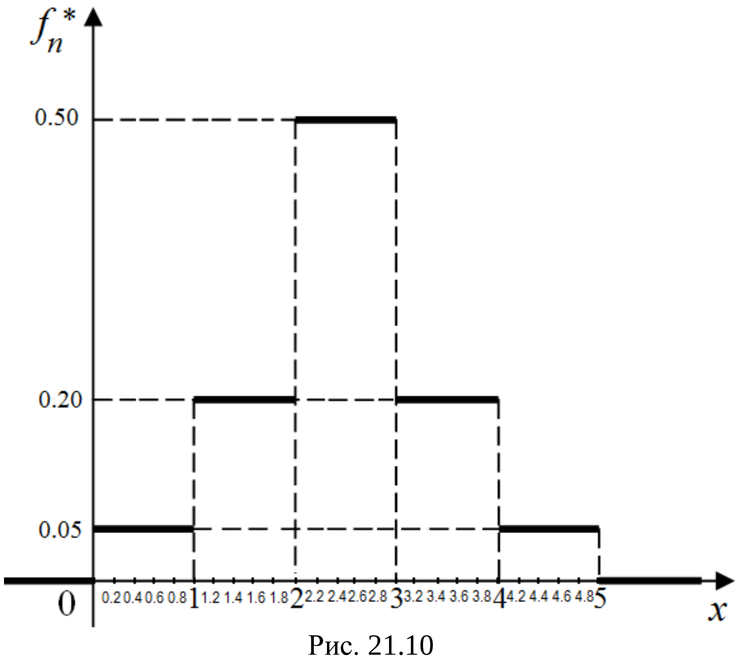


Рис. 21.10

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{когда } x \overline{\in} (a_0, a_{25}], \\ 0.05, & \text{когда } x \in (0,1] \bigcup (4,5], \\ 0.20, & \text{когда } x \in (1,2] \bigcup (3,4], \\ 0.50, & \text{когда } x \in (2,3]. \end{cases}$$

Заметим, что в программе GRAN1 предусмотрена услуга, с помощью которой с измельчением интервалов $(a_{i-1}, a_i]$ (за счет увеличения их количества) автоматически перестраивается график функции $F(x)$ соответствующего поинтервального распределения обобщенных статистических вероятностей (см. Рис. 21.11 а) - Рис. 21.11 д)).

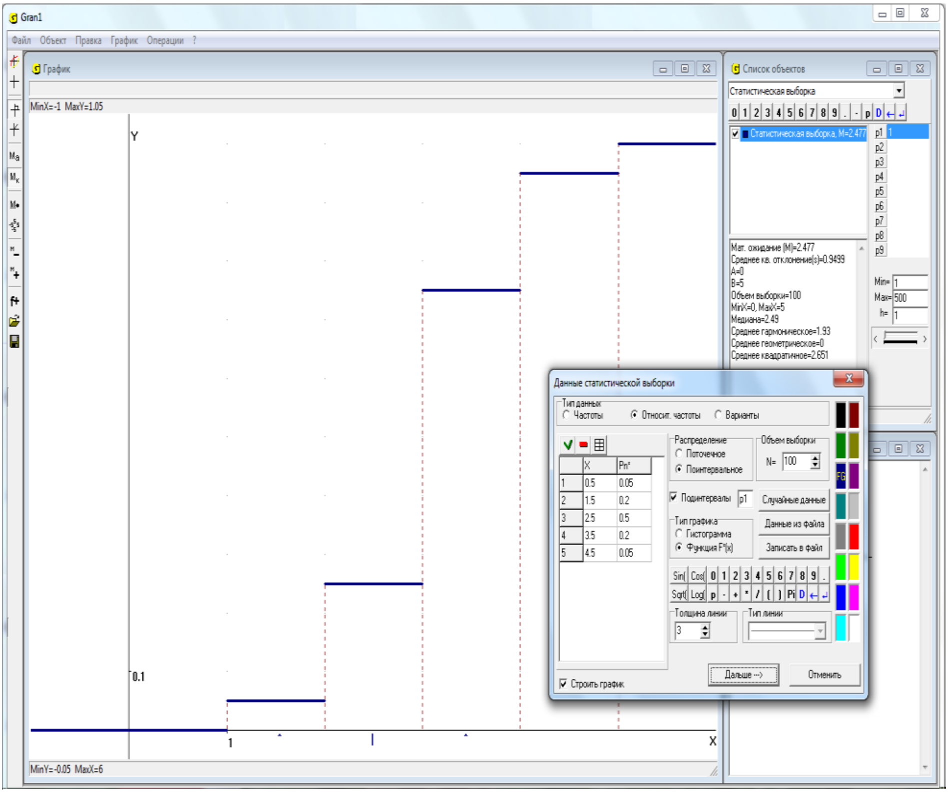


Рис. 21.11 а)

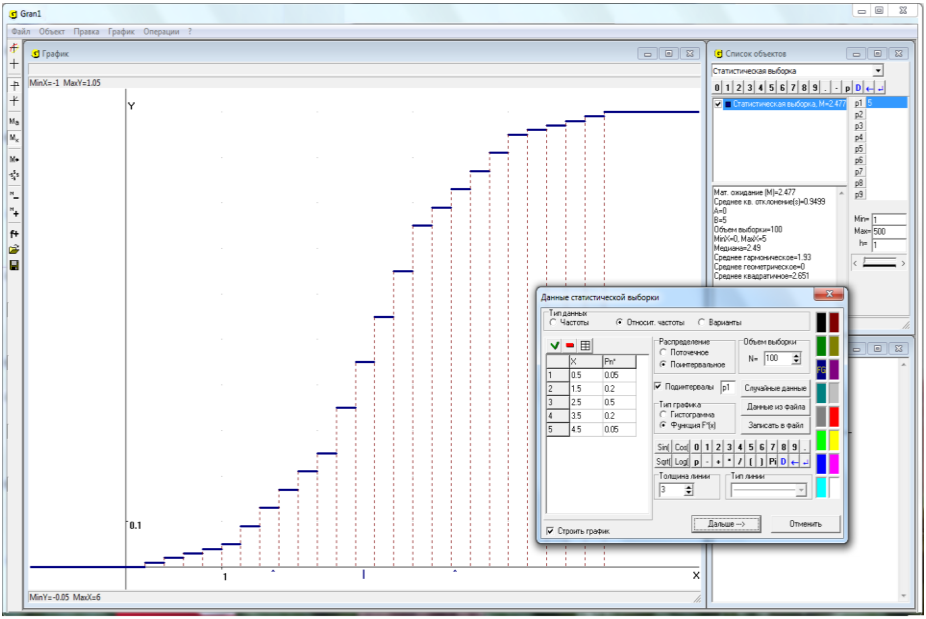


Рис. 21.11 б)

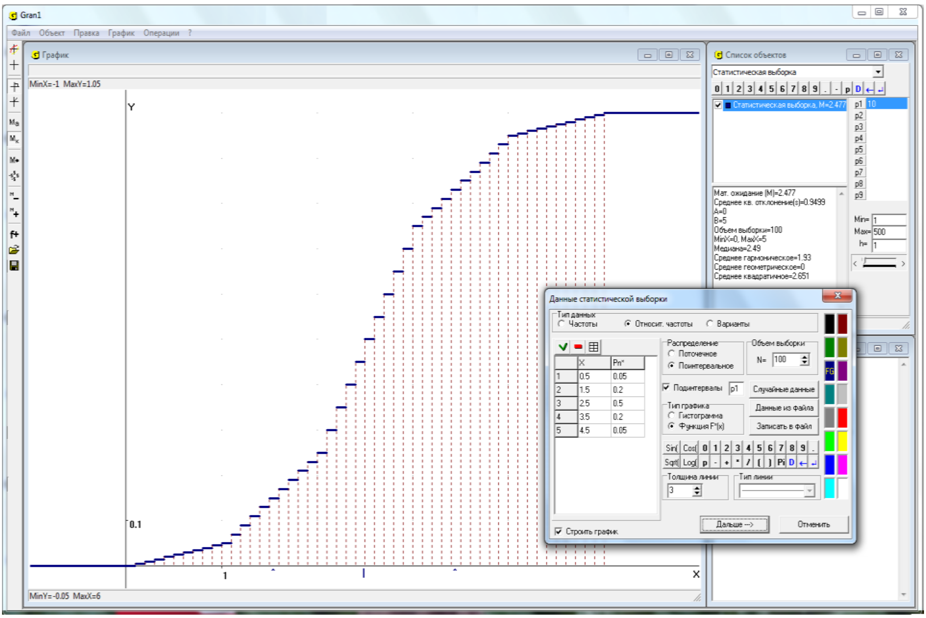


Рис. 21.11 в)

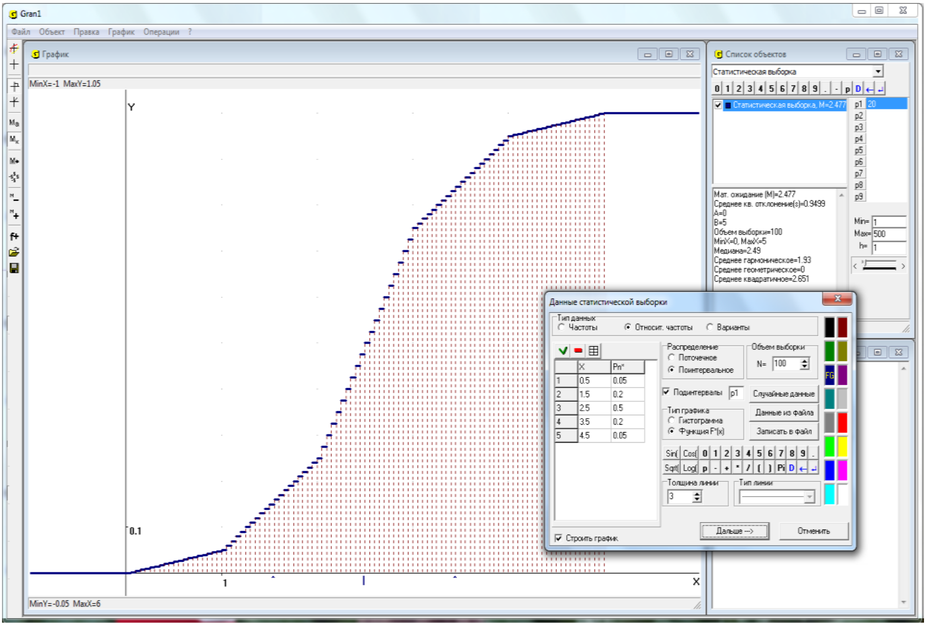


Рис. 21.11 г)

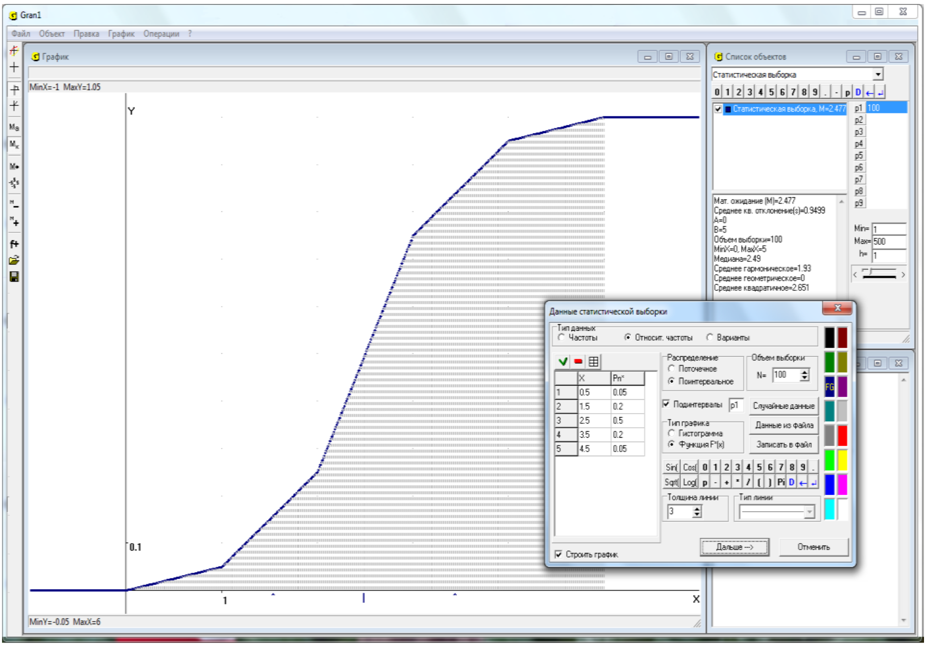


Рис. 21.11 д)

Для увеличения или уменьшения количества интервалов за счет их измельчения или укрупнения, достаточно, используя услуги программы GRAN1, увеличивать или уменьшать значение соответствующего параметра $P \in \{P1, P2, ..., P9\}$, вибрав шаг его изменения h равным 1, чтобы количество интервалов было целым числом (см. Рис. 21.11 б)).

На Рис. 21.11 а) показан график функции $F_n^*(x)$ поинтервального распределения обобщенных статистических вероятностей на промежутке $(0,5]$, когда $h=1$, а $f_n^*(x)$ из примера 21. 4 (Рис. 21.10), а на Рис. 21.11 б) - Рис. 21.11 д) показаны графики функций $F_n^*(x)$ поинтервальных распределений обобщенных статистических вероятностей на том же самом промежутке $(0,5]$, когда длину интервала уменьшено соответственно в 5 раз (Рис. 21.11 б)), в 10 раз (Рис. 21.11 в)), в 20 раз (Рис. 21.11 г)), в 100 раз (Рис. 21.11 д)) (см. значение параметра $P1$ на рисунках), а $f_n^*(x)$ такая же, как и раньше (Рис. 21.10).

Заметим, что когда для произвольных $x \in (-\infty, \infty)$ множества $(-\infty, x)$ есть событиями, то есть элементами пространства событий S, $(-\infty, x) \in S$, что означает, что как пространство элементарных событий рассматривается множество $\Omega = R^1 = (-\infty, \infty)$, а как пространство событий – $\mathscr{B}(R^1)$, тогда формула (21.1) принимает вид $F_n^*(x) = P_n^*((-\infty, x))$, $x \in (-\infty, \infty)$. *В таком случае по виду функции* $F_n^*(x)$ *можно определить, через такую функцию описывается поточечное распределения статистических вероятностей на конечном множестве точек* $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \subset \Omega = (-\infty, \infty)$, *или поинтервальное распределение статистических вероятностей на непрерывном множестве* $[a,b) \subset \Omega = (-\infty, \infty)$.

Пример 21.6. Для поточечного распределения статистических вероятностей на конечном множестве $\{1,2,3,4,5\} \subset \Omega = (-\infty, \infty)$, рассматриваемого в примере 21.3, при условии $(-\infty, x) \in S$ для произвольного $x \in (-\infty, \infty)$ функция распределения статистических вероятностей

$$F_n^*(x) = P_n^*((-\infty, x)),\ (-\infty, x) \in S,\ x \in (-\infty, \infty),$$

будет кусочно постоянной и будет иметь тот же вид, что и раньше, то есть

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{когда } x \le 1, \\ 0.05, & \text{когда } 1 < x \le 2, \\ 0.25, & \text{когда } 2 < x \le 3, \\ 0.75, & \text{когда } 3 < x \le 4, \\ 0.95, & \text{когда } 4 < x \le 5, \\ 1.00, & \text{когда } 5 < x. \end{cases}$$

График этой функции имеет тот же вид, что и на Рис. 21.7.

Вместе с тем, для поинтервального распределения статистических вероятностей на множестве $(0,5] \subset \Omega = (-\infty, \infty)$, рассмотренного в примере 21.4, при условии $(-\infty, x) \in S = \mathscr{B}(R^1)$ для произвольного $x \in (-\infty, \infty)$, функция распределения статистических вероятностей

$$F_n^*(x) = P_n^*((-\infty, x)) = \int_{-\infty}^{x} f_n^*(x)dx, \; (-\infty, x) \in S, \; x \in (-\infty, \infty),$$

будет непрерывной и иметь вид

$$F_n^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n^*(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{когда } x \le a_0, \\ f_n^*(x) \cdot (x - a_0), & \text{когда } x \in (a_0, a_1], \\ \sum_{i=1}^{j-1} P_n^*((a_{i-1}, a_i]) + f_n^*(x)(x - a_{j-1}), & \\ & \text{когда } x \in (a_{j-1}, a_j], 2 \le j \le k, \\ 1, & \text{когда } a_k < x, \end{cases}$$

То есть для приведенных данных будет

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{когда } x \le 0, \\ 0.05x, & \text{когда } 0 < x \le 1, \\ 0.05 + 0.20(x-1), & \text{когда } 1 < x \le 2, \\ 0.25 + 0.50(x-2), & \text{когда } 2 < x \le 3, \\ 0.75 + 0.20(x-3), & \text{когда } 3 < x \le 4, \\ 0.95 + 0.05(x-4), & \text{когда } 4 < x \le 5, \\ 1, & \text{когда } 5 < x. \end{cases}$$

График последней функции $F_n^*(x)$ показан на Рис. 21.12.

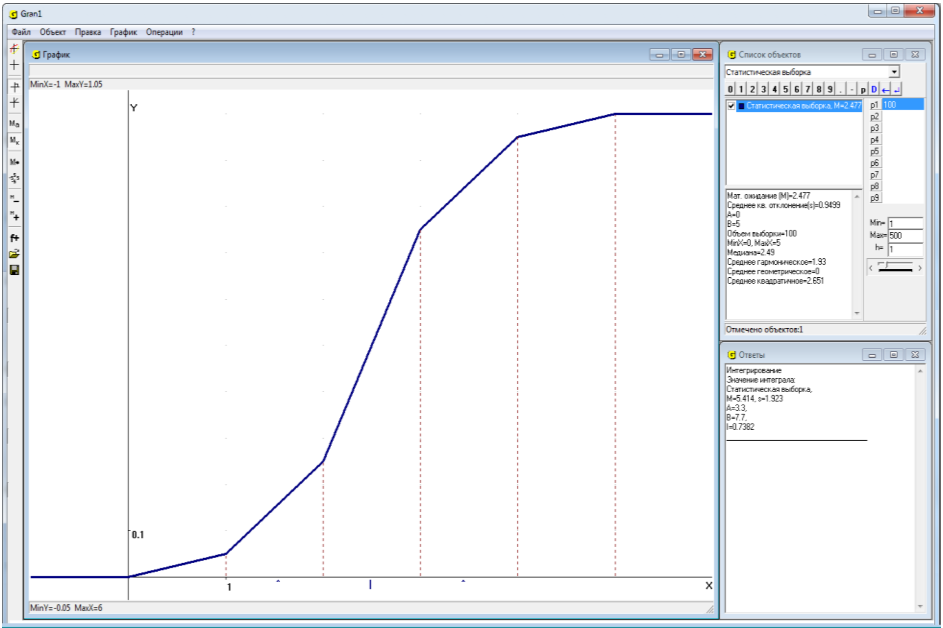


Рис. 21.12

Заметим, что когда усредненная плотность $f_n^*(x)$ поинтервального распределения обобщенных статистических вероятностей задана на интервалах $(a_{i-1}, a_i]$, $i \in \overline{1,k}$, фиксированной длины h, таких, что

$$(a_{i-1}, a_i] \bigcap (a_{j-1}, a_j] = \varnothing, \text{, когда } i \neq j, \quad \bigcup_{i=1}^{k} (a_{i-1}, a_i] = \Omega, \quad a_i - a_{i-1} = h$$

(например, на интервалах длины $h = 1$, как в примере 21.4, см. Рис. 21.8), а пространство событий S порождается делением множества Ω на все более и более мелкие интервалы такие, что длина наибольшего из них становится все меньше и меньше (см. пример 21.5, Рис. 21.11 а) – Рис. 21.11 д)), тогда функция $F_n^*(x)$ такого поинтервального распределения обобщенных статистических вероятностей с указанной плотностью $f_n^*(x)$ при все большем и большем измельчении интервалов, из которых составляются события $A \in S$, все меньше и меньше будет отличаться от непрерывной функции $F_n^*(x)$ поинтервального распределения статистических вероятностей, построенной при условии, что как события рассматриваются всевозможные множества $(-\infty, x)$, $x \in (-\infty, \infty)$, то есть множества $(-\infty, x)$ есть элементами пространства событий $S = \mathscr{B}(R^1)$ (см.

примеры 21.5, 21.6).

Заметим, что *когда* $F_n^*(x)$ *непрерывна, тогда распределение обобщенных статистических вероятностей на множестве* $\Omega=(-\infty,+\infty)$ *называется непрерывным*, а $(-\infty,x)\in S$ для произвольных $x\in(-\infty,\infty)$. В случае, когда $(-\infty,u)\in S$, $(-\infty,v)\in S$, $u<v$, $u\in(-\infty,\infty)$, $v\in(-\infty,\infty)$, как следует из свойств 1_s-3_s пространства событий S, $[u,v)=(-\infty,v)-(-\infty,u)$ также есть элемент пространства событий S, то есть $[u,v)\in S$, так как когда $A\in S$ и $B\in S$, то $B\setminus A=B\bigcap\overline{A}=\overline{\overline{B\bigcap\overline{A}}}=\overline{\overline{B}\bigcup\overline{\overline{A}}}=\overline{\overline{B}\bigcup A}\in S$ по свойствам 1_s-3_s пространства событий S. Поэтому, как видно из формулы (21.4), будет $P_n^*([u,v))=F_n^*(v)-F_n^*(u)$, так как в рассматриваемом случае для $A\in S$ таких, что $A\subset(-\infty,v)$, и $A\in S$ таких, что $A\subset(-\infty,u)$, будет иметь место равенство

$$\bigcup_{A\subset(-\infty,v)}A\setminus\bigcup_{A\subset(-\infty,u)}A=(-\infty,v)\setminus(-\infty,u)=[u,v)\in S\,.$$

Заметим, что когда функция $F_n^{\,*}(x)$ непрерывна, то $P_n^{\,*}([u,v))=P_n^{\,*}((u,v])=P_n^{\,*}((u,v))=P_n^{\,*}([u,v])$.

Подчеркнем, что вероятностные меры P_n^*, рассмотренные в примерах 21.5 и 21.6, гипотетические, найденные при предположении, что плотность $f_n^*(x)$ распределения статистических вероятностей имеет вид (см. Рис. 21.8, Рис. 21.10)

$$f_n^*(x)=\begin{cases}0, & \text{когда } x\,\overline{\in}\,(0,5],\\ 0.05, & \text{когда } x\in(0,1]\bigcup(4,5],\\ 0.20, & \text{когда } x\in(1,2]\bigcup(3,4],\\ 0.50, & \text{когда } x\in(2,3],\end{cases}$$

то есть при предположении, что плотность распределения статистических вероятностей на промежутках $(0,1]$, $(1,2]$, $(2,3]$, $(3,4]$, $(4,5]$ принимает постоянные значения соответственно 0.05, 0.20, 0.50, 0.20, 0.05, и значение 0 за пределами промежутка $(0,5]$, что в действительности может оказаться не так.

Кроме самих распределений статистических вероятностей важное значение имеют некоторые числовые характеристики этих распределений.

Одной из важнейших числовых характеристик распределения статистических вероятностей (относительных частот) наблюденных значений $x_{нб\,i}$ есть их среднее арифметическое

$$M_n^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{нб\,i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i = \sum_{i=1}^{k} x_i P_n^*(\{x_i\})\,.$$

где $m_i = k_n(x_i)$ – число испытаний, в которых было наблюдено значение x_i.

Это среднее арифметическое будет ближе к значениям, которые встречаются чаще, чем к значениям, которые встречаются редко. Поэтому число M_n^* есть значением, вблизи которого в первую очередь следует ожидать получения большинства значений в будущих наблюдениях, и есть в определенном смысле центром рассеивания статистических вероятностей (относительных частот) наблюденных значений исследуемой величины.

Кроме центра рассеивания важными являются характеристики величины рассеивания (или скученности) статистических вероятностей, то есть насколько далеко могут быть удалены (в подавляющем большинстве случаев) наблюденные значения исследуемой величины от центра рассеивания, в каком диапазоне (в подавляющем большинстве случаев) они будут находиться и т.п.

Одной из характеристик рассеивания статистических вероятностей есть размах выборки $x_{\max} - x_{\min}$.

Однако более существенной характеристикой рассеивания статистических вероятностей вокруг центра рассеивания есть так называемое среднее квадратичное отклонение наблюденных значений исследуемой величины от M_n^*, то есть от центра рассеивания. Такое среднее квадратичное отклонение вычисляется по формуле

$$\sigma_n^* = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{нб\,i} - M_n^*)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i - M_n^*)^2 P_n^*(\{x_i\})}\,.$$

Дело в том, что наиболее существенными для определения величины рассеивания статистических вероятностей (относительных частот) значений исследуемой величины (при достаточно большом числе наблюдений) будут те значения, которые в выборке встречаются чаще всего. Значения же, частота появления которых в выборке очень мала, практически не влияют на характеристику σ_n^* рассеивания статистических вероятностей (относительных частот) основной массы наблюденных значений исследуемой величины. Поэтому характеристика $x_{\max} - x_{\min}$ может оказаться несколько завышенной по сравнению с более существенной характеристикой σ_n^*.

Пусть, например, среди 10000 наблюденных значений 1 раз встречается значение –1, 1 раз – +1, 9998 раз – 0. Очевидно $M_n^* = 0$. Естественно считать, что в рассматриваемом случае рассеивание статистических вероятностей (относительных частот) отдельных значений исследуемой величины около центра рассеивания $M_n^* = 0$ практически отсутствует:

$$\sigma_n^* = \sqrt{(-1-0)^2 \frac{1}{10000} + (0-0)^2 \frac{9998}{10000} + (1-0)^2 \frac{1}{10000}} = \sqrt{0.0002} \approx 0.014 \approx 0,$$

хотя $x_{\max} - x_{\min} = 1-(-1) = 2$. В данном случае наблюденные значения –1 и +1 несущественны и практически не влияют на характеристики распределения статистических вероятностей (относительных частот) основной массы наблюденных значений.

Иногда среднее значение характеризуют не средним арифметическим, а средним гармоническим:

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_{нб\,i}}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i}P_n^*(\{x_i\})}.$$

Такая характеристика может быть удобнее в случае, например, определения средней скорости движения некоторого тела вдоль прямой от точки $x=0$ до точки x_k, если известно, что первую единицу пути тело проходит со скоростью $V_{нб1}$, вторую – со скоростью $V_{нб2}$, … , n-ю со скоростью $V_{нб\,n}$. Тогда время, потраченное на первую единицу пути, будет $\frac{1}{V_{нб1}}$, на вторую – $\frac{1}{V_{нб2}}$, … , на n-ю – $\frac{1}{V_{нб\,n}}$. Общее время, потраченное на n единиц пути, равно $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{V_{нб\,i}}$ Таким образом средняя скорость на всем пути длиной n единиц равна

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{V_{нб\,i}}} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{V_{нб\,i}}}.$$

Если промежутки длины 1, которые тело проходит со скоростью V_1, встречаются m_1 раз, со скоростью V_2 – m_2 раз, и так далее, со скоростью V_k – m_k раз, тогда средняя скорость равна:

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}m_i}{\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i}{V_i}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i}{V_i}} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i}{V_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i}{n}\cdot\frac{1}{V_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{V_i}P_n^*(\{V_i\})},$$

где $P_n^*(\{V_i\})$ – статистические вероятности (относительные частоты) промежутков, которые тело проходит со скоростью V_i.

При рассмотрении произведения значений $x_{нб1}$, $x_{нб2}$, ..., $x_{нб\,n}$ используется среднее геометрическое значение $\sqrt[n]{x_{нб1}x_{нб2}...x_{нб\,n}}$. Очевидно, логарифм среднего геометрического равен среднему арифметическому логарифмов значений $x_{нб1}$, $x_{нб2}$, ..., $x_{нб\,n}$:

$$\log_a(\sqrt[n]{x_{нб1}x_{нб2}...x_{нб\,n}}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log_a(x_{нб\,i}).$$

В конкретных ситуациях могут понадобиться и некоторые другие характеристики выборки $x_{нб1}$, $x_{нб2}$, ..., $x_{нб\,n}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют статистической выборкой?
2. Что называют вариантами?
3. Что называют частотой появления значения x_i в выборке $x_{нб1}$, $x_{нб2}$, ..., $x_{нб\,n}$?
4. Что называют статистической вероятностью (относительной частотой) появления значения x_i в выборке $x_{нб1}$, $x_{нб2}$, ..., $x_{нб\,n}$?
5. Какая характеристика значения x_i более информативна – частота m_i или статистическая вероятность (относительная частота) $\frac{m_i}{n}$?
6. Что называют рядом поточечного распределения статистических вероятностей (относительных частот) на множестве значений исследуемой дискретной величины?
7. Что называют поинтервальным распределением статистических вероятностей появления значений исследуемой непрерывной величины?
8. Чему равна сумма статистических вероятностей появления всех наблюденных значений исследуемой величины?
9. Что называют многоугольником поточечного распределения статистических вероятностей (полигоном относительных частот)?
10. Что называют гистограммой поинтервального распределения статистических вероятностей (относительных частот)?
11. Чему равна площадь под гистограммой (над осью Ox)?
12. Что называют функцией распределения статистических вероятностей (относительных частот) появления значений исследуемой величины, которые наблюдаются?
13. Какое наименьшее значение может принимать функция $F_n^*(x)$?
14. Какое наибольшее значение может принимать функция $F_n^*(x)$?
15. Может ли иметь место неравенство $F_n^*(x_1) > F_n^*(x_2)$, если $x_1 < x_2$?
16. Что характеризует среднее арифметическое M_n^* наблюденных значений $x_{нб1}$, $x_{нб2}$, ..., $x_{нб\,n}$?
17. Почему точку с абсциссой $x = M_n^*$ называют центром рассеивания статистических вероятностей (относительных частот) появления значений x_i исследуемой величины?
18. Может ли значение M_n^* не совпадать ни с одним из значений $x_{нбi}$, которые есть в выборке?

19. Какие показатели используют, чтобы охарактеризовать величину рассеивания статистических вероятностей (относительных частот) появления наблюденных значений исследуемой величины?
20. Почему среднее квадратичное отклонение σ_n^* следует считать юолее корректной характеристикой рассеивания статистических вероятностей (относительных частот) на множестве возможных значений x_1, x_2, …, x_k исследуемой величины, чем характеристика рассеивания $x_{\max} - x_{\min}$?

Упражнения для самостоятельного выполнения

Выполнить упражнения 1-6, используя при необходимости для вычислений услугу “Операции / Калькулятор” или другие услуги программы GRAN1.

1. Построить многоугольник распределения статистических вероятностей (относительных частот) появления наблюденных значений исследуемой величины, если задано распределение абсолютних частот:

x_i	–3	–2	–1	0	1	2	3
m_i	1	6	15	43	17	5	2

2. По данным упражнения 1 определить функцию $F_n^*(x)$ поточечного распределения статистических вероятностей на заданном множестве точек и построить ее график.
3. По данным упражнения 1 определить функцию $F_n^*(x)$ поинтервального распределения статистических вероятностей появления значений исследуемой величины на промежутке $(-3.0, 4.0]$, считая заданные точки левыми пределами закрытых справа интервалов длинной 1, и построить график такой функции.
4. По данным упражнения 1 найти $M_n^*[X]$ – среднее арифметическое наблюденных значений исследуемой величины.
5. По данным упражнения 1 найти $\sigma_n^*[X]$ – среднее квадратичное отклонение наблюдённых значений исследуемой величины от их среднего арифметического $M_n^*[X]$.
6. Построить гистограмму поинтервального распределения статистических вероятностей (относительных частот) на совокупности закоытых справа интервалов длиной 1, если в таблице указаны центры этих интервалов и частоты попадания в них:

–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
1	8	12	34	57	36	14	6	2

7. По данным упражнения 6 построить функцию $F_n^*(x)$ поинтервального распределения статистических вероятностей для интервалов длиной: 1; 0.2; 0.1; 0.05; 0.01.

8. Заданы:

1) $\Omega_1 = (0,5] = \bigcup\limits_{i=1}^{5}(i - 1, i]$,

$$S_1 = \{A \mid A = \bigcup_{i\in I}(i-1, i],\ I \subset \{1,2,3,4,5\}\},$$

мера $\mathrm{P}^*_{1\mathrm{n}}$ определена на S_1 через плотность распределения статистических вероятностей

$$f_1(x) = \begin{cases} 0.05, \text{ когда } x \in (0.1] \bigcup (4,5], \\ 0.20, \text{ когда } x \in (1,2] \bigcup (3,4], \\ 0.50, \text{ когда } x \in (2,3], \\ 0, \quad \text{ когда } x \,\overline{\in}\, (0,5] \end{cases}$$

$$\Omega_1 = R^1 \supset \Omega_1,\quad \widetilde{S}_1 = \mathscr{B}(R^1) \supset S_1,$$

$$\widetilde{P}_1(G_1) = P^*_{1n}(G_{1*}) + \alpha P^*_{1n}(G^*_1 \setminus G_{1*}),\quad \alpha = 0{,}5,\ G_1 \in \widetilde{S}_1,$$

$$G_{1*} = \bigcup_{\bigcup(i-1,i] \subset G_1 \bigcap \Omega_1} (\bigcup(i-1,i]),\quad G^*_1 = \bigcap_{G_1 \bigcap \Omega_1 \subset \bigcup(i-1,i]} (\bigcup(i-1,i]\ .$$

а) Определить функцию распределения вероятностей

$$F_1(x) = \widetilde{P}_1((-\infty,\ x)).$$

б) Вычислить $\widetilde{P}_1((1.3,\ 3.7])$.

в) Определить $F_1(x)$ для случая, когда как пространство событий вместо S_1 рассматривается $\widetilde{S}_1$.

г) Вычислить $\widetilde{P}_1((1.3,\ 3.7])$ для случая, когда как пространство событий вместо S_1 рассматривается $\widetilde{S}_1$.

2) $\Omega_2 = [0,5) = \bigcup\limits_{i=1}^{5}[i - 1, i)$

$$S_2 = \{A \mid A = \bigcup_{i\in I}[i-1, i),\ I \subset \{1,2,3,4,5\}\}$$

мера $\mathrm{P}^*_{2\mathrm{n}}$ определена на S_2 через плотность распределения статистических вероятностей

$$f_2(x)=\begin{cases}0.05, \text{ когда } & x\in[0.1)\bigcup[4,5),\\ 0.20, \text{ когда } & x\in[1,2)\bigcup[3,4),\\ 0.50, \text{ когда } & x\in[2,3),\\ 0, \quad \text{ когда } & x\overline{\in}[0,5),\end{cases}$$

$\Omega_2=R^1\supset\Omega_2,\ \ \tilde{S}_2=\mathscr{B}(R^1)\supset S_2,$

$\tilde{P}_2(G_2)=P^*_{2n}(G_{2*})+\alpha P^*_{2n}(G^*_2\setminus G_{2*}),\ \ \alpha=0{,}5,\ G_2\in\tilde{S}_2\,,$

$$G_{2*}=\bigcup_{\bigcup[i-1,i)\subset G_1\bigcap\Omega_1}(\bigcup[i-1,i)),\ \ G_2{}^*=\bigcap_{G_2\bigcap\Omega_2\subset\bigcup[i-1,i)}(\bigcup[i-1,i)\ .$$

а) Определить функцию распределения вероятностей

$F_2(x)=\tilde{P}_2((-\infty,\ x)).$

б) Вычислить $\tilde{P}_2([1.3,\ 3.7))$.

в) Определить $F_2(x)$ для случая, когда как пространство событий вместо S_2 рассматривается $\tilde{S}_2$.

г) Вычислить $\tilde{P}_2([1.3,\ 3.7))$ для случая, когда как пространство событий вместо S_2 рассматривается $\tilde{S}_2$.

3) Определить разность $F_1(x)-F_2(x)$ для случаев:

а) $F_1(x)$ связана с пространством событий $S_1,\ F_2(x)-c\ S_2$;

б) $F_1(x)$ связана с пространством событий $S_1,\ F_2(x)-c\ \tilde{S}_2$.

4) Определить разность $\tilde{P}_1((1.3,\ 3.7])-\tilde{P}_2([1.3,\ 3.7))$ для случаев:

а) $\tilde{P}_1$ определена через $\mathrm{G}_{1*}\in S_1,\ \mathrm{G}^*_1\in S_1,\ \tilde{P}_2$ определена через $G_{2*}\in S_2\,,\ G^*_2\in S_2\,.$

б) $\tilde{P}_1$ определена через $\mathrm{G}_{1*}\in\tilde{S}_1,\ \mathrm{G}^*_1\in\tilde{S}_1,\ \tilde{P}_2$ определена через $G_{2*}\in\tilde{S}_2\,,\ G^*_2\in\tilde{S}_2\,.$

§22. Ввод экспериментальных данных

Некоторые элементы статистического анализа набора наблюденных значений исследуемой величины можно выполнить с использованием услуг программы GRAN1. Однако прежде чем приступить к анализу набора наблюденных значений с использованием услуг программы GRAN1, эти данные необходимо ввести с клавиатуры, с панели ввода данных или из некоторого файла на диске в рабочий файл программы.

Перед началом ввода набора наблюденных значений следует установить в окне "Список объектов" тип задания зависимости "Статистическая выборка". Далее необходимо обратиться к услуге создания нового объекта (с помощью главного меню, контекстного меню или соответствующей кнопки панели инструментов).

При создании объекта типа "Статистическая выборка" появляется вспомогательное окно "Данные статистической выборки" (Рис. 22.1). Вид окна может изменяться в зависимости от типа выборки и способа ее задания.

С помощью кнопочного переключателя "Распределение" можно указать, какой из двух возможных типов распределений статистических вероятностей исследуется:

- "Поточечное" – это будет означать, что исследуется поточечное распределение статистических вероятностей на конечном множестве точек. В этом случае невозможно будет построить гистограмму (график плотности распределения статистических вероятностей), непрерывную функцию распределения статистических вероятностей, а при вводе данных необходимо указывать отдельные возможные значения исследуемой величины и частоты появления этих значений, или же вводить одно за другим наблюденные значения.
- "Поинтервальное" – это будет означать, что исследуется поинтервальное распределение статистических вероятностей. В этом случае невозможно будет построить полигон частот, а при вводе данных необходимо указывать равноудаленные середины интервалов (одинаковой длины) и частоты попадания в эти интервалы, или же вводить одно за другим наблюденные значения.

Набор наблюденных значений в обоих случаях вводится одинаково.

После того, как указан тип исследуемого распределения частот, необходимо указать тип данных (частоты, относительные частоты или варианты). Тип данных необходимо указать перед началом ввода самих данных, поскольку при изменении типа данных таблица, в которую они введены, очищается.

Данные вводятся в таблицу так же, как это делалось при вводе координат вершин ломаной. Для поточечного распределения при вводе:

- частот – следует указать в столбце "X" возможное значение исследуемой величины, а в столбце "n" – количество появлений данного значения (Рис. 22.1);
- относительных частот – следует указать в столбце "X" возможное значение исследуемой величины, а в столбце "Pn*" – относительную частоту (то есть статистическую вероятность)

появления данного значения. При этом также необходимо указать объем выборки в строке “N=” (Рис. 22.2);

- ➢ вариант – в единственном столбце “X” указываются значения вариант (наблюденные значения исследуемой величины) (Рис. 22.3).

Для поинтервального распределения:

- ➢ при вводе частот – следует указать в столбце “X” середину интервала, в который попадают наблюденные значения, а в столбце “n” – количество попаданий таких значений (вариант) в этот интервал (Рис. 22.4);
- ➢ при вводе относительных частот – следует указать в столбце “X” середину интервала, в который попадают варианты, а в столбце “Pn*” относительную частоту попадания вариант в такой интервал. При этом также необходимо указать объем выборки в строке “N=” (Рис. 22.5);
- ➢ при вводе вариант – в единственном столбце “X” указываются значения вариант (Рис. 22.3).

С помощью переключателя “Тип графика” указывается тип графического представления данной статистической выборки. Для поточечного распределения частот (статистических вероятностей) это полигон или функция распределения (Рис. 22.1, 22.2), а для поинтервального – гистограмма или функция распределения (Рис. 22.4, 22.5).

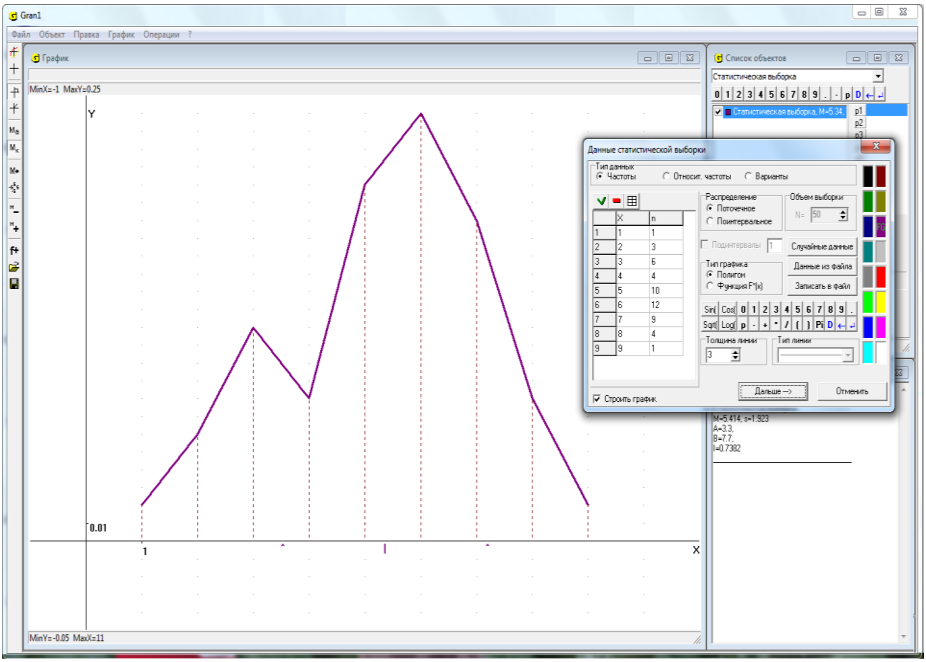


Рис. 22.1

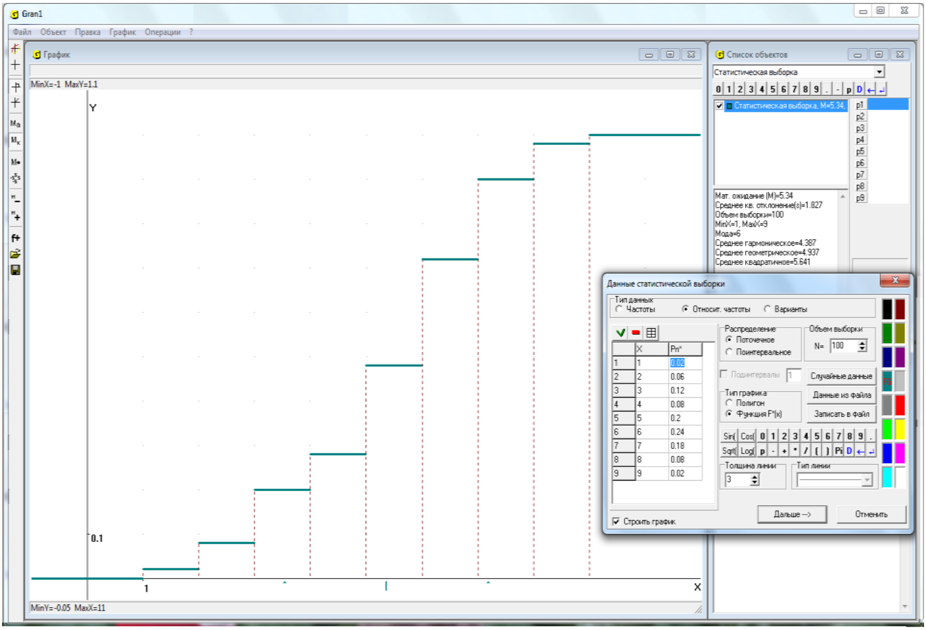


Рис. 22.2

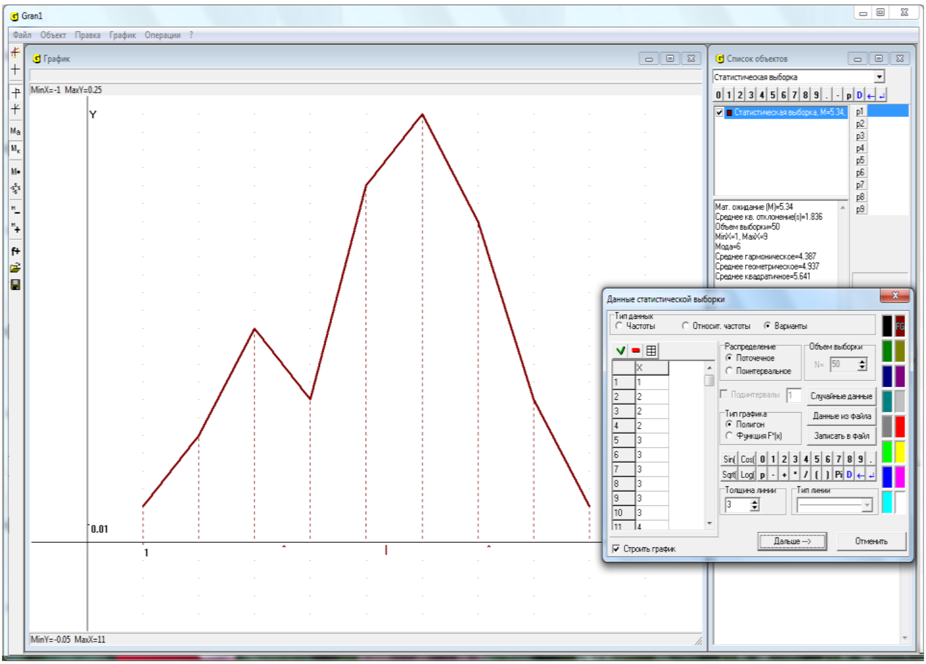
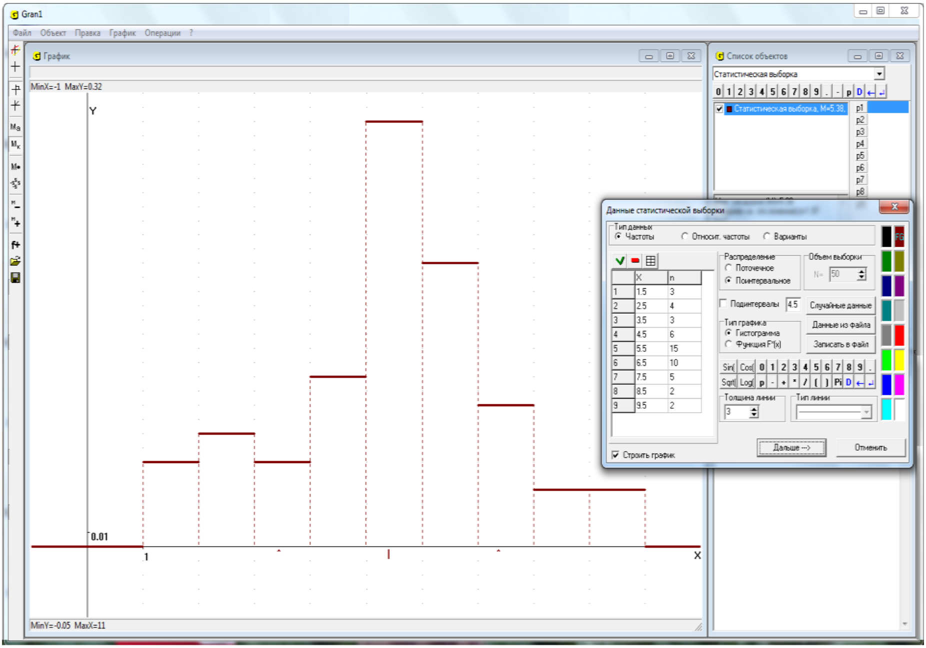
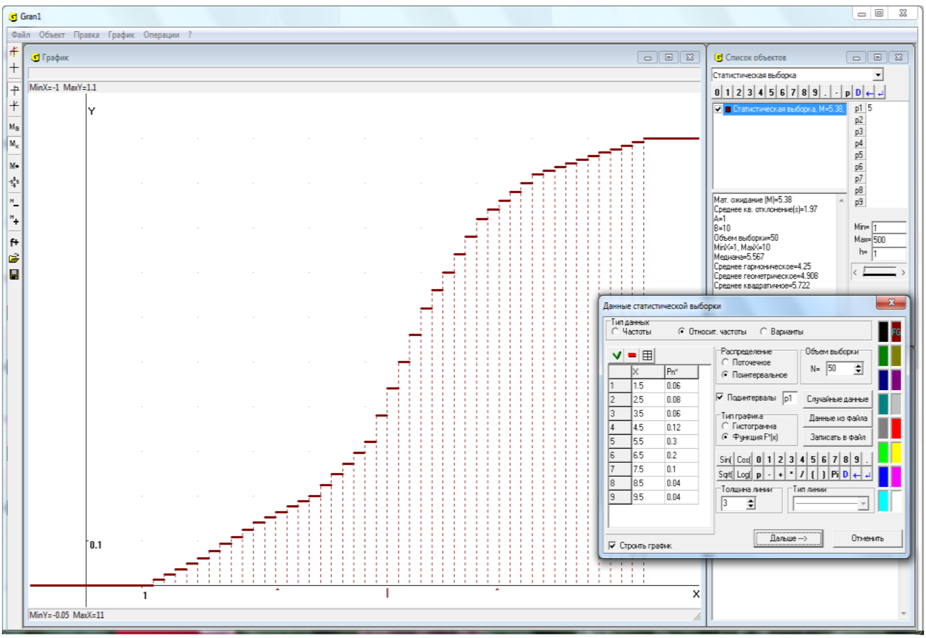


Рис. 22.3



	X	n
1	1.5	3
2	2.5	4
3	3.5	3
4	4.5	6
5	5.5	15
6	6.5	10
7	7.5	5
8	8.5	2
9	9.5	2

Рис. 22.4



	X	Pn*
1	1.5	0.06
2	2.5	0.08
3	3.5	0.06
4	4.5	0.12
5	5.5	0.3
6	6.5	0.2
7	7.5	0.1
8	8.5	0.04
9	9.5	0.04

Рис. 22.5

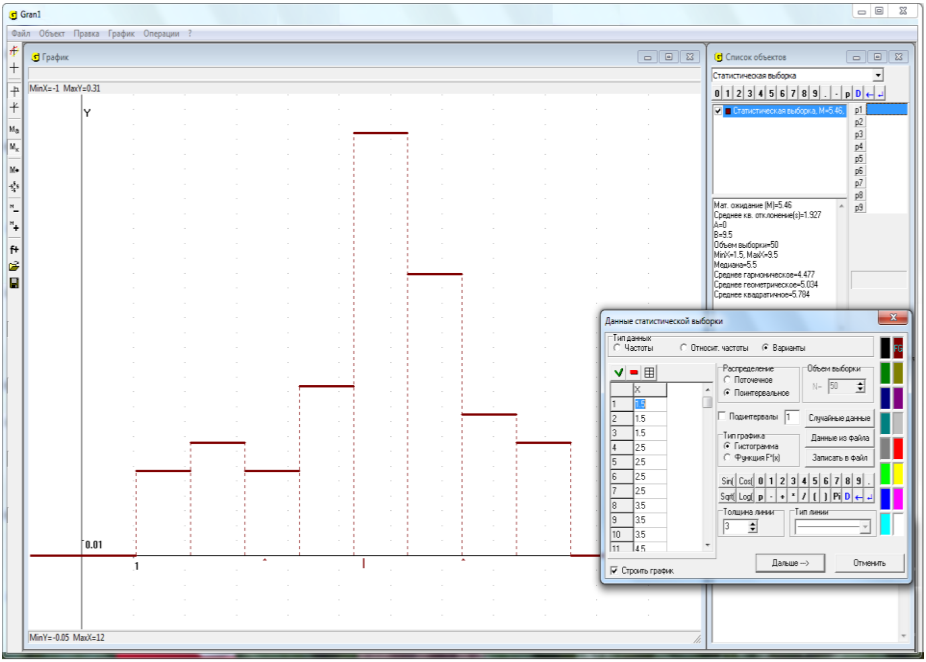


Рис. 22.6

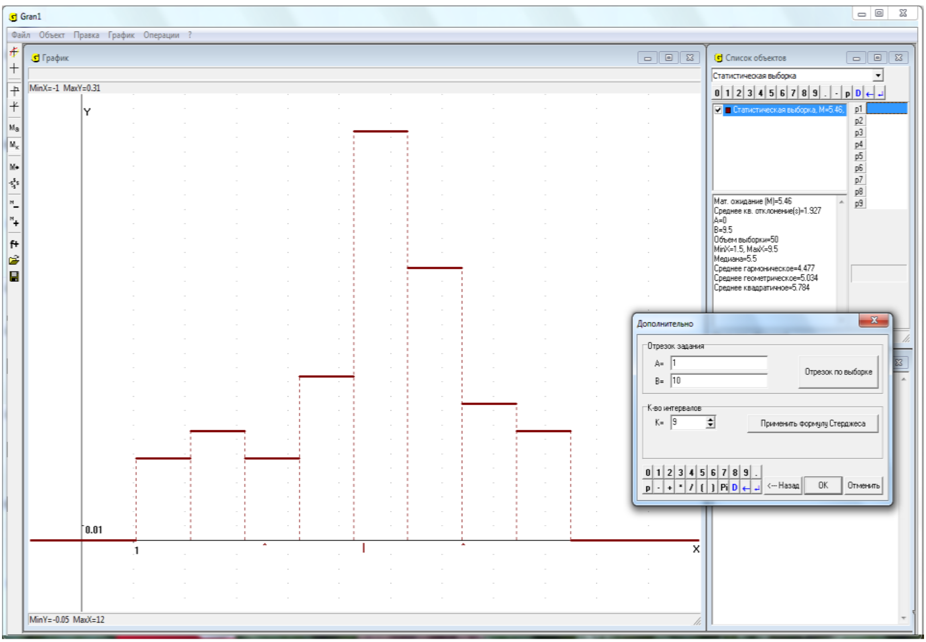


Рис. 22.7

После окончания ввода данных нужно “нажать” кнопку “Дальше-->”. При этом в окне “Список объектов” появится обозначение нового объекта – статистической выборки.

Задавая поинтервальное распределение частот или относительных частот, значения середин интервалов следует располагать на одинаковом расстоянии (то есть длины всех интервалов должны быть равны между собой). Количество интервалов совпадает с количеством введенных середин интервалов.

Однако если поинтервальное распределение задается через варианты, то при нажатии на кнопку “Дальше-->” появляется вспомогательное окно “Дополнительно” (Рис. 22.7). В этом окне необходимо указать отрезок, в котором находятся все введенные значения вариант. С помощью кнопки “отрезок по выборке” устанавливаются как значение левого и правого концов отрезка минимальное и максимальное значения вариант выборки. Также в этом окне необходимо указать количество интервалов (от 2 до 50), на которые делится отрезок задания выборки, или воспользоваться кнопкой “Применить формулу Стерджеса”, по которой вычисляется рекомендуемое количество интервалов $K = [1 + 3.222 \cdot \ln N]$, где N – объем выборки. “Нажав” кнопку “<---Назад”, можно вернуться к режиму ввода данных.

Ввод набора случайниых значений можно осуществить также, воспользовавшись услугой программы GRAN1 “Случайные данные” (Рис. 22.6). Отвечая на запросы, которые задаются по программе, можно ввести нужное количество случайных значений, распределенных равномерно на промежутке $[-1, 1]$, и затем анализировать поинтервальное распределение статистических вероятностей, как и раньше, строить графики плотности поинтервального распределения статистических вероятностей, функции поинтервального распределения статистических вероятностей, определять числовые характеристики распределения статистических вероятностей и т.д.

Ввод выборки можно осуществить из предварительно подготовленного текстового файла так же, как это делалось при вводе из файла координат вершин ломаной. Для этого необходимо при формировании выборки нажать кнопку “Данные из файла” и затем указать место расположения и имя нужного файла.

Файл данных есть обычным текстовым файлом, где в каждой отдельной строке записаны пары значений – варианта и частота, варианта и относительная частота или только варианта в зависимости от типа задания выборки. Такой файл можно создать с помощью любого текстового редактора. Саму выборку также можно записать в текстовый файл с помощью кнопки “Записать в файл” вспомогательного окна, которое используется при вводе данных (Рис. 22.1 – Рис. 22.6).

Общее количество строк частотной таблицы ввода данных не должно превышать 10000. При вводе относительных частот следует помнить, что сумма относительных частот должна быть равной 1. Если сумма относительных частот не равна 1, выводится сообщение “Сумма относительных частот < > 1”, а также указывается, чему именно равна сумма введенных относительных частот. После этого введенные относительные частоты нужно отредактировать.

Учет объема выборки дает возможность оценивать степень достоверности представленных в таблице результатов – чем больший объем выборки, тем более достоверные результаты. Кроме того данные об объеме выборки необходимы для определения согласованности с экспериментальными данными различных гипотез о реальном распределении статистических вероятностей (см. §24).

В окне “Список объектов” для статистической выборки выводятся некоторые ее характеристики: статистическое математическое ожидание (среднее арифметическое наблюденных значений), статистическое среднее квадратичное отклонение, объем выборки, минимальное и максимальное значения вариант, мода (для поточечного распределения) или медиана (для поинтервального распределения), среднее геометрическое, среднее гармоническое, среднее квадратичное, а также для поинтервального распределения – отрезок задания (Рис. 22.8).

Чтобы изменить выборку, можно воспользоваться пунктом меню “Объект / Изменить”.

В случае анализа поточечного распределения статистических вероятностей на конечном множестве точек можно не только вводить новые или изменять либо удалять уже введенные данные, но и изменять тип данных (частоты, относительные частоты или варианты). Для поинтервального распределения это недоступно.

Пункт “Объект / Изменить” можно использовать также при необходимости изменить тип графического представления распределения статистических вероятностей: “полигон” либо “функция распределения” для поточечного распределения или “гистограмма” либо “функция распределения” для поинтервального.

При необходимости пересмотреть таблицу частот текущей выборки используется услуга “Операции / Статистика / Частотная таблица”. В этой таблице представлены пять столбцов чисел (Рис. 22.9, Рис. 22.10):

- первый столбец – это возможные значения исследуемой величины (Рис. 22.9) или пределы интервалов $[a_{i-1}, a_i)$ возможных значений исследуемой величины (Рис. 22.10);
- второй – частоты появления значений, указанных в первом столбце, или частоты попадания в интервалы, пределы которых указаны в первом столбце;
- третий столбец – накопленная сумма всех предыдущих частот;
- четвертый – относительные частоты появления значений, указанных в первом столбце, или относительные частоты попадания в интервалы, пределы которых указаны в первом столбце;
- пятый – накопленная сумма всех предыдущих относительных частот.

Важную роль в теории вероятностей и математической статистике играет нормальное распределение вероятностей.

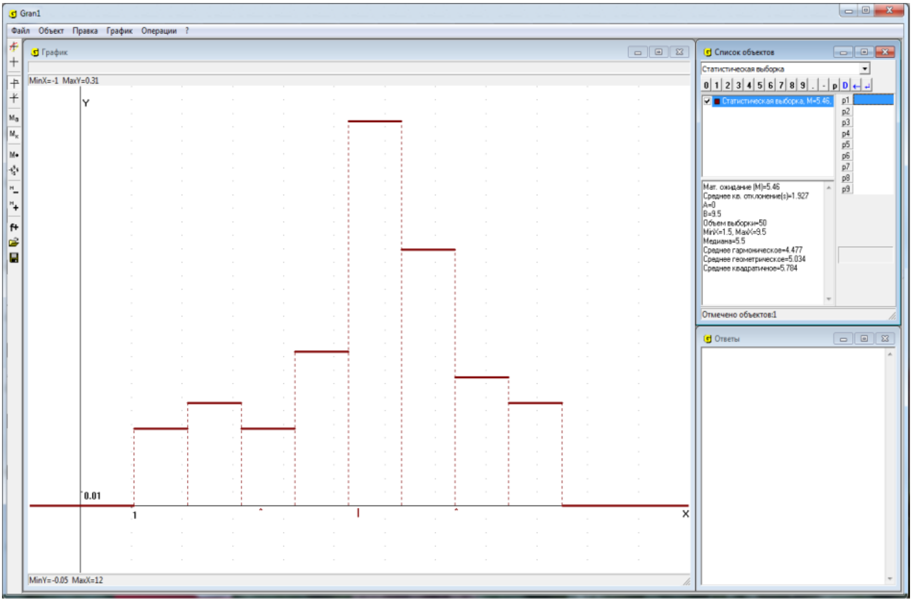


Рис. 22.8

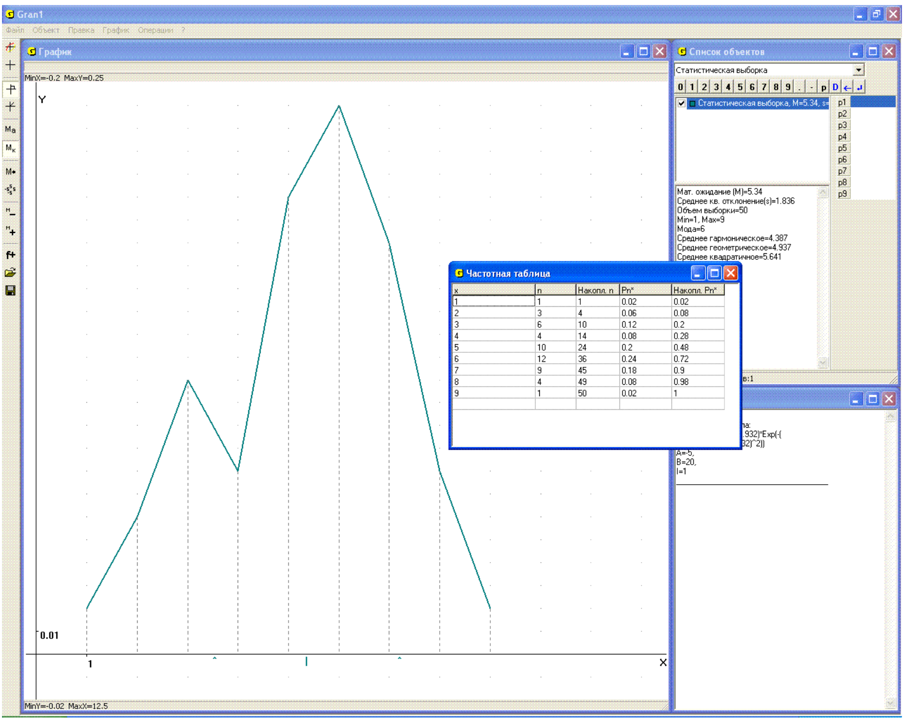


Рис. 22.9

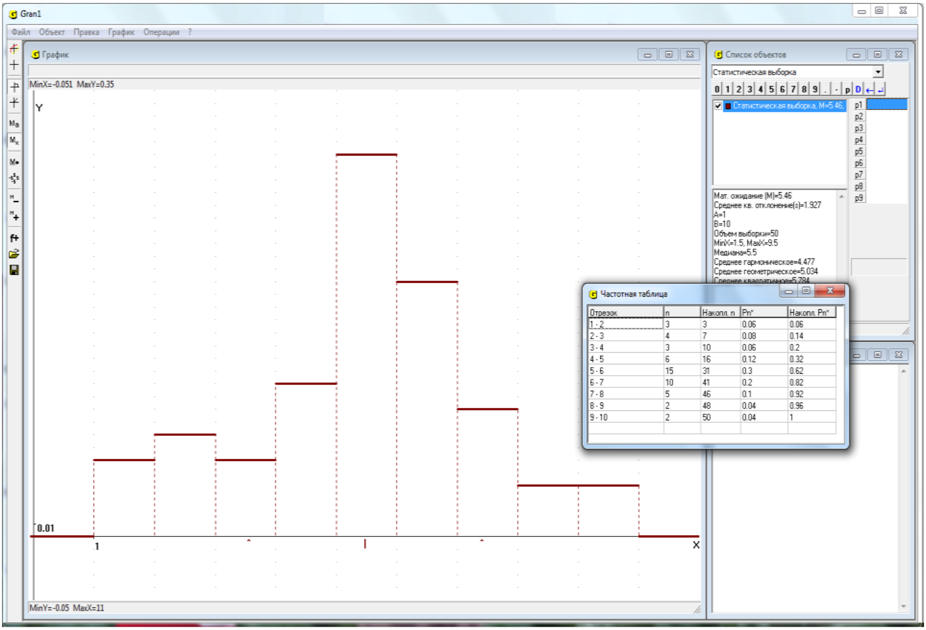


Рис. 22.10

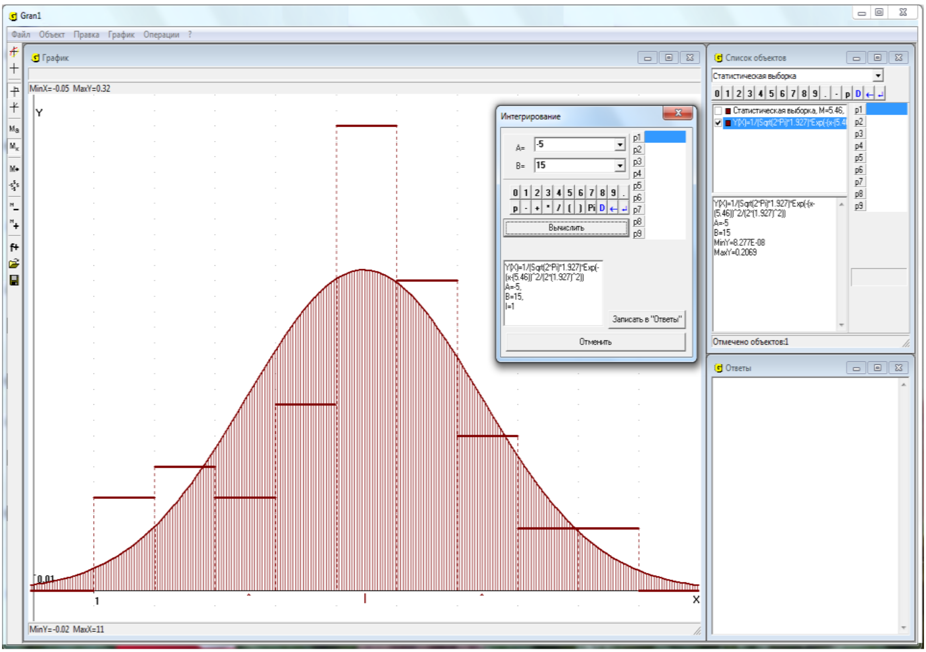


Рис. 22.11

Нормальное распределение вероятностей с параметрами a и σ – это непрерывное распределение вероятностей на множестве $\Omega = R^1 = (-\infty; +\infty)$, плотность которого описывают функцией вида $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где a и $\sigma > 0$ – заданные вещественные числа.

В программе GRAN1 предусмотрена услуга "Операции / Статистика / Плотность нормального распределения по выборке", с помощью которой для текущего поинтервального распределения статистических вероятностей можно построить новый объект – функцию, которая определяется по формуле $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} e^{-\frac{(x-M)^2}{2s^2}}$, где M статистическое математическое ожидание, а s статистическое среднее квадратичное отклонение для заданной выборки (Рис. 22.11).

Вопросы для самоконтроля

1. Какой тип задания зависимости нужно установить перед началом статистического анализа экспериментальных данных с помощью программы GRAN1?
2. Как вводятся экспериментальные данные для их анализа с помощью программы GRAN1?
3. Предусмотрено ли в программе GRAN1 рассмотрение отдельно поточечного и поинтервального распределений статистических вероятностей (частот)?
4. Чем отличаются поточечные и поинтервальные распределения статистических вероятностей (частот)?
5. Как вводятся варианты при работе с программой GRAN1?
6. В чем заключается различие между вводом вариант для поточечного и поинтервального распределений статистических вероятностей?
7. Как вводятся частоты при работе с программой GRAN1?
8. Как вводятся относительные частоты (статистические вероятности) при работе с программой GRAN1?
9. Какое дополнительное требование должны удовлетворять относительные частоты (статистические вероятности), которые вводятся?
10. Какое дополнительное требование должны удовлетворять середины интервалов при вводе абсолютных частот и статистических вероятностей (относительных частот) для поинтервального распределения статистических вероятностей?
11. Как вводятся данные из файла на диске?
12. Есть ли разница в структуре файла для ввода вариант и частот?
13. Как создать текстовый файл для ввода данных выборки?
14. Как пересмотреть данные, которые сохраняются в файле?
15. Как при необходимости можно корректировать ранее введенные данные?
16. Можно ли изменить тип распределения частот при редактировании данных, через которые задана выборка?

17. Можно ли изменить тип данных, через которые задана выборка?
18. Можно ли изменить тип графического представления распределения статистических вероятностей?
19. Можно ли отличить – поточечное или поинтервальное распределение частот описывается в частотной таблице?

Упражнения для самостоятельного выполнения

1. Ввести с клавиатуры в рабочий файл программы GRAN1 50 наугад взятых значений из промежутка [0, 1], через которые задается поточечное распределение статистических вероятностей.
2. Выполнить упражнение 1 для случая поинтервального распределения статистических вероятностей. Задать количество интервалов по формуле Стерджеса.
3. Ввести с клавиатуры наблюденные значения исследуемой величины и соответствующие им частоты:

x_i	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7
m_i	2	8	14	20	37	42	18	16	5	1

4. Выполнить упражнение 3, считая, что множество значений Ω непрерывное.
5. Ввести с клавиатуры ряд распределения относительных частот появления целых значений исследуемой величины от -5 до 5 включительно.
6. По данным упражнения 3 определить функцию поинтервального распределения статистических вероятностей, считая данные x_i центрами интервалов.
7. Ввести набор наблюденных значений исследуемой величины из заранее созданного файла в подкаталоге GRAN1.
8. Ввести из заранее созданного файла в подкаталоге GRAN1 ряд распределения частот появления наблюденных значений исследуемой величины.
9. Ввести из заранее созданного файла в подкаталоге GRAN1 ряд распределения относительных частот появления наблюденных значений исследуемой величины.

§23. *Графическое представление результатов статистического анализа экспериментальных данных*

Для графического представления многоугольников распределения статистических вероятностей (полигонов частот), гистограмм, функций распределения статистических вероятностей появления значений исследуемой величины, некоторых числовых характеристик распределения статистических вероятностей и т.п. можно воспользоваться услугой “График / Построить” (или соответствующей услугой контекстного меню, или кнопкой на панели инструментов).

При работе со статистическими выборками построение графиков осуществляется вполне аналогично, как и при построении графиков других зависимостей.

Пример

Пусть распределение частот появления наблюденных значений исследуемой величины задано таблицей:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_i	12	17	19	37	30	10	8	5	4

Приведенные в таблице значения x_i можно интерпретировать по разному – как центры интервалов возможных значений величины, которая наблюдается, или как элементы дискретного конечного множества возможных значений. Предположим, что исследуется поинтервальное распределение частот и нужно построить гистограмму поинтервального распределения относительных частот наблюденных значений.

Установив в окне “Список объектов” тип задания зависимости “Статистическая выборка”, обратимся к услуге “Объект / Создать”. В окне, которое появится, укажем тип исследуемого распределения “Поинтервальное”, тип данных – “Частоты”, тип графика – “Гистограмма”, и введем таблицу, через которую задается выборка (Рис. 23.1).

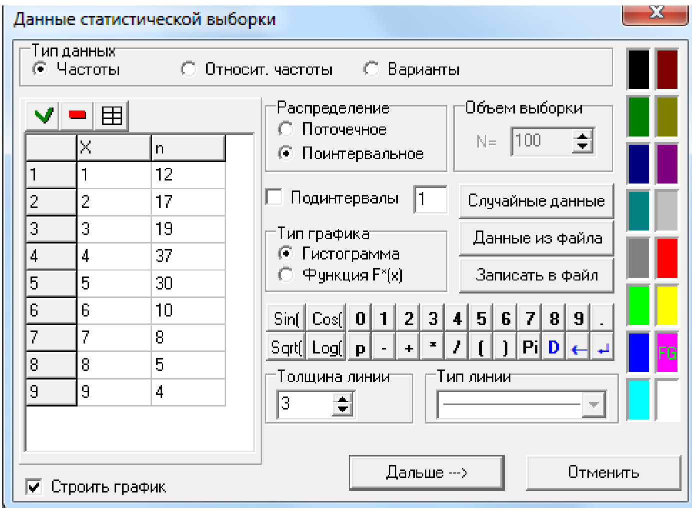


Рис. 23.1

В результате в окне “Список объектов” появится обозначение только что введенной выборки и некоторые ее характеристики (Рис. 23.2). Если теперь построить график, то получим гистограмму поинтервального распределения относительных частот на промежутке [0.5, 9.5), разделенному на 9 интервалов длиной 1 с центрами в точках 1, 2, 3, ..., 8, 9 (Рис. 23.2).

В окне “График” также можно видеть некоторые характеристики выборки:

- наименьшее и наибольшее значение частот можно получить, определив на полигоне частот или гистограмме соответствующие координаты точек;
- относительные частоты каждого из возможных значений дискретной величины или попадания в каждый интервал также можно определить по графику как соответствующие ординаты точек (на полигоне частот или гистограмме);
- накопленные относительные частоты для каждой из вариант можно определить по графику функции распределения статистических вероятностей;
- статистическое математическое ожидание M отмечено на оси абсцисс меткой “|”;
- статистическое среднее квадратичное отклонение s можно определить, учитывая, что на оси абсцисс метками “^” обозначены пределы отрезка $[M-s,\ M+s]$.

На оси Ox отображаются точки с абсциссами $x = M_n^*$ (центр рассеивания, на Рис. 23.2 точка на оси Ox с абсциссой $x = 4.43$) и абсциссами $x = M_n^* - \sigma_n^*$ и $x = M_n^* + \sigma_n^*$ (влево и вправо от центра рассеивания откладывается по одному разу σ_n^*).

Чтобы убедиться, что площадь под гистограммой (над осью Ox) равна 1, можно использовать услугу “Операции / Интегралы / Интеграл...”. Указав пределы интегрирования $a = 0.5$, $b = 9.5$, получим $I \approx 1$ (Рис. 23.3).

Чтобы построить график функции распределения статистических вероятностей $F_n^*(x)$, нужно обратиться к услуге “Объект / Изменить...” и указать тип графика “Функция F*(x)”, а затем снова построить график. В результате получим график функции $F_n^*(x)$ (Рис. 23.4).

Основные числовые характеристики рассматриваемой выборки можно увидеть в нижней части окна “Список объектов”, а пересмотреть частотную таблицу можно с помощью услуги “Операции / Статистика / Частотная таблица” (Рис. 23.5).

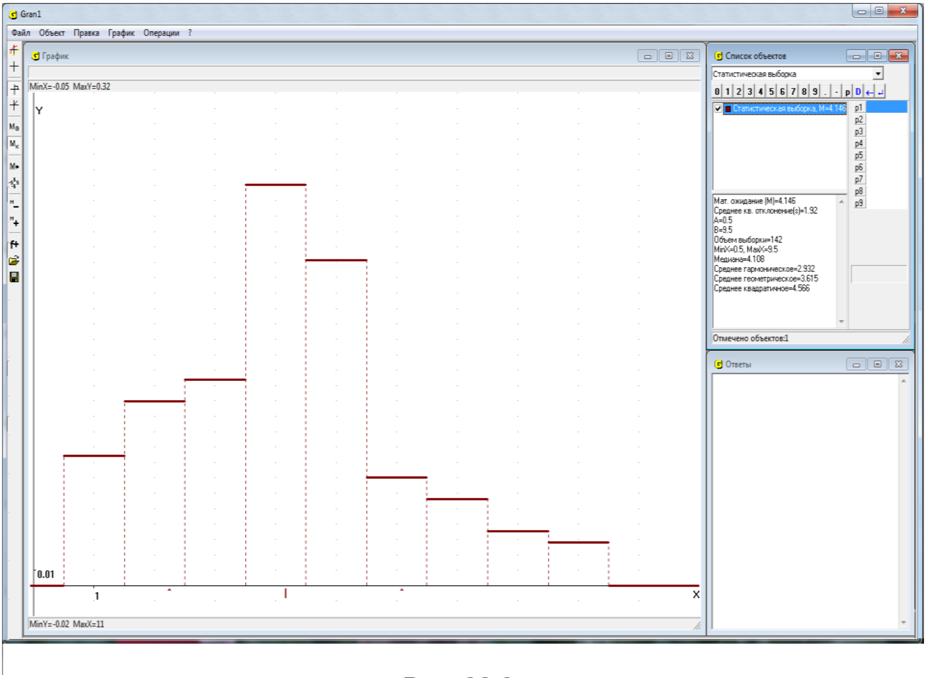


Рис. 23.2

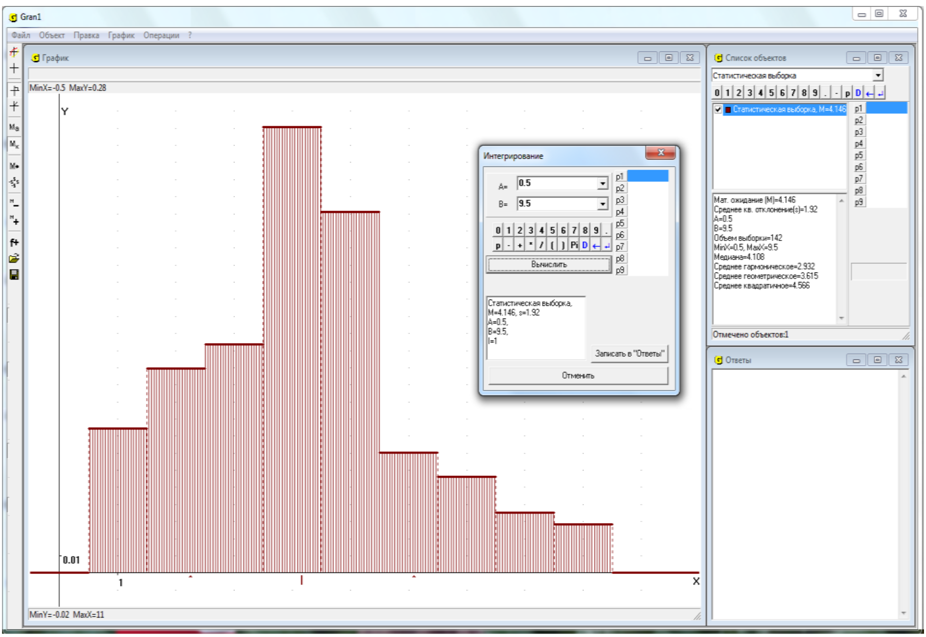


Рис. 23.3

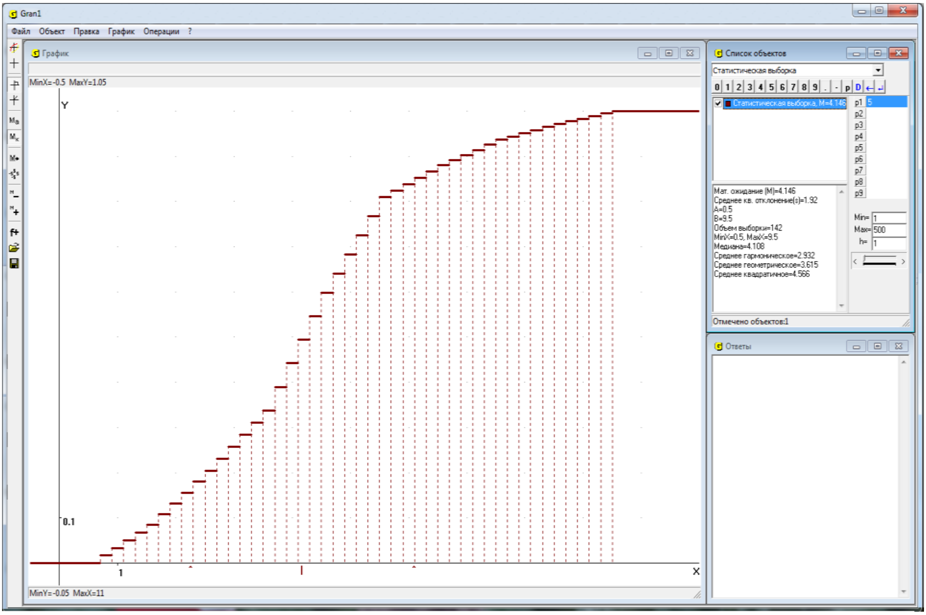


Рис. 23.4

Частотная таблица

Отрезок	n	Накопл. n	Pn*	Накопл. Pn*
0.5 - 1.5	12	12	0.08451	0.08451
1.5 - 2.5	17	29	0.1197	0.2042
2.5 - 3.5	19	48	0.1338	0.338
3.5 - 4.5	37	85	0.2606	0.5986
4.5 - 5.5	30	115	0.2113	0.8099
5.5 - 6.5	10	125	0.07042	0.8803
6.5 - 7.5	8	133	0.05634	0.9366
7.5 - 8.5	5	138	0.03521	0.9718
8.5 - 9.5	4	142	0.02817	1

Рис. 23.5

Вопросы для самоконтроля

1. Как с использованием услуг программы GRAN1 построить:
   - гистограмму поинтервального распределения статистических вероятностей (относительных частот) появления наблюденных значений исследуемой величины?
   - функцию поточечного распределения статистических вероятностей $F_n^*(x)$?
   - функцию поинтервального распределения статистических вероятностей $F_n^*(x)$?

- многоугольник поточечного распределения статистических вероятностей (полигон частот)?

2. Как с использованием услуг программы GRAN1 получить основные числовые характеристики исследуемого распределения статистических вероятностей ?
3. Как определить наибольшую относительную частоту и соответствующее значение исследуемой величины, если построен полигон частот?
4. Нужно ли выполнять какие-либо вычисления перед обращением к услугам программы GRAN1 для статистического анализа экспериментальных данных?
5. Как по гистограмме определить статистическую вероятность (относительную частоту) попадания наблюденных значений исследуемой величины на промежуток $[\alpha, \beta] \subset [A, B]$? Здесь A и B соответственно нижний и верхний пределы интервала, на котором построена гистограмма. При этом предполагается, что интервалы $(a_{i-1}, a_i]$, на которых определены соответствующие значения ординат на гистограмме, достаточно мелкие, а промежуток $[\alpha, \beta]$ охватывает достаточно большое количество таких интервалов).
6. Для какого распределения статистических вероятностей – поточечного или поинтервального строят: многоугольник распределения статистических вероятностей (полигон частот)? гистограмму распределения статистических вероятностей (относительных частот)? функцию распределения статистических вероятностей (относительных частот)?

Упражнения для самостоятельного выполнения

1. Построить ряд распределения и полигон частот для выборки, в которой указаны отклонения результатов измерения расстояния между двумя точками от истинного значения этого расстояния: 50, 20, –10, 10, 20, –50, –20, –10, 40 –20, –30, –10, 10, 20, –40, 50, –10, 10, 50.
2. При определении погрешности измерительного прибора сделано 40 измерений, в которых зафиксированы погрешности: –2.5; 3; 4; 2; 0.5; –1; 2; 4; –4; 0; –0.5; –0.5; 1; 0.5; 2.5; –0.5; 2; 1; –4; –2; –1; 1,5; 0.5; 4; –1.5; –1; 0; 1; 0; 1; –1.5; 1.5; 0.5; 0.5; –0.5; –1.5; –0.5; –1; 2; 0.5.
   Построить поинтервальное распределение статистических вероятностей и гистограмму, положив число интервалов равным 8.
3. 20 наугад взятых учеников выполняют прыжки в высоту, при этом зафиксированы такие результаты: 137, 140, 143, 135, 142, 139, 141, 137, 142, 131, 145, 138, 141, 143, 130, 138, 140, 135, 137, 138.
   Построить ряд распределения статистических вероятностей (относительных частот), полигон частот, функцию распределения статистических вероятностей (относительных частот), считая множество значений исследуемой величины конечным.
4. Обследовано 10 наугад взятых 7-х классов. Количества отличников в каждом из них оказались соответственно: 5, 8, 3, 4, 5, 1, 6, 4, 2, 3.
   Построить ряд распределения статистических вероятностей (относительных частот), полигон частот, функцию распределения

статистических вероятностей (относительных частот) для исследуемой величины.

5. Наугад проверено 50 телевизионных приемников и данные этой проверки сведены в таблицу

Время безотказной работы в годах	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
Количество телеприемников	1	1	2	4	4	7	10	10	6	3	1	1

Построить функцию поинтервального распределения статистических вероятностей $F_{50}^{*}(x)$ и ее график, считая центрами интервалов точки $x_0 = 0.25,$ $x_{i+1} = x_i + 0.50,$ $i = 1, 2, ..., 11.$

6. На 100 наугад взятых участках земли в данном районе посажены по 100 саженцев фруктовых деревьев. Для количества саженцев, которые принялись, построено поинтервальное распределение наблюденных относительных частот (статистических вероятностей):

I_i	(0,10]	(10,20]	(20,30]	(30,40]	(40,50]
p_{ni}^{*}	0.05	0.08	0.12	0.14	0.15

I_i	(50,60]	(60,70]	(70,80]	(80,90]	(90,100]
p_{ni}^{*}	0.20	0.10	0.08	0.06	0.02

Определить значение функции распределения статистических вероятностей (относительных частот) $F_{100}^{*}(x)$ на концах заданных интервалов и построить ее график.

7. На 100 одинаковых по размерам наугад взятых участках земли с одинаковым количеством внесенных удобрений собраны разные урожаи зерна. Результаты проведенных наблюдений приведены в таблице:

Урожай (в ц / гектар)	14	15	16	17	18	19	20
Количество участков	6	10	18	28	20	12	6

Построить полигон частот. Определить среднее арифметическое M_n^{*} и среднее квадратичное отклонение σ_n^{*}.

8. Количество вызовов, которые поступают на АТС за 1 час, случайное. Для наблюдений в течение нескольких дней наугад взято 10 раз по 1 часу между девятью и двенадцатью часами; получены такие результаты:

№ наблюдения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество вызовов	280	320	315	300	285	270	300	330	310	290

Построить полигон частот. Найти среднее арифметическое и среднее квадратичное отклонение для исследуемой величины.

9. Одно и то же расстояние измеряется многократно. Результаты измерений сведены в таблицу:

Номер измерения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Результат измерения	41	39.5	40	40.2	39.9	40.2	39.8	40.1	40	39.9

Найти числовые характеристики M_n^*, σ_n^* распределения статистических вероятностей (относительных частот) наблюденных значений.

10. Для определения среднего времени безотказной работы электроприбора обследованы 100 приборов. По результатам наблюдений получен ряд распределения относительных частот (статистических вероятностей):

x_i	1070	1120	1170	1220	1270	1320	1370	1420
p_{100i}^*	0.02	0.08	0.11	0.20	0.35	0.15	0.06	0.03

Построить гистограмму и функцию поинтервального распределения статистических вероятностей (относительных частот), считая приведенные значения x_i серединами интервалов. Найти числовые характеристики M_n^*, σ_n^*.

§24. Определение согласованности с наблюденными данными гипотез о распределении вероятностей

На практике часто возникает необходимость решить вопрос, согласовывается ли со статистическими данными гипотеза о том, что в действительности распределение вероятностей описывается через плотность $f(x)$, то есть, что функцию $f_n^*(x)$ можно приближенно заменить некоторой неотрицательной функцией $f(x)$ такой, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, и что для любых α, β значение

$$P_n^*((\alpha,\beta]) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f_n^*(x)dx$$

с достаточной точностью будет совпадать со значением $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, и таким образом таблично заданную функцию $f_n^*(x)$ приближенно можно описать через некоторое аналитическое выражение $f(x)$. Или решить вопрос о том, согласовывается ли со статистическими данными гипотеза о том, что поточечное распределение вероятностей имеет заранее определенный (гипотетический) вид.

Один из критериев проверки гипотезы о том, что функция $f(x)$ достаточно близка к функции $f_n^*(x)$, есть так называемый критерий Пирсона.

В соответствии с этим критерием для всех интервалов $(a_{i-1}, a_i]$, ($i = 1, 2, \ldots, m$), для значений $p_i^* = P_n^*((a_{i-1}, a_i])$, находят приближение p_i по формуле $p_i = \int\limits_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)dx$, после чего оценивают величину χ^2 (хи-квадрат): $\chi^2 = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i (p_i - p_i^*)^2$, где $c_i = \dfrac{n}{p_i}$ – “весовые” коэффициенты значений $(p_i - p_i^*)^2$, n – объем выборки.

Так полученное значение χ^2 называют наблюденным (или экспериментальным) значением $\chi^2_{эксп}$ (χ^2 экспериментальное).

Однако, если проводить другие серии наблюдений той же величины, то в каждой из них могут быть получены другие значения $\chi^2_{эксп}$. Если таких серий наблюдений проведено очень много, то для величины χ^2 можно построить функции $f_\chi(x)$ и $F_\chi(x)$, аналогичные функциям $f_n^*(x)$ і $F_n^*(x)$, рассмотренным ранее, и таким образом (с использованием, например, функции $F_\chi(x)$) определить, при каком значении $\chi^2_{кр}$ относительная частота попадания наблюденных значений величины χ^2 на промежуток $(0, \chi^2_{кр})$ будет принимать заранее заданное значение α:

$$P_N^*(\chi^2 < \chi^2_{кр}) = \alpha\ , \ 0 < \alpha < 1 .$$

Если при этом α равно, например, 0.99, то относительная частота попадания значений χ^2 правее значение $\chi^2_{кр}$ равна 0.01, то есть попадание значения χ^2 правее значения $\chi^2_{кр}$ можно считать практически невозможным. Заметим, что если число наблюдений очень большое, то усредненный результат всей массы наблюдений можно предугадать в достаточно четких пределах с достаточно большой степенью уверенности. Таким образом, если наблюденное значение $\chi^2_{эксп}$ больше, чем $\chi^2_{кр}$, то такой результат $\chi^2_{эксп}$ следует считать практически невозможным (маловероятным), и потому гипотезу о том, что функция $f(x)$ есть корректным приближением функции $f_n^*(x)$, следует отклонить, не рискуя допустить грубую ошибку, поскольку в 99 случаях из 100 значения $\chi^2_{эксп}$ меньше, чем значение $\chi^2_{кр}$, если через $f(x)$ действительно корректно описывается распределение статистических вероятностей при очень большом числе испытаний.

Число α называют уровнем значимости оценки $\chi^2_{кр}$. Значение $\chi^2_{кр}$ находят по специальным таблицам, построенным для величины χ^2, по которым по заданному уровню значимости α и числу m интервалов $(a_{i-1}, a_i]$ можно определить соответствующее значение $\chi^2_{кр}$. Иногда $\chi^2_{кр}$ называют также теоретическим значением оценки χ^2 и обозначают $\chi^2_{теор}$. Таким образом, вычислив $\chi^2_{эксп}$ и определив $\chi^2_{кр}$, отвечающее заданному уровню значимости α, нужно сопоставить $\chi^2_{эксп}$ и $\chi^2_{кр}$. Если $\chi^2_{эксп} > \chi^2_{кр}$, то гипотезу о том, что функция $f(x)$ есть корректным приближением функции $f_n^*(x)$, следует отклонить как такую, которая не согласовывается с результатами наблюдений. Если же $\chi^2_{эксп} < \chi^2_{кр}$, тогда считается, что такая гипотеза не противоречит экспериментальным данным и нет оснований ее отклонять.

В программе GRAN1 предусмотрена проверка по критерию Пирсона гипотезы о корректности замены функции $f_n^*(x)$ функцией $f(x)$. Для этого используется услуга “Операции / Статистика / Критерий Пирсона...”.

При обращении к данной услуге в окне “Список объектов” должны быть отмечены меткой ☑ обозначения зависимости, заданной явно в виде $y = f(x)$, и анализируемой выборки, или обозначения двух выборок, которые сопоставляются. Если в окне “Список объектов” отмечены больше или меньше, чем два обозначения зависимостей указанного типа задания, которые сопоставляются, услуга “Операции / Статистика / Критерий Пирсона…” становится недоступной.

Область задания функции $f(x)$ следует выбрать так, что бы в ней находились все варианты выборки.

Сопоставить по критерию Пирсона можно плотность распределения статистических вероятностей $f_n^*(x)$ и функцию $f(x)$, две плотности распределения статистических вероятностей для выборок, варианты которых изменяются в одних и тех же пределах (совпадают “отрезки задания” выборок), а также поточечные гипотетическое и экспериментально полученное распределения, которые заданы на одном и том же множестве возможных значений исследуемой величины.

При обращении к услуге “Операции / Статистика / Критерий Пирсона…” для того, чтобы сопоставить плотность $f_n^*(x)$ непрерывного распределения статистических вероятностей с функцией $f(x)$, по программе проверяются два условия:

Внутри отрезка $[a,b]$, на котором задана гипотетическая функция $f(x) \geq 0$, должны находиться пределы u и v, $u < v$, в которых изменяются варианты выборки $([u,v] \subset [a,b])$.

Должно выполняться условие $\int\limits_a^b f(x)dx = 1$.

Если первое условие не выполняется, в окне “График” появляется сообщение “Несовпадение отрезков задания!”. Это значит, что необходимо изменить отрезок $[a,b]$, на котором задана функция $y = f(x)$, так, чтобы выполнялось требование $[u,v] \subset [a,b]$. Для этого используется услуга “Объект / Изменить”.

При невыполнении второго условия выводится сообщение “Интеграл $f(x)$ на $[a,\ b] <> 1!$”, а также значение интеграла от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Аналогичные сообщения появляются при попытке сравнить по критерию Пирсона два поинтервальные распределения с разными отрезками задания, или два поточечные распределения с разными множествами возможных значений, а также при попытке сравнить поточечное распределение с поинтервальным.

Если оба требования $[u,v] \subset [a,b])$. и $\int\limits_a^b f(x)dx = 1$ выполняются, то появляется вспомогательное окно “Критерий Пирсона” (Рис. 24.1, Рис. 24.2). В этом окне нужно указать, какой из указанных ранее объектов (из списка объектов) рассматривается как гипотетическое распределение частот, а через какой описываются статистические данные. Причем, если сравниваются плотность распределения статистических вероятностей $f_n^*(x)$ с функцией $f(x)$, то как гипотетическая автоматически выбирается функция $f(x)$ (Рис. 24.1). Если же сравниваются две плотности распределения статистических вероятностей, то необходимо указать, какая из них является гипотетической, а какая экспериментальной (Рис. 24.2).

В этом окне также указывается количество интервалов для экспериментальной выборки k, что необходимо для задания количества степеней свободы. Рекомендуется при наличии гипотезы о нормальном распределении статистических вероятностей задавать число степеней свободы равным $k-3$, а в других случаях равным $k-1$. Однако можно ввести и другое число.

Кроме того следует указать уровень значимости α, относительно которого будет определяться $\chi^2_{теор}$. По умолчанию выбирается значение, равное 0.95. Можно из предлагаемого списка также выбрать одно из других значений.

После нажатия кнопки “ОК” в окне “Ответы” выводится сообщение, в котором указываются уровень значимости, число степеней свободы, значения $\chi^2_{эксп}$ и $\chi^2_{теор}$, а также сообщение о том, подтверждается или не подтверждается гипотеза (Рис. 24.3, Рис. 24.4).

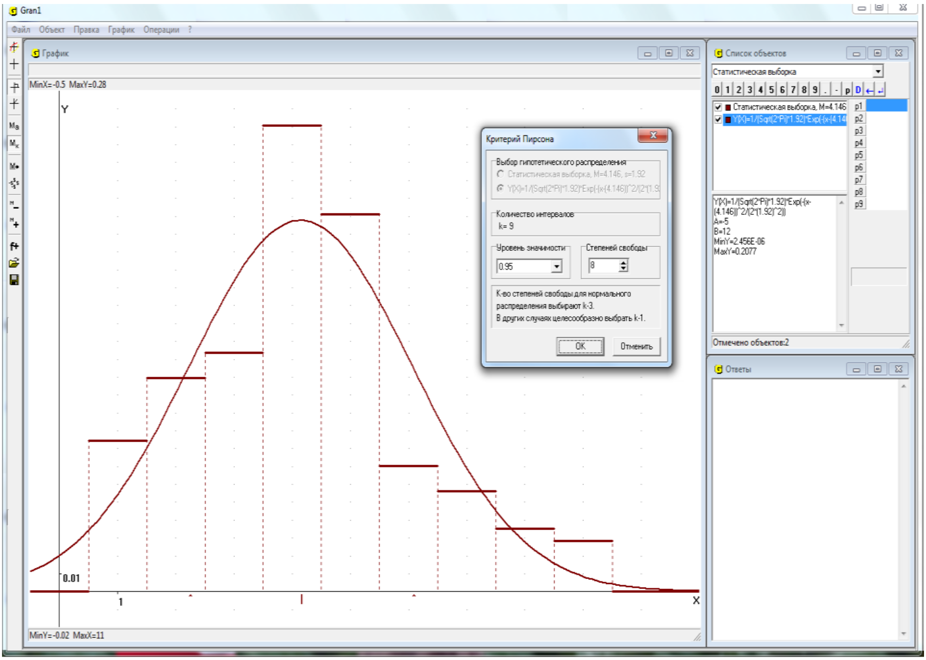


Рис. 24.1

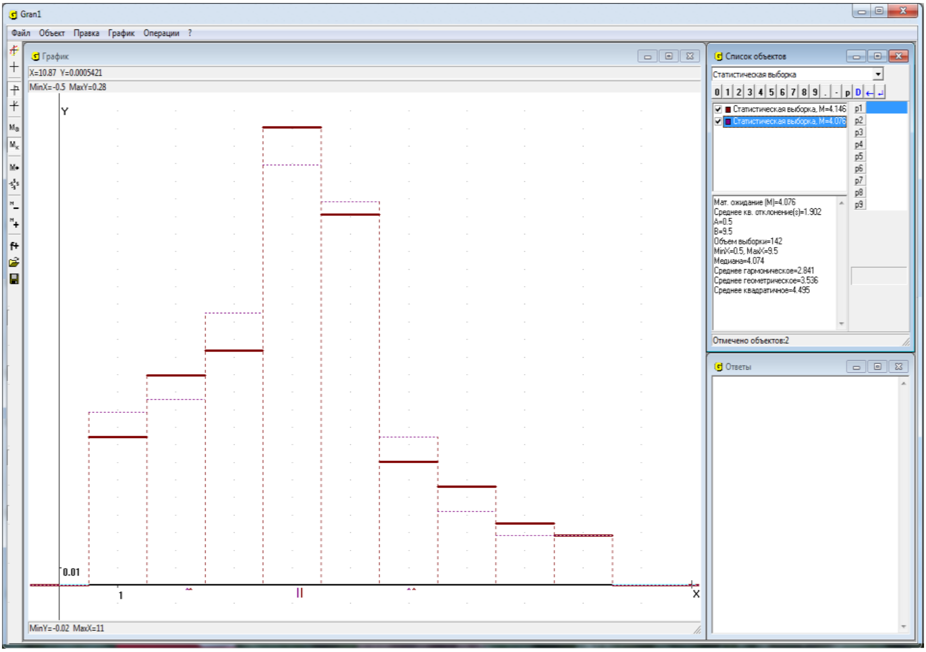


Рис. 24.2

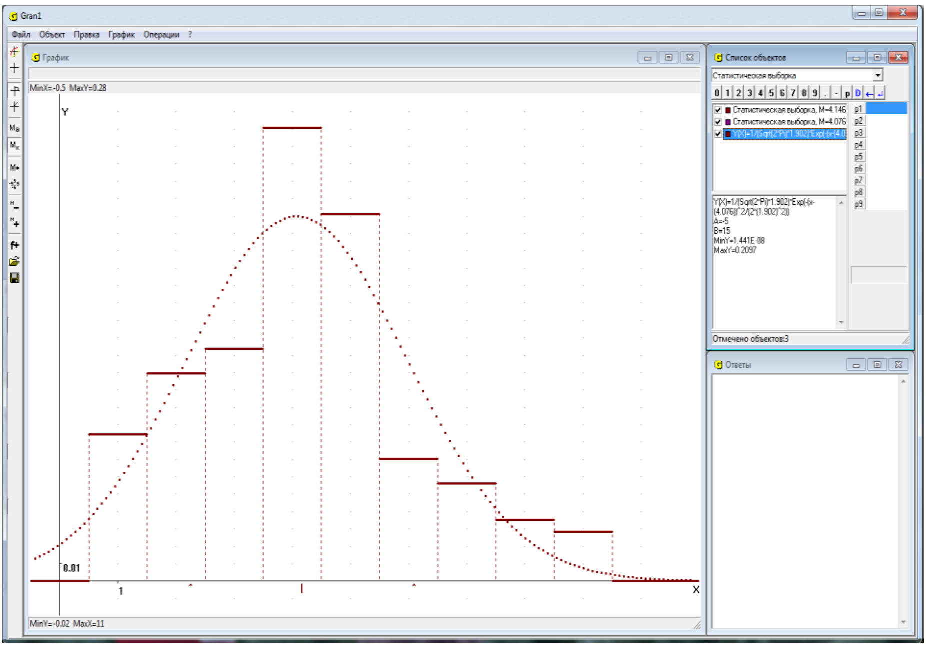


Рис. 24.3

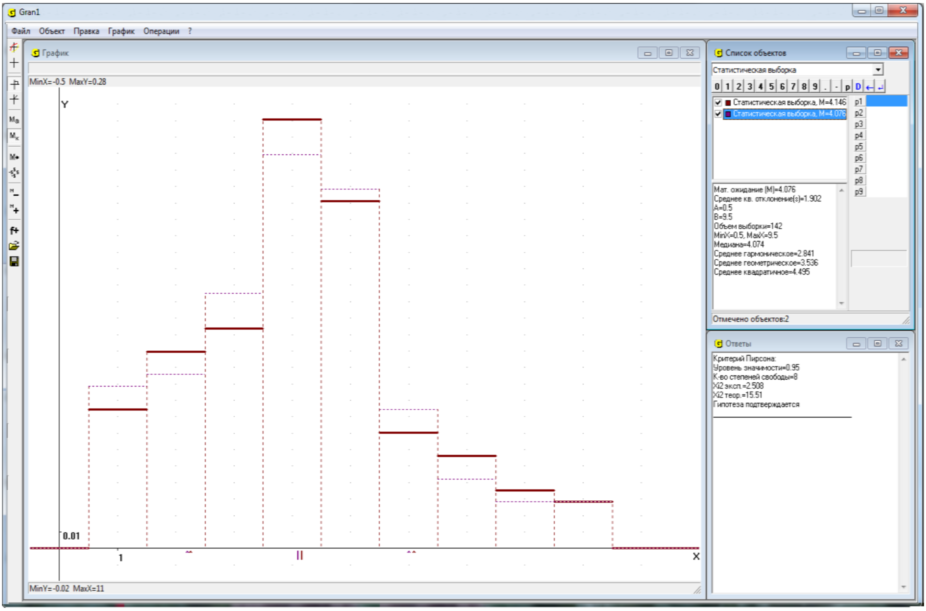


Рис. 24.4

Если гипотеза о том, что функцией $y = f(x)$ можно корректно приближенно заменить функцию $f_n^*(x)$, или о том, что две выборки принадлежат к одной и той же генеральной совокупности (сравниваются две функции $f_n^*(x)$, не согласовывается со статистическими данными, в окне “Ответы” выводится сообщение “Гипотеза не подтверждается” (Рис. 24.3). Если же гипотеза согласовывается со статистическими данными, в окне “Ответы” выводится сообщение “Гипотеза подтверждается” (Рис. 24.4).

Заметим, что одна и та же гипотеза может подтверждаться или не подтверждаться в зависимости от того, какой указан уровень значимости α или объем выборки при вводе относительных частот. При большом объеме выборки наблюдаемое распределение частот должно очень мало в указанном смысле отличаться от гипотетического. В противном случае гипотеза о корректности приближенной замены функции $f_n^*(x)$ функцией $f(x)$ подтверждаться не будет.

Аналогично предыдущему можно проверить и гипотезу о том, что поточечное распределение статистических вероятностей на множестве $x_1, x_2, \ldots, x_k$ при очень больших n имеет вид

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_k

где $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ (Рис. 24.5).

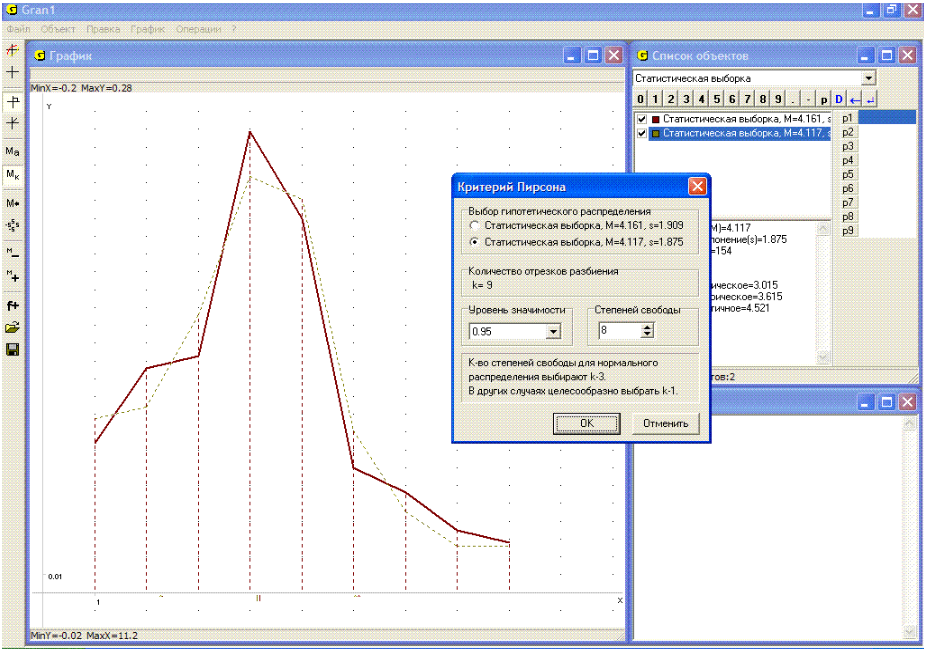


Рис. 24.5

Близость такого гипотетического поточечного распределения статистических вероятностей на конечном множестве точек и экспериментально полученного распределения при конкретном количестве испытаний n

x_i	x_1	x_2	…	x_k
$P_n^*(x_i)$	p_1^*	p_2^*	…	p_k^*

оценивается, как и раньше, с помощью величины χ^2:

$$\chi^2_{эксп} = n\sum_{i=1}^{k}\frac{(p_i - p_i^*)^2}{p}.$$

Дальше так же, как и раньше, определяется значение $\chi^2_{кр}$ (χ^2 критическое) при заданном количестве степеней свободы и уровне значимости α, а затем сравниваются значения $\chi^2_{кр}$ и $\chi^2_{эксп}$. Если при этом окажется $\chi^2_{эксп} > \chi^2_{кр}$, то считается, что гипотеза о том, что при очень больших n распределение статистических вероятностей будет иметь предполагаемый (гипотетический) вид, не согласовывается с экспериментальными данными при конкретном n.

Примеры

3. Пусть необходимо проверить гипотезу о корректности замены функции $f_n^*(x)$, график которой показан на Рис. 24.6, функцией $f(x)$ вида $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, заданной на промежутке $[a,b]$. Положим сначала $m=4$, $\sigma=1$, $a=0$, $b=8$ и построим графики зависимостей $y=f_n^*(x)$ и $y=f(x)$ (Рис. 24.7). Если теперь обратиться к услуге “Операции / Статистика / Критерий Пирсона…”, на экране дисплея появится сообщение “Несовпадение отрезков задания” (Рис. 24.8).

Выберем теперь функцию $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}1.8}e^{-\frac{(x-4.2)^2}{2(1.8)^2}}$, положив $a=-3$, $b=11$, $m=4.2$, $\sigma=1.8$. В этом случае отрезок [–3, 11] задания функции $f(x)$ полностью охватывает отрезок [0.5; 9.5] задания функции $f_n^*(x)$ и $\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx=1$ с достаточной точностью (Рис. 24.9). После обращения к услуге “Операции / Статистика / Критерий Пирсона” указанные ранее сообщения о несоответствии отрезков задания или о том, что интеграл $\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx$ не равен единице, теперь не появляются, а появляется окно “Критерий Пирсона …”, в котором следует указать уровень значимости и количество степеней свободы. Выбрав $\alpha=0.95$ и указав $k=6$, в окне “Ответы” получаем результат (Рис. 24.10):

$\chi^2_{эксп}=17.85$,

$\chi^2_{теор}=12.59$.

Гипотеза не подтверждается.

4. Из одного и того же файла, в котором содержатся список вариант и относительных частот, введены две выборки, объем одной из которых указан “N=200”, а другой – “N=1000”. Сопоставить их по критерию Пирсона.

Сравнивая Рис. 24.11 и Рис. 24.12, видим, что в основном числовые характеристики обеих выборок совпадают, а графики налагаются один на другой.

На этот раз гипотеза о том, что функция $f_n^*(x)$ корректно может быть заменена ею же, не вызывает сомнений. Этот очевидный результат подтверждается и по критерию Пирсона (Рис. 24.13)

5. Игральный кубик подбрасывали 150 раз. При этом получили следующую таблицу числа очков, которые выпадали на гранях кубика:

x_i	1	2	3	4	5	6
k_i	14	23	24	22	21	46

Проверить по критерию Пирсона гипотезу о том, что при очень большом числе испытаний дискретное распределение статистических вероятностей будет иметь вид

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0.1	0.15	0.15	0.15	0.15	0.3

Введем в программу две выборки: первая задается частотами, а вторая – относительными частотами, причем количество элементов второй выборки укажем равным “N=10000”. Обратившись затем к услуге “Операции / Статистика / Критерий Пирсона …” и указав уровень значимости $\alpha = 0.95$ и количество степеней свободы $k = 5$, получим в окне “Ответы” сообщение о том, что гипотеза подтверждается (Рис. 24.14).

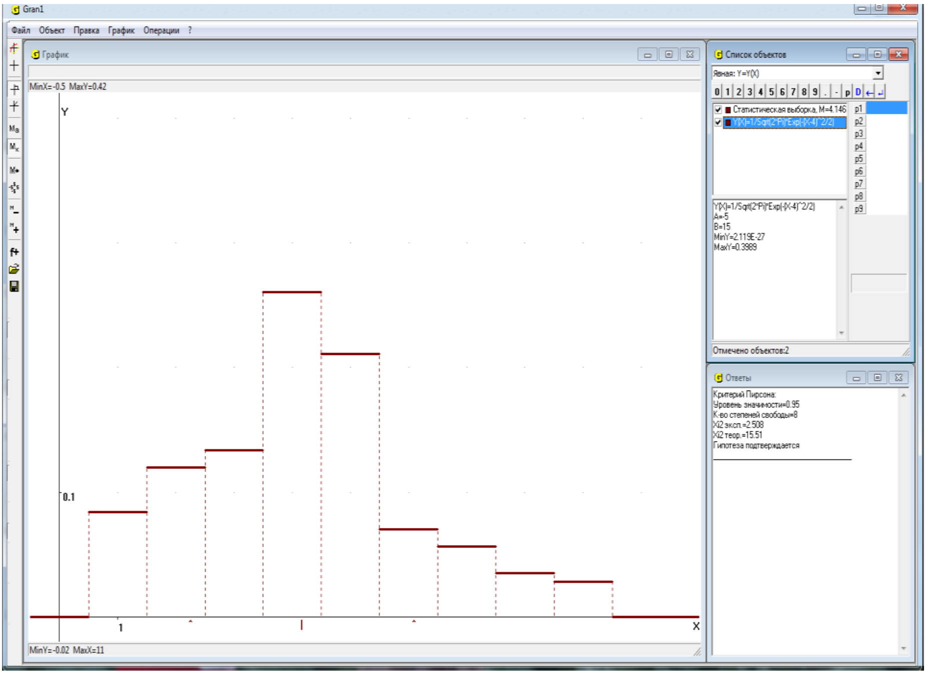


Рис. 24.6

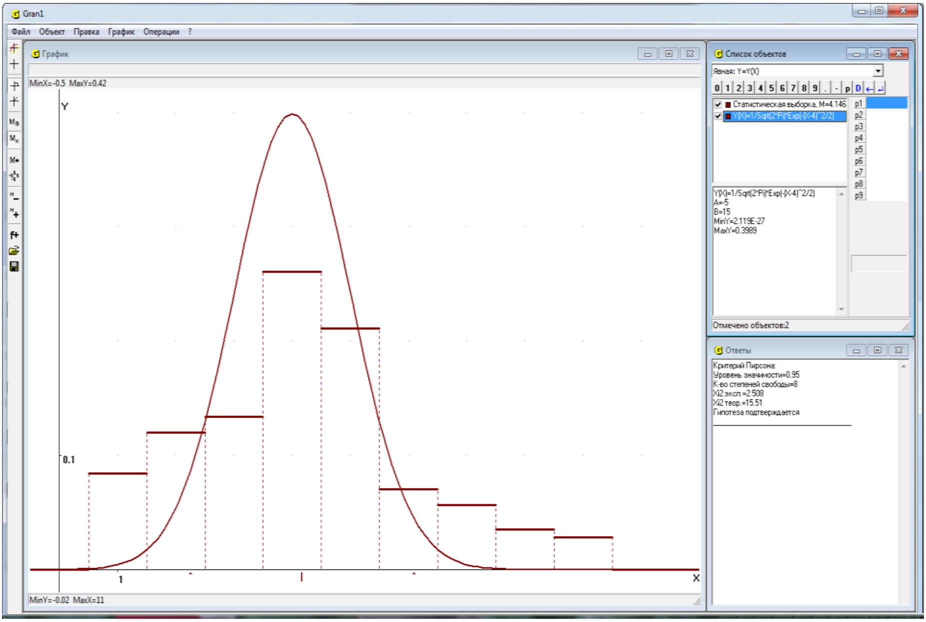


Рис. 24.7

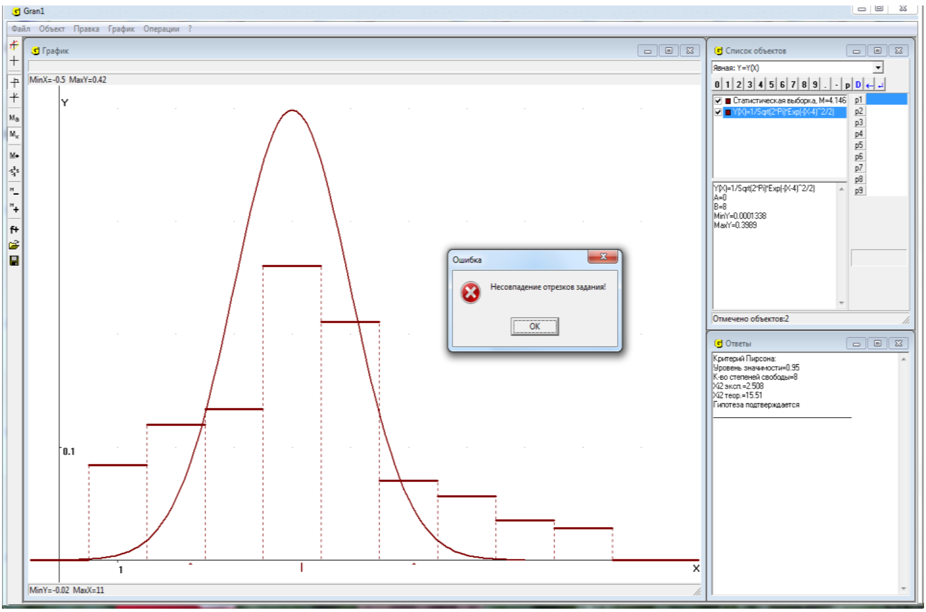


Рис. 24.8

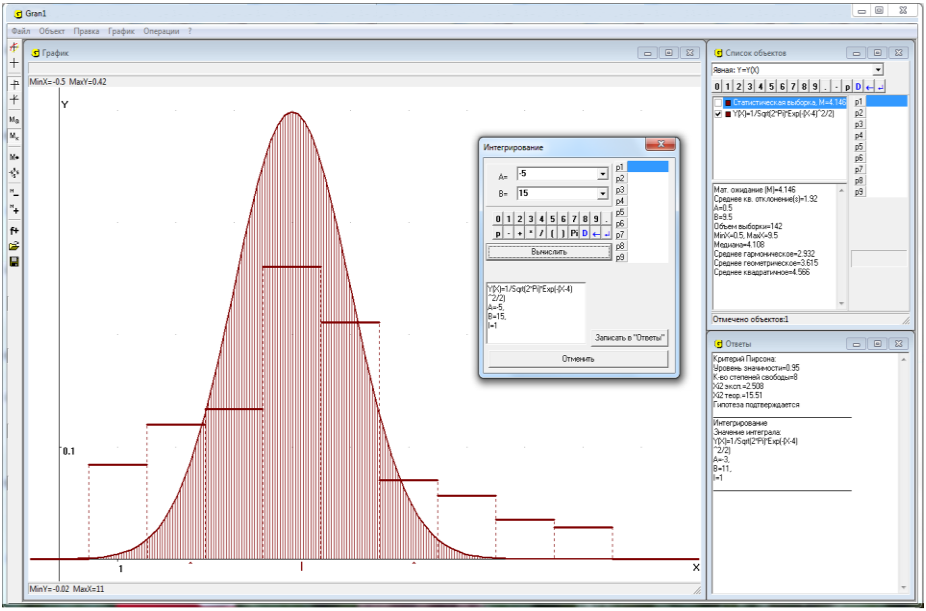


Рис. 24.9

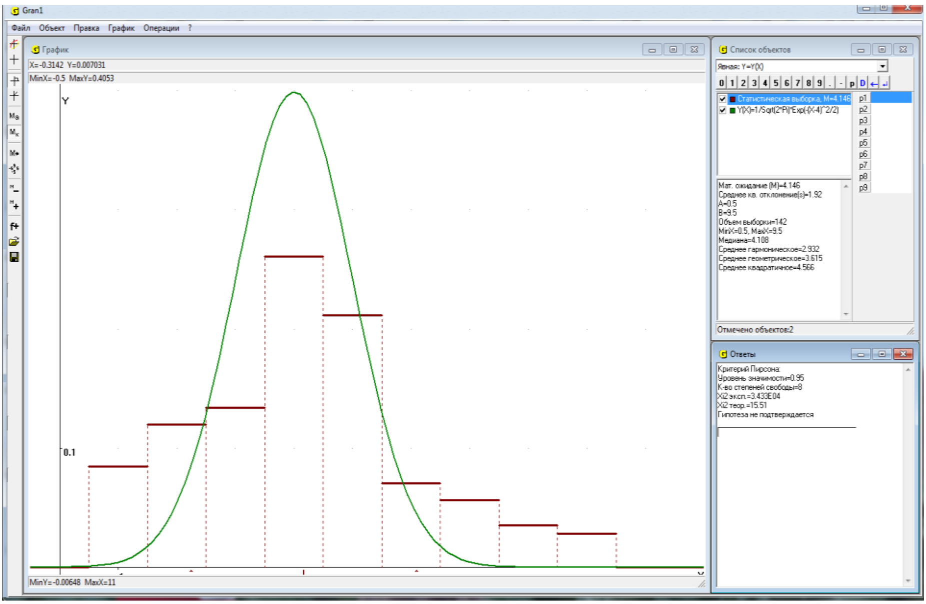


Рис. 24.10

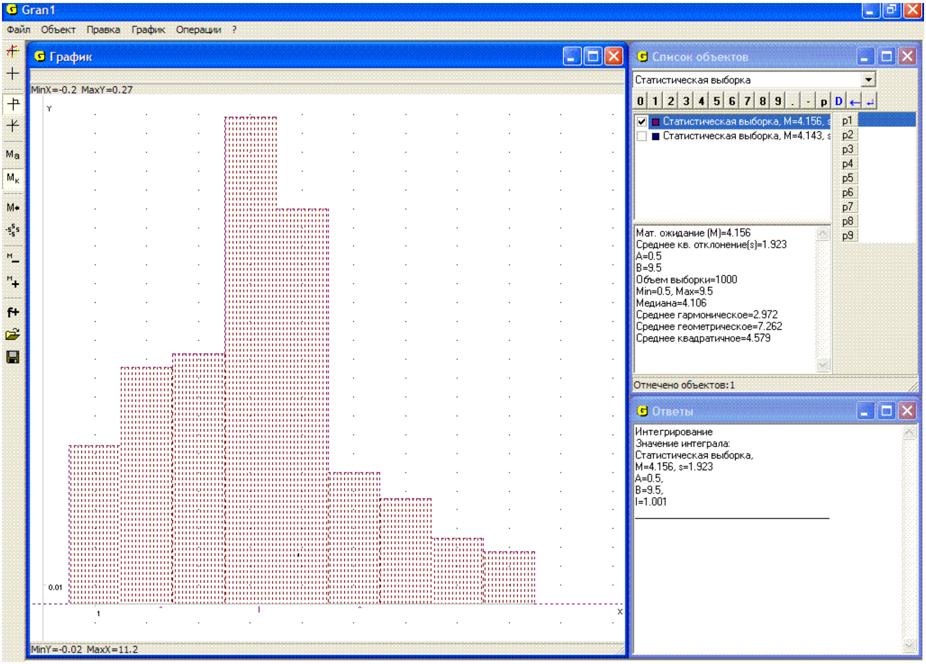


Рис. 24.11

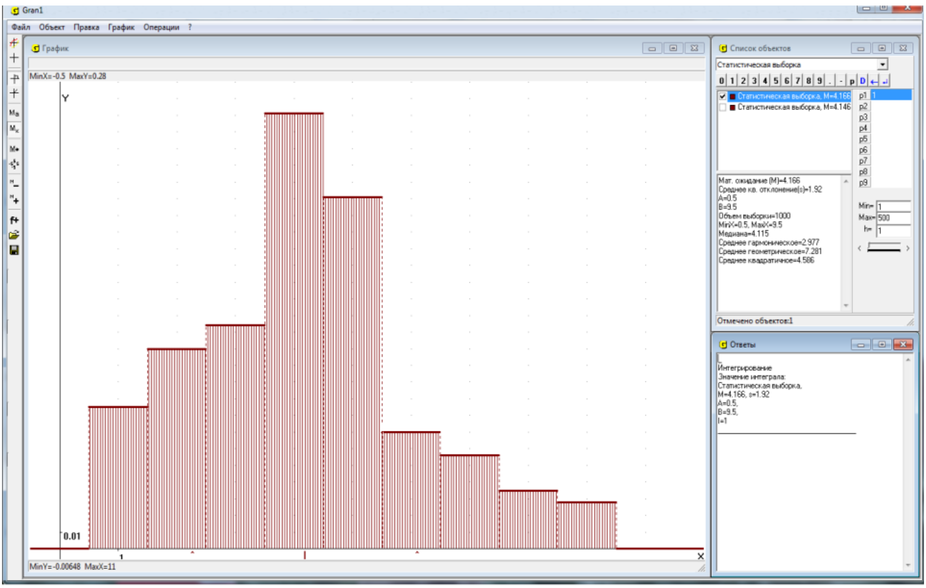


Рис. 24.12

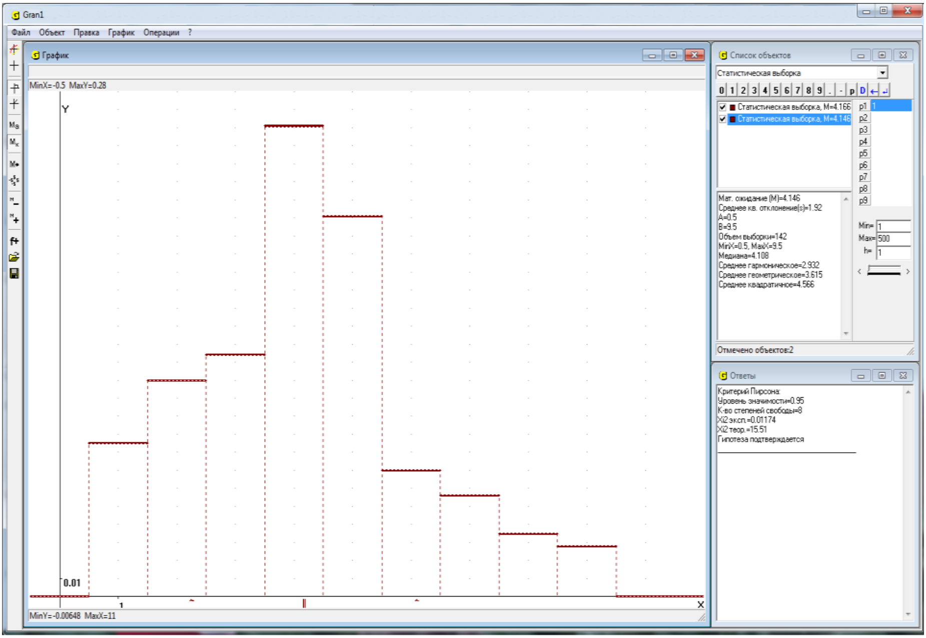


Рис. 24.13

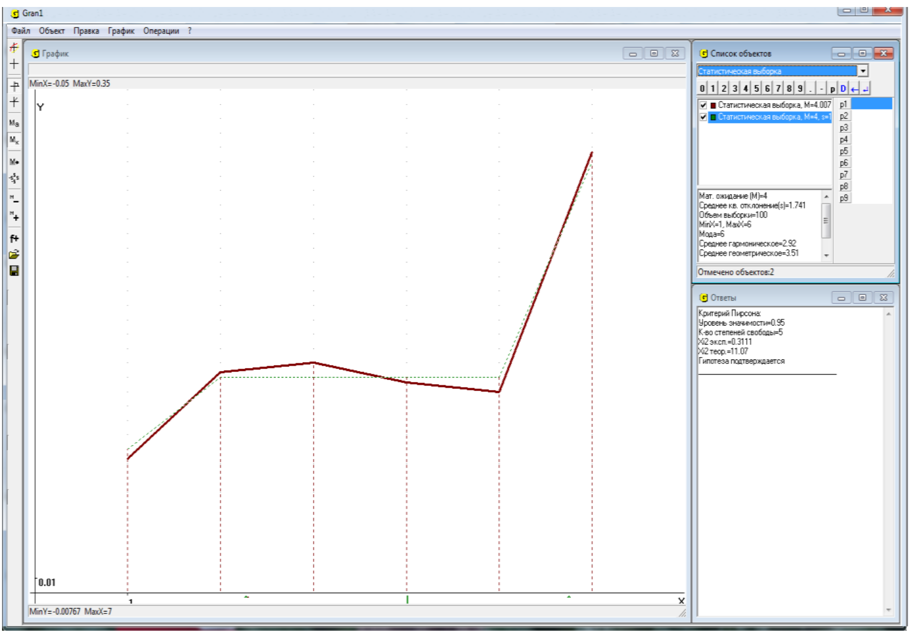


Рис. 24.14

Вопросы для самоконтроля

1. Как найти статистическую вероятность (относительную частоту) попадания значений исследуемой величины на промежуток $[\alpha, \beta)$, если известна плотность $f_n^*(x)$ поинтервального распределения статистических вероятностей?
2. Чему равен $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n^*(x)dx$?
3. Как, зная функцию $F_n^*(x)$, найти статистическую вероятность (относительную частоту) попадания значений исследуемой величины на промежуток $[\alpha, \beta)$?
4. Что характеризует $f_n^*(x)$ относительно $F_n^*(x)$?
5. Как, зная $f_n^*(x)$, найти $F_n^*(x)$?
6. Как, зная $F_n^*(x)$, найти $f_n^*(x)$ при поинтервальном распределении частот?
7. Чему равны значения: $F_n^*(-\infty)$, $F_n^*(+\infty)$?
8. Может ли $f_n^*(x)$ принимать отрицательные значения?
9. Может ли $F_n^*(x)$ принимать отрицательные значения?
10. Может ли функция $F_n^*(x)$ убывать с возрастанием x?
11. Может ли функция $f_n^*(x)$ убывать с возрастанием x?
12. Обязательно ли $F_n^*(x_1) < F_n^*(x_2)$, если $x_1 < x_2$?
13. Как по критерию Пирсона установить корректность предположения о том, что функцию $f_n^*(x)$ можно заменить функцией $f(x)$, то есть что в действительности распределение вероятностей описывается через плотность $f(x)$?
14. Какие условия должна удовлетворять функция $f(x)$, которой предлагается приближенно заменить функцию $f_n^*(x)$?
15. Как по критерию Пирсона оценивается близость функций $f_n^*(x)$ и $f(x)$? Как вычисляется мера такой близости ?
16. Какое значение называют наблюденным значением меры близости функций $f_n^*(x)$ и $f(x)$, оцениваемой по критерию Пирсона?
17. Как для заданного уровня значимости определяют критическое значение, правее которого практически невозможно появление наблюдаемых значений $\chi^2_{експ}$?
18. В каких случаях считают, что по критерию Пирсона гипотеза о корректности замены функции $f_n^*(x)$ функцией $f(x)$ не согласовывается с экспериментальными данными ?
19. Как проверить по критерию Пирсона гипотезу о корректности замены функции $f_n^*(x)$ функцией $f(x)$, используя услуги программы GRAN1?

20. Если введены несколько выборок и несколько функций $f(x)$, какие именно среди них будут анализироваться по критерию Пирсона при использовании услуги “Операции / Статистика / Критерий Пирсона”?
21. Как с использованием услуг программы GRAN1 определить значение $\chi^2_{эксп}$ и $\chi^2_{кр}$ для заданного уровня значимости?
22. Как определить уровень значимости при использовании услуги “Операции / Статистика / Критерий Пирсона” для решения по критерию Пирсона вопроса о том, что гипотеза о корректности приближенной замены функции $f_n^*(x)$ функцией $f(x)$ согласовывается с экспериментальными данными?
23. Может ли гипотеза о корректности замены функции $f_n^*(x)$ одной и той же функцией $f(x)$ в одних случаях подтверждаться, а в других нет? От чего это зависит?
24. Как по критерию Пирсона проверить гипотезу о том, что поточечное распределение статистических вероятностей на конечном множестве точек $x_1, x_2, ..., x_k$ при очень большом числе испытаний имеет заданный вид?

Упражнения для самостоятельного выполнения

1. Задано поинтервальное распределение статистических вероятностей (относительных частот) появления наблюденных значений исследуемой величины X:

x_i	(–4, 3]	(–3, 2]	(–2, 1]	(–1, 0]	(0, 1]	(1, 2]	(2, 3]	(3, 4]
m_i	0.002	0.019	0.144	0.335	0.321	0.156	0.022	0.001

Записать аналитические выражения для функций $f_n^*(x)$ и $F_n^*(x)$.
2. Записать данные в рабочий файл (вводя вместо обеих абсцисс концов каждого интервала абсциссу его середины).
3. Построить графики функций $f_n^*(x)$ и $F_n^*(x)$, используя услуги программы GRAN1.
4. Построить полигон частот, считая середины интервалов представителями всех точек соответствующих интервалов и переходя таким способом от поинтервального распределения частот к поточечному.
5. По функциям $f_n^*(x)$ и $F_n^*(x)$ определить статистические вероятности (относительные частоты) попадания наблюдаемых значений исследуемой величины на промежутки: [–4, 3); [–3, 2); [–2, 1); [–1, 0); [0, 1); [0, 2); [0, 3); [1, 2); [1, 3); [2, 3), [0.25, 0.75); [2.5, 3.5).
6. Используя услуги программы GRAN1, определить M_n^* и σ_n^* для распределения статистических вероятностей (относительных частот) из упражнения 5.
7. По критерию Пирсона определить, согласовывается ли с указанным в упражнении 5 поинтервальным распределением относительных

частот гипотеза о том, что функция $f_n^*(x)$ может быть корректно заменена функцией $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, заданной на промежутке [–5, 5], при объеме выборки $n = 50$; $n = 100$; $n = 500$; $n = 1000$.

8. Задание из упражнения 7 выполнить для поинтервального распределения относительных частот:

[–4, 3.5)	[–3.5, 3)	[–3, 2.5)	[–2.5, 2)	[–2, 1.5)	[–1.5, 1)	[–1, 0.5)
0.0001	0.0010	0.0047	0.0164	0.0440	0.0920	0.1500

[–0.5, 0)	[0, 0.5)	[0.5, 1)	[1, 1.5)	[1.5, 2)	[2, 2.5)	[2.5, 3)	[3, 3.5)	[3.5, 4)
0.1918	0.1918	0.1500	0.0920	0.0440	0.0164	0.0047	0.0010	0.0001

9. Проверить по критерию Пирсона гипотезу о том, что при очень большом количестве испытаний поточечное распределение вероятностей будет иметь вид

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_i	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

если по результатам 100 испытаний получено распределение статистических вероятностей

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_i	0.08	0.12	0.05	0.10	0.16	0.06	0.09	0.11	0.15	0.19

Литература

1. М.И.Жалдак. Компьютер на уроках математики: Пособие для учителей. – Киев: Техника, 1997. – 303 с.: ил.
2. М.И.Жалдак, Ю.В.Горошко, Е.Ф.Винниченко. Математика с компьютером: пособие для учителей. – К.: РННЦ «ДИНИТ». – 2004. – 255 с.
3. М.И. Жалдак, Н.Н. Кузьмина, Г.А. Михалин. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник для студентов физико-математических и информатических специальностей педагогических университетов. Издание третье, переработанное и дополненное. – Киев. НПУ имени М.П. Драгоманова. 2015. – 705 с.

Содержание

Учебное издание

М. И. Жалдак, Ю. В. Горошко, Е. Ф. Винниченко

Математика с компьютером

Пособие для учителей

(перевод с украинского)

Издание третье, дополненное

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины