

Мирослав Жалдак

Геннадій Михалін

Станіслав Деканов

**МАТЕМАТИЧНИЙ
АНАЛІЗ
З ЕЛЕМЕНТАМИ
ІНФОРМАЦІЙНИХ
ТЕХНОЛОГІЙ**

*Навчальний
посібник*

**Інформатика. Бібліотека
Математика. Бібліотека**

Київ
ТОВ «Редакції газет
природничо-математичного
циклу»
2012

УДК 517:004 (075.8)

ББК 22.161я73

Ж 24

*Рекомендовано до друку Вченою радою фізико-математичного інституту
НПУ імені М. П. Драгоманова (Протокол №5 від 08.02.2012)*

Редакційна рада:

В. Биков – доктор техн. наук,
Н. Вовковінська, М. Мосієнко – канд. філол. наук,
Г. Кузьменко, О. Шатохіна

Рецензенти:

М. В. Працьовитий – доктор фіз.-мат. наук,
професор НПУ імені М. П. Драгоманова,
Ю. В. Триус – доктор пед. наук, професор
Черкаського НУ ім. Богдана Хмельницького

Усі права застережено. Передрук тільки з письмової згоди видавництва

Жалдак М. І.

Математичний аналіз з елементами інформаційних технологій:
Навчальний посібник / Мирослав Жалдак, Геннадій Михалін, Станіслав
Деканов. – К.: Редакції газет природничо-математичного циклу, 2012. –
128 с. – (Бібліотека «Шкільного світу»).

ISBN 978-966-451-000-1.

ISBN 978-966-2755-12-1.

У посібнику оригінально подано інтегральне числення функцій однієї
змінної. Введено інтеграли Ньютона – Лейбніца і Рімана, наведено їх
властивості, взаємозв'язки та застосування.

Кожен підрозділ містить: 1) теоретичні відомості, ілюстровані достатньою кількістю прикладів і рисунків; 2) приклади застосування комп'ютерних засобів математики; 3) завдання для виконання за допомогою комп'ютера.

Для студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів, вчителів математики та інформатики.

517:004 (075.8)

ББК 22.161я73

ISBN 978-966-451-000-1

ISBN 978-966-2755-12-1

© Жалдак М. І., Михалін Г. О., Деканов С. Я., 2012

© ТОВ «Редакції газет природничо-математичного циклу», дополіграфічна підготовка, 2012

Зміст

Передмова	6
1. ІНТЕГРАЛ НЬЮТОНА – ЛЕЙБНІЦА І НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ	7
1.1. Поняття первісної, інтеграла Ньютона – Лейбніца і невизначеного інтеграла	7
1.1.1. Поняття первісної.....	7
1.1.2. Теорема про множину первісних даної функції.....	7
1.1.3. Поняття NL -інтегрованої функції та NL -інтеграла	8
1.1.4. Формула Ньютона – Лейбніца	8
1.1.5. Найпростіші властивості NL -інтеграла	9
1.1.6. Поняття невизначеного інтеграла. Таблиця основних інтегралів	10
1.1.7. Лінійність NL -інтеграла та метод розкладу обчислення невизначеного інтеграла.....	12
1.1.8. Заміна змінної в NL -інтегралі та у невизначеному інтегралі	13
1.1.9. Формули інтегрування частинами для NL -інтеграла та невизначеного інтеграла.....	13
1.1.10. Використання комп'ютерних засобів математики.....	14
1.1.11. Завдання для виконання за допомогою комп'ютера.....	18
1.2. Існування NL-інтеграла неперервної функції	18
1.2.1. NL -інтегровність ламаної функції	18
1.2.2. Зв'язок неперервних функцій з ламаними.....	19
1.2.3. NL -інтегровність граничної функції	19
1.2.4. NL -інтегровність неперервної функції. Площа криволінійної трапеції	19
1.2.5. Використання комп'ютерних засобів математики.....	20
1.2.6. Завдання для виконання за допомогою комп'ютера.....	24
1.3. Обчислення невизначених інтегралів функцій деяких класів	25
1.3.1. Інтегрування многочленів	25
1.3.2. Інтегрування елементарних дробів.....	25
1.3.3. Алгоритм відшукування невизначеного інтеграла раціональної функції	27
1.3.4. Інтегрування комплексних дробово-раціональних функцій.	29
1.3.5. Інтегрування деяких ірраціональних алгебраїчних функцій	31

1.3.6. Інтегрування деяких трансцендентних функцій	33
1.3.7. Приклади неелементарних функцій	34
1.3.8. Використання комп'ютерних засобів математики	36
1.3.9. Завдання для виконання за допомогою комп'ютера	45
2. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ	46
2.1. Поняття визначеного інтеграла та його існування	46
2.1.1. Розбиття відрізка та його дрібність	46
2.1.2. Поняття площі криволінійної трапеції	46
2.1.3. Поняття інтегральної суми та її границі	47
2.1.4. Поняття R -інтегрованої функції та R -інтеграла	48
2.1.5. Зв'язок між інтегралами Рімана і Ньютона – Лейбніца	48
2.1.6. R -інтегровність неперервних функцій. Геометричний зміст R -інтеграла	49
2.1.7. Необхідна умова R -інтегровності	49
2.1.8. Суми Дарбу та їх властивості. Верхній та нижній інтеграли Дарбу	50
2.1.9. Критерії R -інтегровності	51
2.1.10. Достатні умови R -інтегровності	51
2.1.11. Використання комп'ютерних засобів математики	52
2.1.12. Завдання для виконання за допомогою комп'ютера	60
2.2. Основні властивості R-інтеграла	61
2.2.1. R -інтегровність сталої функції, лінійність та монотонність R -інтеграла	61
2.2.2. R -інтегровність модуля функції та добутку функцій	61
2.2.3. Теорема про середнє	61
2.2.4. Адитивність R -інтеграла	62
2.2.5. Інтеграл із змінною межею інтегрування	63
2.2.6. Формули заміни змінної та інтегрування частинами для R - інтеграла	64
2.2.7. Використання комп'ютерних засобів математики	66
2.2.8. Завдання для виконання за допомогою комп'ютера	88
3. ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ	89
3.1. Обчислення довжини дуги кривої	89
3.1.1. Поняття кривої. Приклади кривих	89
3.1.2. Поняття довжини дуги	93
3.1.3. Критерії спрямлюваності	94

3.1.4. Обчислення довжини дуги	95
3.1.5. Диференціал довжини дуги	96
3.1.6. Гладкі та кусково-гладкі дуги	97
3.1.7. Використання комп'ютерних засобів математики	97
3.1.8. Завдання для виконання за допомогою комп'ютера	107
3.2. Обчислення площ плоских фігур	107
3.2.1. Поняття плоскої фігури та її площі	107
3.2.2. Критерії квадровності	109
3.2.3. Основні та вивідні властивості квадровних фігур і площі .	110
3.2.4. Площа узагальненої криволінійної трапеції	110
3.2.5. Площа криволінійного сектора	112
3.2.6. Використання комп'ютерних засобів математики	112
3.2.7. Завдання для виконання за допомогою комп'ютера	113
3.3. Обчислення об'єму просторової фігури	113
3.3.1. Поняття просторової фігури та її об'єму	113
3.3.2. Властивості кубовних фігур та об'ємів	114
3.3.3. Приклади кубовних та некубовних просторових фігур	115
3.3.4. Принцип Кавальєрі	115
3.3.5. Об'єм тіла обертання	116
3.3.6. Використання комп'ютерних засобів математики	117
3.3.7. Завдання для виконання за допомогою комп'ютера	121
Література	123

Передмова

Навчальний матеріал посібника подано на сучасному і водночас доступному для студентів рівні. Спосіб подання навчального матеріалу дещо відмінний від традиційного для навчальної літератури. Так, з поняттям первісної функції пов'язане не тільки поняття невизначеного інтеграла, а й поняття інтеграла Ньютона – Лейбніца, або NL -інтеграла, яке фактично введено засновниками диференціального та інтегрального числення І. Ньютоном та Г. Лейбніцом. Це поняття особливо корисне для вчителів математики, оскільки його означення і доведення властивостей значно простіші, ніж для традиційного визначеного інтеграла. Тому початки інтегрального числення у школі можна вивчати на основі поняття інтеграла Ньютона – Лейбніца. У зв'язку з цим перший розділ посібника присвячено NL -інтегралу та невизначеному інтегралу, хоча на практиці скрізь, де використовують невизначений інтеграл, можна обійтися NL -інтегралом.

Другий розділ посібника присвячено визначеному інтегралу, або інтегралу Рімана (R -інтегралу).

У третьому розділі посібника розглянуто геометричні застосування інтегрального числення.

У посібнику досить широко використовується логічна символіка та деякі інші скорочення, зміст яких розкривається у наступній таблиці.

Символ	Які слова замінює даний символ
\forall	“для будь-якого”, “для кожного”, “для всіх” тощо
\exists	“існує”, “знайдеться” тощо
$\exists!$	“існує єдиний”, “знайдеться єдиний” тощо
:	“такий, що”, “тих, кожен з яких”, “а саме” тощо
$:=, =:$	“дорівнює за означенням”, “надається значення” тощо
\Rightarrow	“впливає”, “якщо ..., то” тощо
\Leftrightarrow	“тоді й тільки тоді”, “необхідно й достатньо” тощо
\square	“Початок міркувань”
\blacksquare	“Кінець міркувань”
\mathbb{N}	Множина натуральних чисел
\mathbb{Z}	Множина цілих чисел
\mathbb{Q}	Множина раціональних чисел
\mathbb{R}	Множина дійсних чисел
\mathbb{C}	Множина комплексних чисел
m, n	Цілочисельний відрізок: $\{x \in \mathbb{Z}: m \leq x \leq n\}$

1. ІНТЕГРАЛ НЬЮТОНА – ЛЕЙБНІЦА І НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1. Поняття первісної, інтеграла Ньютона – Лейбніца та невизначеного інтеграла

1.1.1. Поняття первісної. Поняття похідної функції f дозволяє визначати такі властивості цієї функції, як монотонність, точки екстремуму, опуклість та інші. За допомогою похідної можна визначати швидкість руху матеріальної точки, якщо відомий закон її руху, знаходити дотичну до графіка функції та розв'язувати багато інших практичних задач.

Разом з тим на практиці досить часто зустрічаються задачі, в яких відомими є властивості функції, а потрібно знайти саму функцію. Наприклад, за відомою в довільний момент часу швидкістю руху матеріальної точки потрібно знайти закон її руху, за відомою дотичною до графіка функції в довільній його точці потрібно знайти саму функцію і т. ін. У загальному вигляді такі задачі зводяться до відшукування невідомої функції за відомою її похідною. У зв'язку з цим вводять наступне означення.

Функцію F називають *первісною функцією* f (дійсної або комплексної змінної) на множині E , якщо $F'(z) = f(z) \forall z \in E$. При цьому також кажуть, що *функція f має первісну на множині E* .

Приклади. 1. Функція $F(z) = \sin z$ є первісною функції $f(z) = \cos z$ на множині $E = \mathbb{C}$.

2. Функція $F(x) = \ln |x|$ є первісною функції $f(x) = \frac{1}{x}$ на множині $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Зауважимо, що означення первісної вимагає, щоб кожна точка множини $E \subset \mathbb{C}$ була внутрішньою, тобто $\forall z_0 \in E \exists \delta = \delta(z_0): O_\delta(z_0) \subset E$, а коли $E \subset \mathbb{R}$, то $(z_0 - \delta; z_0] \subset E$ або $[z_0; z_0 + \delta) \subset E$.

1.1.2. Теорема про множину первісних даної функції. Нехай функція F є первісною функції f на множині E . Тоді для довільної сталої C функція $F + C$ є первісною функції f , оскільки $(F(z) + C)' = f(z) \forall z \in E$. Природно виникає питання про те, чи існують первісні для функції f на множині E , відмінні від функцій вигляду $\Phi = F + C$.

Відповідь на це питання виявиться негативною, якщо вважати множину E *лінійно зв'язною*, тобто такою, яка разом з довільними двома своїми точками z_1 та z_2 містить і деяку ламану, що їх сполучає.

Отже, правильна така теорема.

Теорема 1 (про множини первісних функцій). Нехай функція F є первісною функцією f на лінійно зв'язній множині E , зокрема на проміжку $\langle a; b \rangle$. Тоді множина всіх первісних функцій f на E описується формулою $\Phi = F + C$, де $C = \text{const}$ – довільна стала.

1.1.3. Поняття NL -інтегрованої функції та NL -інтеграла. Якщо функція f має первісну на лінійно зв'язній множині E , то f називають інтегрованою за Ньютоном – Лейбніцом або NL -інтегрованою на E і записують $f \in NL(E)$. При цьому якщо F – первісна функції f на E , то для фіксованих точок $a \in E$ і $b \in E$ число $\int_a^b f(u) du := F(b) - F(a)$ називають інтегралом Ньютона – Лейбніца або NL -інтегралом функції f уздовж довільної ламаної L , що сполучає точки a та b . Ці точки називають відповідно нижньою та верхньою межею інтегрування; функцію f називають підінтегральною функцією а вираз $\int_a^b f(u) du$ – підінтегральним виразом. Зокрема, якщо $[a; b] \subset E$, то $\int_a^b f(u) du$ – це NL -інтеграл функції f на орієнтованому відрізку $[a; b]$.

Приклад 3. Функція $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, є NL -інтегрованою на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$, але не є NL -інтегрованою на множині $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, оскільки ця множина не є лінійно зв'язною. При цьому $\int_1^x \frac{1}{u} du = \ln x \quad \forall x > 0$ і $\int_{-1}^x \frac{1}{u} du = \ln(-x) \quad \forall x < 0$.

Для комплекснозначної функції дійсної змінної з відомої теореми про зв'язок між диференційовністю цієї функції і диференційовністю її дійсної та уявної частин одразу впливає наступна важлива теорема.

Теорема 2 (про NL -інтегровність комплекснозначної функції дійсної змінної). Нехай $f(x) = u(x) + iv(x)$ – комплекснозначна функція дійсної змінної $x \in \langle a; b \rangle$. Тоді для того щоб $f(x)$ була NL -інтегрованою на проміжку $\langle a; b \rangle$ і мала первісну $F(x) = U(x) + iV(x)$, необхідно і достатньо, щоб функції $u(x)$ та $v(x)$ були NL -інтегровними на $\langle a; b \rangle$ і щоб $U(x)$ та $V(x)$ були їх первісними. При цьому $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} u(x) dx + i \int_{\alpha}^{\beta} v(x) dx$ $\forall \alpha, \beta \in \langle a; b \rangle$.

1.1.4. Формула Ньютона – Лейбніца. Зауважимо, що NL -інтеграл функції f за теоремою 1 не залежить від її первісної, що фігурує в означенні цього інтеграла. Це впливає з рівності

$$\Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a),$$

де F і Φ – довільні первісні функції f на E .

Отже, має місце наступна теорема.

Теорема 3 (про формулу Ньютона – Лейбніца). Якщо функція $f \in NL$ -інтегрованою на множині E , то для будь-якої первісної Φ функції f на E є правильною **формула Ньютона – Лейбніца**:

$$\int_a^b f(u) du = \Phi(b) - \Phi(a) =: \Phi(z) \Big|_a^b \quad \forall a, b \in E. \quad (1)$$

Якщо у формулі (1) вважати точку a фіксованою, а точку $b = z \in E$ біжучою, то дістанемо NL -інтеграл з верхньою змінною межею інтегрування:

$$\int_a^z f(u) du =: \Phi(z) - \Phi(a) \Rightarrow \Phi(z) = \int_a^z f(u) du + \Phi(a).$$

1.1.5. Найпростіші властивості NL -інтеграла. У цьому пункті вважатимемо, що функція $f(z) \in NL$ -інтегрованою на лінійно зв'язній множині E і що точки $a, b \in E$. Безпосередньо з формули Ньютона – Лейбніца та означення NL -інтеграла випливають його найпростіші властивості.

Властивість 1 (правило перестановки меж інтегрування).

$$\int_a^b f(u) du = - \int_b^a f(u) du.$$

Властивість 2 (про інтеграл з однаковими межами).

$$\int_a^a f(u) du = 0.$$

Властивість 3 (адитивність NL -інтеграла).

$$\int_a^b f(u) du = \int_a^c f(u) du + \int_c^b f(u) du \quad \forall a, b, c \in E.$$

Властивість 4 (про похідну і диференціал NL -інтеграла).

$$\left(\int_a^z f(u) du \right)' = f(z), \quad \left(\int_z^a f(u) du \right)' = -f(z),$$

$$d \left(\int_a^z f(u) du \right) = f(z) dz \quad \text{і} \quad d \left(\int_z^a f(u) du \right) = -f(z) dz.$$

Таким чином, роль первісної функції f на множині E може відігравати інтеграл з верхньою змінною межею інтегрування, тобто $F(z) = \int_a^z f(u) du$, де a – фіксована, а z – біжуча точка множини E .

Наслідок 1 (про невід'ємність NL -інтеграла). Якщо $a < b$ і $f(x) \geq 0$

$$(f(x) > 0) \forall x \in [a; b], \text{ то } \int_a^b f(x) dx \geq 0 \left(\int_a^b f(x) dx > 0 \right).$$

Властивість 5 (про NL -інтеграл від похідної та диференціала).

$$\int_a^z f'(u) du = f(z) - f(a) \quad \text{і} \quad \int_a^z df(u) = f(z) - f(a).$$

Властивість 6 (про оцінку модуля NL -інтеграла).

$$\left| \int_a^b f(u) du \right| \leq |f(z^*)| \cdot l,$$

де l – довжина ламаної $L \subset E$, що сполучає точки a та b , a, z^* – певна точка цієї ламаної L .

1.1.6. Поняття невизначеного інтеграла. Таблиця основних інтегралів. Множину всіх первісних функцій f на лінійно зв'язній множині E називають *невизначеним інтегралом функції f на E* і позначають $\int f(z) dz$ або $\int f dz$. Отже,

$$\int f(z) dz = \{ \Phi: \Phi - \text{первісна } f \text{ на лінійно зв'язній множині } E \}.$$

З теореми 1 зокрема випливає, що

$$\int f(z) dz = \left\{ \int_a^z f(u) du + C: C - \text{довільна стала} \right\}.$$

Тому часто записують $\int f(z) dz = \int_a^z f(u) du + C$ або $\int f(z) dz = F(z) + C$, де C – довільна стала, а F – фіксована первісна функції f на E .

З формул для відшукування похідних основних елементарних функцій легко дістати формули для відшукування відповідних невизначених інтегралів. Ці формули наведено у наступній таблиці.

- 1) $\int 0 dz = C$ і $\int 1 dz = z + C, z \in \mathbb{C}$;
- 2) $\int \exp z dz = \exp z + C, z \in \mathbb{C}$;
- 3) $\int a^z dz = \frac{a^z}{\ln a} + C, a \neq 0, a \neq 1, z \in \mathbb{C}$;
- 4) $\int \frac{dz}{z} = \ln z + C, z \neq x \leq 0$ або
 $\int \frac{dz}{z} = \ln(-z) + C, z \neq x \geq 0$;
- 5) $\int z^\alpha dz = \frac{z^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$, причому
 $z \in \mathbb{C}$, коли $\alpha \in \mathbb{N}_0$,

$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, коли $\alpha \in \{-2, -3, \dots\}$,
 $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty; 0)$, коли $\alpha \notin \mathbb{Z}$ і $\operatorname{Re} \alpha > 0$,
 $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty; 0]$, коли $\alpha \notin \mathbb{Z}$ і $\operatorname{Re} \alpha \leq 0$;

$$6) \int \cos z \, dz = \sin z + C, \quad z \in \mathbb{C};$$

$$7) \int \sin z \, dz = -\cos z + C, \quad z \in \mathbb{C};$$

$$8) \int \frac{dz}{\cos^2 z} = \operatorname{tg} z + C, \quad z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$9) \int \frac{dz}{\sin^2 z} = -\operatorname{ctg} z + C, \quad z \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$10) \int \frac{dz}{a^2 + z^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{z}{a} + C, \quad a > 0,$$

$z \neq iy$, де $y \geq a$ або $y \leq -a$, зокрема

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arctg} x + C^*, \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

$$11) \int \frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{z}{a} + C = -\operatorname{arccos} \frac{z}{a} + C^*,$$

$z \neq x$, де $x \geq a$ або $x \leq -a$, зокрема

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C^*, \quad x \in (-1; 1);$$

$$12) \int \frac{dz}{z^2 - a^2} = \begin{cases} \frac{1}{2a} (\ln(z-a) - \ln(z+a)) + C, & a > 0, \\ \text{коли } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty; a], \\ \frac{1}{2a} (\ln(a-z) - \ln(a+z)) + C, & a > 0, \\ \text{коли } z \in \mathbb{C} \setminus ((-\infty; -a] \cup [a; +\infty)), \\ \frac{1}{2a} (\ln(a-z) - \ln(-a-z)) + C, & a > 0, \\ \text{коли } z \in \mathbb{C} \setminus [-a; +\infty), \end{cases}$$

зокрема

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a > 0,$$

на кожному з проміжків $(-\infty; -a)$, $(-a; a)$, $(a; +\infty)$;

$$13) \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - a^2}} = \begin{cases} \ln(z + \sqrt{z^2 - a^2}) + C, & a > 0, \\ \text{коли } \operatorname{Re} z > 0 \text{ і } z \notin (-\infty; a], \\ \ln(-z - \sqrt{z^2 - a^2}) + C, & a > 0, \\ \text{коли } \operatorname{Re} z < 0 \text{ і } z \notin [-a; +\infty), \end{cases}$$

зокрема

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C, \quad a > 0,$$

на кожному з проміжків $(-\infty; -a)$ і $(a; +\infty)$;

$$14) \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \ln(z + \sqrt{z^2 + a^2}) + C, \quad a > 0,$$

$z \neq iy$, де $|y| \geq a$, зокрема

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C, \quad a > 0,$$

$x \in (-\infty; +\infty)$.

1.1.7. Лінійність NL -інтеграла та метод розкладу обчислення невизначеного інтеграла. З означення невизначеного інтеграла випливає, що для його обчислення досить знайти інтеграл Ньютона – Лейбніца $\int_a^z f(u) du$. Тому розглянемо основні властивості інтеграла Ньютона – Лейбніца, з яких одночасно випливають і основні методи відшукування невизначених інтегралів. Надалі вважатимемо, що E – лінійно зв'язна множина.

Теорема 4 (про лінійність NL -інтеграла). *Нехай функції f та $\varphi \in NL$ -інтегровними на множині E . Тоді для будь-яких сталих α і β функція $\psi = \alpha f + \beta \varphi \in NL$ -інтегровою на E і*

$$\int_a^z (\alpha f(u) + \beta \varphi(u)) du = \alpha \int_a^z f(u) du + \beta \int_a^z \varphi(u) du \quad \forall \alpha, \beta, z \in E.$$

На властивості лінійності NL -інтеграла ґрунтується *метод розкладу обчислення невизначеного інтеграла*:

$$\int (\alpha f + \beta \varphi) dz = \alpha \int f dz + \beta \int \varphi dz,$$

де α і β – довільні сталі, такі що $|\alpha| + |\beta| > 0$. Останню рівність розуміють як рівність двох множин. При цьому

$$\alpha \int f dz = \alpha \{F: F \text{ – первісна } f\} := \{\alpha F: F \text{ – первісна } f\},$$

а

$$\alpha \int f dz + \beta \int \varphi dz = \{\alpha F + \beta \Phi: F \text{ – первісна } f, \Phi \text{ – первісна } \varphi\}.$$

Приклад 4.
$$\int_a^z (2u - \sqrt[3]{u} + 3 \cos u) du =$$

$$= 2 \int_a^z u du - \int_a^z u^{\frac{1}{3}} du + 3 \int_a^z \cos u du = (u^2 - \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} + 3 \sin u) \Big|_a^z =$$

$$= z^2 - \frac{3}{4}z\sqrt[3]{z} + 3 \sin z - (a^2 - \frac{3}{4}a\sqrt[3]{a} + 3 \sin a),$$

де $a \in E$, $z \in E$, а $E = \mathbb{C} \setminus (-\infty; 0)$. Зокрема, для дійсних чисел a та z і дійсної змінної u множина $E = (-\infty; +\infty)$. Тому на даній множині E

$$\int (2z - \sqrt[3]{z} + 3 \cos z) dz = z^2 - \frac{3}{4}z\sqrt[3]{z} + 3 \sin z + C,$$

де C – довільна стала.

1.1.8. Заміна змінної в NL -інтегралі та у невизначеному інтегралі.

Теорема 5 (про заміну змінної в NL -інтегралі). Нехай функція $f \in NL$ -інтегрованою на множині E_1 , а функція $\varphi \in$ диференційовною на лінійно зв'язній множині E і $\varphi(E) \subset E_1$. Тоді функція $(f \circ \varphi) \cdot \varphi' \in NL$ -інтегрованою на E і має місце **формула заміни змінної**:

$$\int_a^z f(\varphi(z))\varphi'(z) dz = \int_a^z f(\varphi(z)) d\varphi(z) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(z)} f(u) du \quad \forall a \in E \text{ і } z \in E.$$

На теоремі 5 ґрунтується *метод заміни змінної* для відшукування невизначеного інтеграла:

$$\int f(\varphi(z))\varphi'(z) dz = \int f(\varphi(z)) d\varphi(z) = \int f(u) du, \quad u = \varphi(z).$$

Приклад 5.
$$\int_1^z 2t \exp t^2 dt = \left. \begin{array}{l} u = t^2 \\ du = 2t dt \\ u(1) = 1 \\ u(z) = z^2 \end{array} \right| = \int_1^{z^2} \exp u du = \exp u \Big|_1^{z^2} =$$

$\exp z^2 - e \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Звідси випливає, що $\int 2z \exp z^2 dz = \exp z^2 + C$, де C – довільна стала.

1.1.9. Формули інтегрування частинами для NL -інтеграла та невизначеного інтеграла.

Теорема 6 (про формулу інтегрування частинами для NL -інтеграла). Нехай функції f та $\varphi \in$ диференційовними на множині E , а функція $f' \varphi \in NL$ -інтегрованою на E . Тоді функція $f \varphi' \in NL$ -інтегрованою на E і має місце **формула інтегрування частинами**:

$$\int_a^z f(t)\varphi'(t) dt = f(t)\varphi(t) \Big|_a^z - \int_a^z \varphi(t)f'(t) dt \quad \forall a \in E \text{ і } z \in E.$$

З теоремі 6 випливає *метод інтегрування частинами* обчислення невизначеного інтеграла:

$$\int f(z)\varphi'(z) dz = f(z)\varphi(z) - \int \varphi(z)f'(z) dz,$$

або

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

де $u = f(z)$, $v = \varphi(z)$, $du = f'(z) dz$, $dv = \varphi'(z) dz$.

Приклад 6.

$$\begin{aligned}
 & \int_a^z (1-t) \exp(-t) dt = \\
 & = \left| \begin{array}{ll} u = 1-t & du = -dt \\ dv = \exp(-t) dt & v = -\exp(-t) \end{array} \right| = \\
 & = -(1-t) \exp(-t) \Big|_a^z - \int_a^z \exp(-t) dt = \\
 & = (1-a) \exp(-a) + (z-1) \exp(-z) + \exp(-t) \Big|_a^z = \\
 & = (1-a) \exp(-a) + (z-1) \exp(-z) + \exp(-z) - \exp(-a) = \\
 & = z \exp(-z) - a \exp(-a) \quad \forall a, z \in \mathbb{C}.
 \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\int (1-z) \exp(-z) dz = z \exp(-z) + C,$$

де C – довільна стала.

1.1.10. Використання комп'ютерних засобів математики. Серед різноманітних комп'ютерних засобів математики, які можна використовувати для обчислення інтегралів, розглянемо *Gran1* і *Maxima*.

Програмний засіб *Gran1* призначений для графічного аналізу елементарних функцій дійсної змінної, наближеного розв'язування рівнянь графічним способом, чисельного інтегрування та диференціювання з геометричною інтерпретацією та виконання деяких інших операцій. Цей засіб успішно використовується багатьма вчителями на уроках математики.

Програма *Maxima* є потужним сучасним засобом комп'ютерної математики, за допомогою якого можна знаходити розв'язки різноманітних задач з багатьох галузей математики і чисельно, і в символьному поданні. Вона проста у використанні, відзначається зручним введенням команд і зрозумілою формою подання результатів. Нею можуть користуватися як професійні математики, так і студенти. За допомогою програми *Maxima* зокрема з легкістю можна: виконувати операції з раціональними числами у вигляді точних звичайних (а не наближених десяткових) дробів; одержувати точні результати обчислень, які містять ірраціональні числа e , π , $\ln 2$, $\sqrt{3}$, $\cos 1$, $\arcsin \frac{1}{3}$ тощо, а потім за потреби наближено переобчислювати ці результати у вигляді десяткових дробів; проводити спрощування раціональних, показникових, логарифмічних і тригонометричних виразів; виконувати операції математичного аналізу (обчислення границь, диференціювання, відшукування первісних і визначених інтегралів); працювати з комплексними числами та функціями комплексної змінної і багато іншого.

За можливостями використання і характеристиками Maxima близька до найбільш потужних професійних систем комп'ютерної математики Mathematica і Maple, які є дорогими комерційними продуктами, тоді як Maxima розповсюджується через Інтернет безкоштовно.

1.1.10.1. Використання Gran1. За допомогою програми Gran1 можна обчислювати NL -інтеграли елементарних функцій дійсної змінної на заданих відрізках у чисельному поданні. Про це йтиметься у підпункті 1.2.5.1.

1.1.10.2. Використання Maxima. За допомогою програми Maxima можна обчислювати NL -інтеграли і первісні у символьному поданні.

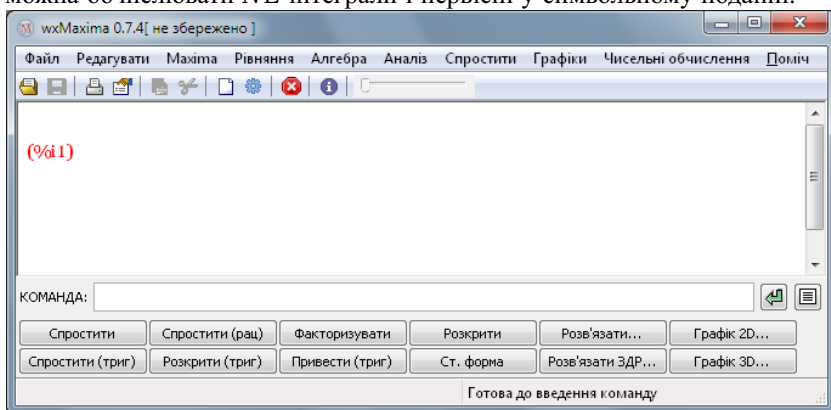


Рис. 1.1.1.

Для цієї програми розроблено графічну оболонку wxMaxima 0.7.4, оснашену зручним українським інтерфейсом (рис. 1.1.1).

Вікно програми wxMaxima містить рядок меню, кнопки редагування, вікно виведення результатів, рядок введення команд і внизу додаткові кнопки для роботи з виразами.

У вікні виведення результатів кожен вираз, який вводиться, позначається (%iN), а відповідний йому результат позначається (%oN) (від англ. *input* – вхідні дані, *output* – результат), де N – номер формули. Окремо взятий символ % набуває значення останнього виведеного виразу. Команди вводяться у рядку введення і починають автоматично опрацьовуватися після натиснення клавіші .

У Maxima для обчислення інтегралів $\int f(x) dx$ та $\int_a^b f(x) dx$ служать відповідно команди `integrate(f(x), x)` та `integrate(f(x), x, a, b)`.

Обчислимо невизначений інтеграл $\int (2z - \sqrt[3]{z} + 3 \cos z) dz$.

Для цього у командному рядку вводимо

$\text{integrate}(2*z-z^{1/3}+3*\cos(z),z)$
 і, натиснувши **Enter**, дістаємо (рис. 1.1.2)

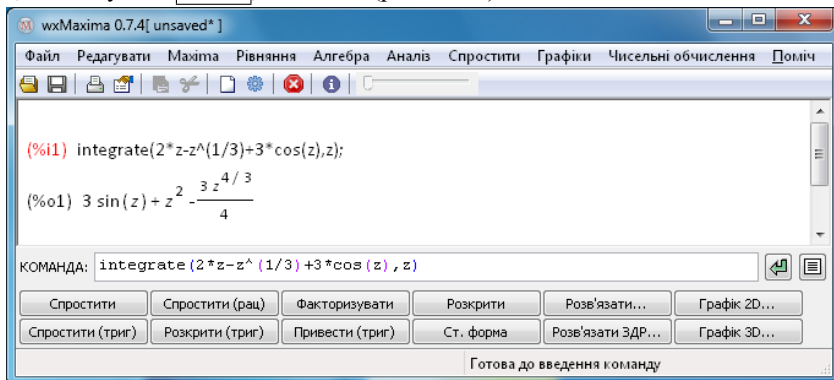


Рис. 1.1.2.

В результаті видається завжди тільки одна первісна. При цьому довільну сталу завжди можна дописати при потребі.

Спробуємо знайти інтеграл з параметром $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$.

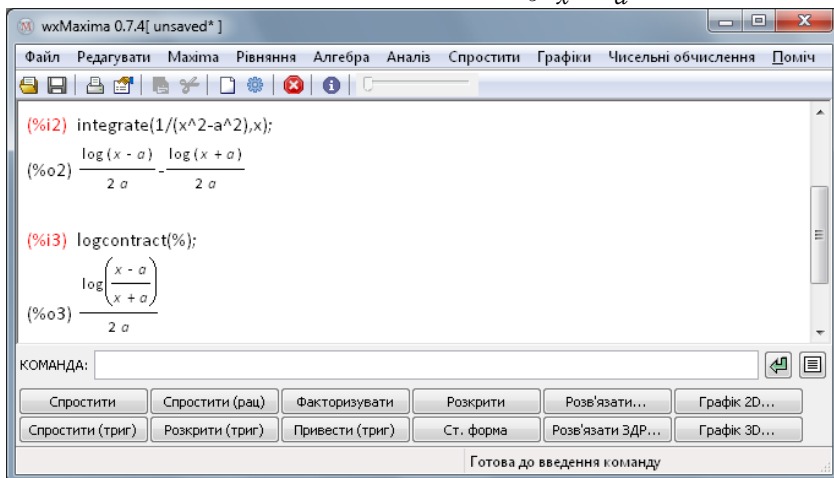


Рис. 1.1.3.

Спочатку шуканий інтеграл з'явився в рядку (%o2) у вигляді різниці двох логарифмів (рис. 1.1.3). Але за допомогою програми Maxima можна спростувати математичні вирази різними способами. Щоб відповідь стала компактнішою, у рядку (%o3) задано команду `logcontract(%)`. Її можна ввести з клавіатури або через меню **Спростити**

> Об'єднати логарифми. Зауважимо, що через $\log(x)$ тут позначається натуральний логарифм.

Надалі при демонструванні роботи даної програми будемо наводити лише вміст вікна виведення результатів. При цьому команди можна задавати і з командного рядка, і через меню (можна вибирати, що зручніше).

При обчисленні інтегралів з параметрами за допомогою Maxima іноді з'являються уточнюючі запитання. Так, якщо спробувати обчислити $\int x^a dx$ і ввести

```
(%i4) integrate(x^a,x);
```

то з'явиться запит:

```
Is a+1 zero or nonzero?
```

Давши відповідь n, дістанемо

```
(%o4)  $\frac{x^{a+1}}{a+1}$ 
```

Якщо дати відповідь z, то дістанемо

```
(%o4) log(x)
```

Обчислимо тепер кілька *NL*-інтегралів.

$$\int_{-\pi}^{2\pi} (\sin x + \cos x) dx = ?$$

```
(%i5) integrate(sin(x)+cos(x),x,-%pi,2*%pi);
```

```
(%o5) -2
```

$$\int_0^1 (\sin(ax) + \cos(bx)) dx = ?$$

```
(%i6) integrate(sin(a*x)+cos(b*x),x,0,1);
```

```
(%o6)  $\frac{a \sin(b) + (1 - \cos(a)) b}{a b}$ 
```

$$\int_{a-1}^{a+1} \frac{1-x}{1+x} dx = ?$$

Спочатку позначимо підінтегральну функцію через f :

```
(%i7) f:(1-x)/(1+x)$
```

(при вказування знака \$ після команди відключається виведення результату на екран).

Тепер проінтегруємо

```
(%i8) integrate(f,x,a-1,a+1);
```

```
Is a+2 positive, negative, or zero? p;
```

```
Is a positive, negative, or zero? p;
```

```
(%o8) 2 log(a+2) - 2 log(a) - 2
```

В ході обчислень у відповідь на запити програми було зроблено припущення $a+2 > 0$ та $a > 0$. Якщо треба обчислити цей самий інтеграл

при $a = 1$, то залишиться тільки обчислити вираз (%o8) при конкретному значенні змінної:

(%i9) %, a=1;

(%o9) $2 \log(3) - 2$

Однак, не кожен інтеграл можна у символічному поданні обчислити за допомогою програми Maxima. По-перше, часто інтеграли взагалі не виражаються у скінченному вигляді (про це йтиметься у пункті 1.3.6). По-друге, навіть коли символічне подання інтеграла можна знайти, але його вираз занадто громіздкий (містить складні нагромадження дробів, радикалів тощо) то у таких випадках при зверненні до програми повертається необчислений інтеграл. Наприклад,

(%i10) integrate(1/(x^3+x+1),x);

(%o10) $\int \frac{1}{x^3+x+1} dx$

1.1.11. Завдання для виконання за допомогою комп'ютера.

1. Для кожного табличного інтеграла зобразити область визначення підінтегральної функції.
2. Для кожного табличного інтеграла зобразити графік підінтегральної функції та графік її первісної.
3. Обчислити табличні інтеграли за допомогою комп'ютера.
4. Знайти табличні первісні у вигляді NL -інтегралів із змінною верхньою межею інтегрування.

1.2. Існування NL -інтеграла неперервної функції

1.2.1. NL -інтегровність ламаної функції. Розглянемо спочатку випадок, що f є так званою *ламаною функцією* на $[a; b]$, тобто існують точки x_k , $k \in \overline{0, n}$, такі, що $x_0 = a < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b$ і $\forall k \in \overline{0, n-1}$

$$f(x) = f(x_k) \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} + f(x_{k+1}) \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \quad \forall x \in [x_k; x_{k+1}].$$

Взагалі кажучи, значення $f(x_k)$, $k \in \overline{0, n}$, є комплексними, тобто f – комплекснозначна (зокрема, дійснозначна) функція дійсної змінної $x \in [a; b]$. На відрізку $[x_k; x_{k+1}]$ графік дійсної ламаної функції збігається з відрізком, що сполучає точки $(x_k, f(x_k))$ і $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$, а на відрізку $[a; b]$ цей графік є ламаною L з вершинами в точках $(x_k, f(x_k))$ (рис. 1.2.1). Цим і пояснюється назва ламаної функції.

Правильна наступна теорема.

Теорема 1 (про NL -інтегровність ламаної функції). *Кожна ламана функція f на відрізку $[a; b]$ є NL -інтегровою на цьому відрізку.*

При цьому інтеграл $\int_a^c f(u) du = S(c) \forall c \in [a; b]$ є площею фігури $\Phi = \{(x, y): a \leq x \leq c, 0 \leq y \leq f(x)\}$, коли $f(x) \geq 0 \forall x \in [a; b]$.

Отже, в теоремі 1 не тільки стверджується NL -інтегровність ламаної функції, але й розкривається геометричний зміст її NL -інтеграла.

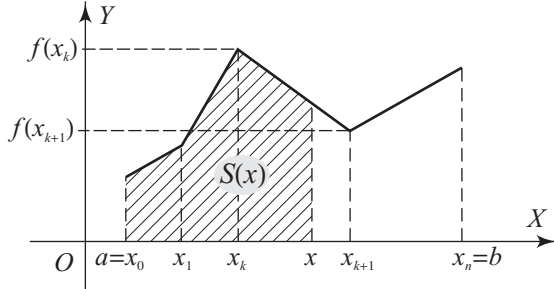


Рис. 1.2.1.

1.2.2. Зв'язок неперервних функцій з ламаними. Довільну комплекснозначну функцію f , неперервну на відрізку $[a; b]$, можна як завгодно добре наблизити за допомогою ламаних функцій. А саме, правильна наступна теорема.

Теорема 2 (про зв'язок неперервних функцій з ламаними). *Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, то існує послідовність ламаних функцій $(f_n(x))$ таких, що $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a; b]$ (тобто $f_n(x)$ рівномірно збігається до $f(x)$ на відрізку $[a; b]$).*

1.2.3. NL -інтегровність граничної функції.

Теорема 3 (про NL -інтегровність граничної функції). *Нехай функції $f_n \in NL$ -інтегровними на множині $E \forall n \in \mathbb{N}$ і $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$ на E . Тоді й функція $f \in NL$ -інтегровною на E , причому*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^z f_n(u) du = \int_a^z \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(u) du = \int_a^z f(u) du \forall a, z \in E.$$

1.2.4. NL -інтегровність неперервної функції. Площа криволінійної трапеції. З теорем 1, 2 і 3 випливає наступна теорема.

Теорема 4 (про NL -інтегровність неперервної функції). *Якщо функція $f \in NL$ -інтегровною на проміжку $\langle a; b \rangle$, то вона є NL -інтегровною на цьому проміжку.*

Число $S = \int_a^b f(x) dx$ виражає собою площу фігури

$$\Phi = \{(x, y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

яку називають *криволінійною трапецією* (рис. 1.2.2). У цьому полягає геометричний зміст NL -інтеграла.

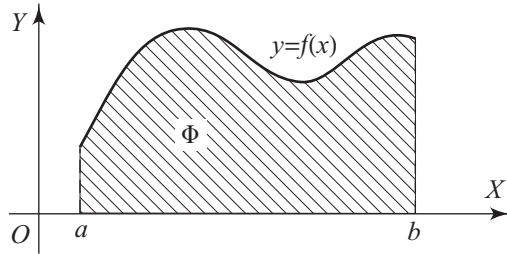


Рис. 1.2.2.

1.2.5. Використання комп'ютерних засобів математики. Оскільки у даному пункті розглядається питання про існування первісної неперервної функції та геометричний зміст інтеграла, то комп'ютер можна використати у першу чергу для графічних ілюстрацій. Це може бути побудова криволінійних трапецій, графіків потрібних функцій та їх первісних.

1.2.5.1. Використання Gran1. За допомогою програми Gran1 можна обчислювати тільки NL -інтеграли від елементарних функцій дійсної змінної, і тільки чисельно. Зрозуміло, що таке обчислення є наближеним. Точність обчислень встановлюється в меню

Виправлення > **Налагодження параметрів програми. . .**

від 0 до 6 десяткових знаків після коми. При цьому є можливість також переглянути на екрані фігуру, площу якої виражає даний інтеграл.

Так, для обчислення інтеграла $\int_{-1}^2 3x^2 dx$ потрібно виконати такі дії.

1) Зайти в меню **Об'єкт** > **Створити. . .**. З'явиться вікно, зображене на рис. 1.2.3.

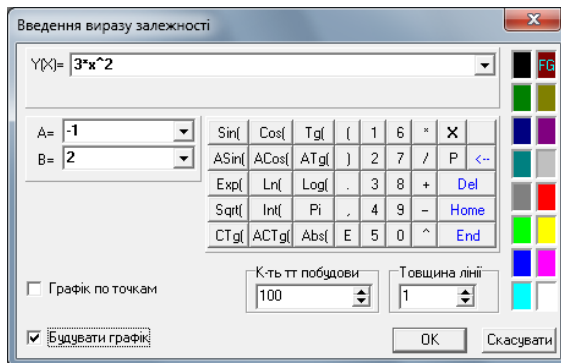


Рис. 1.2.3.

2) Ввести підінтегральну функцію $y(x) = 3x^2$, задати межі $A = -1$, $B = 2$ і натиснути **Ok**.

2.1) Щоб побачити фігуру, площу якої виражає шуканий інтеграл, потрібно спочатку побудувати графік даної функції. Це робиться через меню **Графік** > **Побудувати**. Якщо геометричний зміст інтеграла не потрібен, пункт 2.1) можна опустити.

3) Через меню **Операції** > **Інтеграли** > **Інтеграл...** викликати вікно, зображене на рис. 1.2.4.

4) Натиснувши **Обчислити**, в цьому ж вікні одержимо результат, який показує, що шуканий інтеграл $I = 9$. Одночасно з цим (якщо графік функції було побудовано) на екрані з'явиться заштрихована фігура, площа якої дорівнює обчисленому інтегралу (рис. 1.2.5).

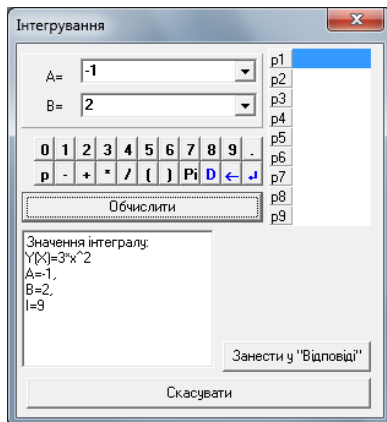


Рис. 1.2.4.

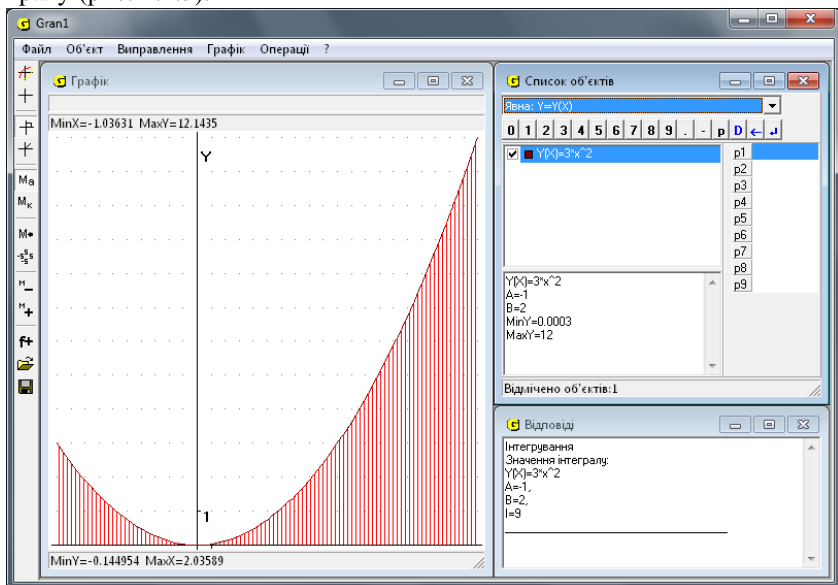


Рис. 1.2.5.

4.1) При натисненні кнопки **Занести у "Відповіді"** результат інтегрування запишеться ще й до окремого вікна відповідей. Далі можна продовжити обчислення інтеграла від цієї самої функції, але на інших

відрізках.

5) Для закінчення інтегрування слід закрити вікно “Інтегрування”.

Щоб звернути увагу на деякі нюанси, обчислимо за допомогою програми Gran1 ще один інтеграл, а саме

$$I = \int_{\sqrt{\pi/4}}^{\sqrt{3\pi/2}} \sin(x^2) dx.$$

Задаємо функцію: $Y(X)=\sin(X^2)$ та відрізок: $A=\text{SQRT}(\pi/4)$, $B=\text{SQRT}(3*\pi/2)$, а потім будуємо графік і обчислюємо інтеграл, як описано вище. При цьому на екрані комп’ютера видається результат інтегрування: $I = 0,4264$ та зображується його геометричний зміст (рис. 1.2.6).

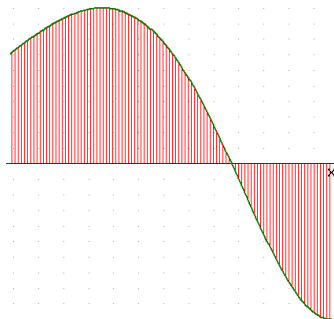


Рис. 1.2.6.

Зауваження. 1. Потрібно розуміти, що отримано наближене значення інтеграла з точністю до 10^{-4} .

2. Геометричний зміст інтеграла полягає у тому, що він дорівнює різниці між площею частини фігури, яка лежить вище осі OX , і площею частини під віссю OX .

3. Відомо, що функція $f(x) = \sin(x^2)$ має первісну $F(x)$, але в скінченному вигляді її подати неможливо (див. пункт 1.3.7), а тому обчислити інтеграл за формулою Ньютона – Лейбніца також не можливо. У програмі Gran1 інтеграл обчислюється одним з так званих чисельних методів інтегрування.

1.2.5.2. Використання Maxima. За допомогою програми Maxima також легко побудувати графік елементарної функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$. Найпростішою командою для цього є `plot2d(f(x),[x,a,b])`.

У цій команді може бути кілька параметрів, що дозволяє будувати кілька графіків на одному рисунку, вказувати тип задання функції (явне, параметричне чи дискретне), задавати масштаб, визначати тип ліній, наносити написи на малюнок тощо. Крім того є можливість обирати графічну оболонку для побудови графіка: `wxMaxima` (вбудований формат), `orenmath` та `gnuplot`. Це досить просто зробити через меню Графіки або натиснувши кнопку Графік 2D. . . (рис. 1.2.7).

Наприклад, для побудови графіка функції $x \sin x$ на відрізку $[-\pi; \pi]$ досить набрати з клавіатури

```
(%i1) plot2d(x*sin(x),[x,-%pi;%pi])
```

і у вікні **gnuplot** з’явиться графік, зображений на рис. 1.2.8.

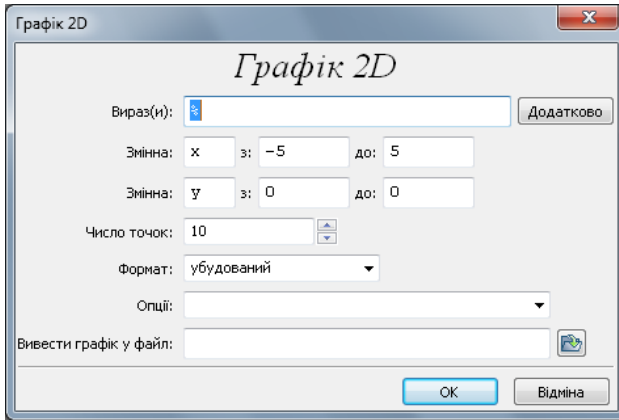


Рис. 1.2.7.

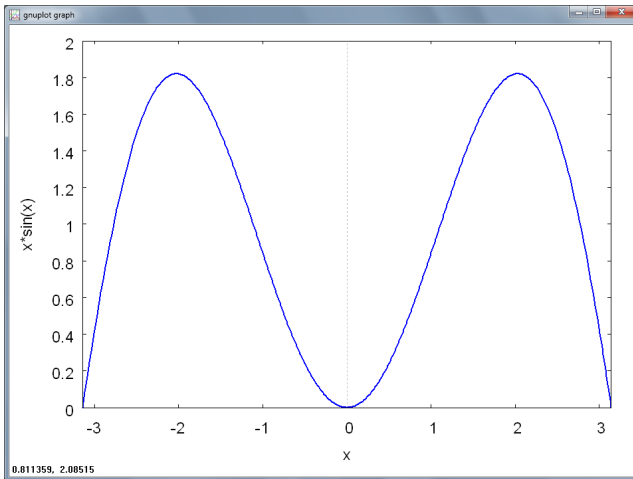


Рис. 1.2.8.

Масштабування за змінною y при цьому здійснюється автоматично. У разі необхідності можна явно вказати діапазон значень змінної y . При виконанні графіків за допомогою шаблону `Графік 2D...` потрібно обов'язково задати вираз і відрізки зміни x та y . Також тут є можливість задати деякі (проте далеко не всі) опції команди `plot2d`.

Наступний рисунок 1.2.9 виконано за допомогою графічної оболонки wxMaxima після введення команд

```
(%i2) [F:x^2*sin(1/x), f:diff(F,x)]$
```

```
(%i3) wxplot2d([F,f],[x,1/20,1])
```

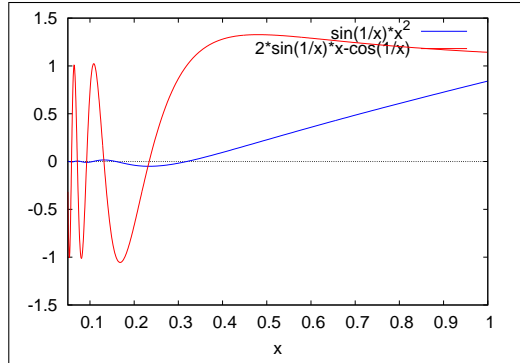


Рис. 1.2.9.

Пояснимо: 1) у рядку (%i2) визначено одразу дві функції F та її похідну $f = F'$, подавши їх списком; 2) у рядку (%i3) префікс wx вжито, щоб застосувати вбудований редактор wxMaxima; 3) якщо потрібно побудувати на одному малюнку графіки двох функцій, то ці функції подають списком: [F,f].

Оскільки в системі Maxima є потужні інструменти для обчислення границь функцій, то цю програму також можна ефективно використати для дослідження функцій на неперервність (а відтак на інтегровність).

Наприклад, розв'яжемо за допомогою Maxima таку задачу.

Задача 1. Встановити, при яких M і N функцію

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{Mx} - \cos(Nx)}{x}, & x < 0, \\ \frac{(1+x)^M - e^{Nx}}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

можна до визначити у точці $x = 0$, щоб вона стала неперервною.

Розв'язання виглядає так.

(%i1) u:(exp(M*x)-cos(N*x))/x\$

(%i2) v:((1+x)^M-exp(N*x))/x\$

(%i3) limit(u,x,0);

(%o3) M

(%i4) limit(v,x,0);

(%o4) M - N

Звідси видно, що повинна виконуватися рівність $M = M - N$, тобто розв'язком задачі є пари чисел $M \in \mathbb{R}$, $N = 0$.

1.2.6. Завдання для виконання за допомогою комп'ютера.

1. Зобразити графіки даної неперервної функції f і послідовності ламаних функцій (f_n) , що рівномірно збігається до f на заданому

відрізку $[a; b]$. Порівняти NL -інтеграли цих функцій.

2. Зобразити графіки функцій

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{коли } -1 \leq x \leq -\frac{1}{n}, \\ nx, & \text{коли } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 1, & \text{коли } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

і впевнитися, що $f_n(x) \rightarrow \operatorname{sign} x$, коли $n \rightarrow \infty$, $\forall x \in [-1; 1]$.

3. Для функцій $f_n(x)$ із завдання 2 зобразити графіки частинних сум $S_n(x)$ функціонального ряду $\sum_{k=0}^{\infty} (f_{k+1}(x) - f_k(x))$ та його суми $f(x)$.

Чи є NL -інтегровними функції $S_n(x)$ та $f(x)$ на відрізку $[-1; 1]$?

1.3. Обчислення невизначених інтегралів функцій деяких класів

1.3.1. Інтегрування многочленів. Якщо $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, то за властивістю лінійності інтеграла маємо:

$$\int f(z) dz = \sum_{k=0}^n a_k \int z^k dz = \sum_{k=0}^n a_k \frac{z^{k+1}}{k+1} + C, \quad z \in \mathbb{C},$$

тобто будь-яка первісна довільного многочлена також є многочленом, а тому і елементарною функцією.

1.3.2. Інтегрування елементарних дробів. Нехай f є дійсною дробово-раціональною функцією, тобто $f(x) = P(x)/Q(x)$, де P і Q – дійсні многочлени, $Q \neq \text{const}$ і дріб P/Q є нескоротним.

Функцію f називають *елементарним дробом*, якщо вона має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^n} \quad \text{або} \quad f(x) = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n},$$

де $n \in \mathbb{N}$, а числа a, p, q, A і B є дійсними, причому $p^2 - 4q < 0$. Виявляється, що кожен дробово-раціональний функцію можна подати у вигляді суми деякого многочлена та скінченної кількості деяких елементарних дробів.

Отже, для знаходження інтеграла від дробово-раціональної функції треба вміти знаходити інтеграли від елементарних дробів.

Нехай $f(x) = \frac{1}{(x-a)^n}$, де $n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^n} = \begin{cases} \ln|x-a| + C, & \text{коли } n = 1, \\ \frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} + C, & \text{коли } n > 1. \end{cases}$$

Розглянемо функцію

$$f(x) = \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n} = \frac{A(x + \frac{p}{2}) + B - A \cdot \frac{p}{2}}{((x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4}))^n} = \frac{Ay + B_1}{(y^2 + l^2)^n},$$

де $y = x + \frac{p}{2}$, $l^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$ і $B_1 = B - A \cdot \frac{p}{2}$.

Звідси випливає, що за методом заміни змінної обчислення невизначеного інтеграла від функції $f(x) = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ зводиться до обчислення невизначеного інтеграла від функції $\varphi(y) = \frac{Ay+B_1}{(y^2+l^2)^n}$.

Оскільки

$$\int \frac{Ay + B_1}{(y^2 + l^2)^n} dy = A \int \frac{y dy}{(y^2 + l^2)^n} + B_1 \int \frac{dy}{(y^2 + l^2)^n}$$

і

$$\int \frac{y dy}{(y^2 + l^2)^n} = \frac{1}{2} \int \frac{d(y^2 + l^2)}{(y^2 + l^2)^n} = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln(y^2 + l^2) + C, & \text{коли } n = 1, \\ \frac{(y^2 + l^2)^{1-n}}{2(1-n)} + C, & \text{коли } n > 1, \end{cases}$$

то залишилося навчитися обчислювати інтеграл

$$I_n = \int \frac{dy}{(y^2 + l^2)^n},$$

де $l > 0$, а $n \in \mathbb{N}$.

Якщо $n = 1$, то

$$I_1 = \int \frac{dy}{y^2 + l^2} = \frac{1}{l} \operatorname{arctg} \frac{y}{l} + C.$$

Нехай $n > 1$. Тоді, використовуючи метод інтегрування частинами, матимемо

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dy}{(y^2 + l^2)^n} = \left| \begin{array}{l} u = \frac{1}{(y^2 + l^2)^n} \quad du = \frac{-2ny dy}{(y^2 + l^2)^{n+1}} \\ dv = dy \quad v = y \end{array} \right| = \\ &= \frac{y}{(y^2 + l^2)^n} + \int \frac{2ny^2 dy}{(y^2 + l^2)^{n+1}} = \\ &= \frac{y}{(y^2 + l^2)^n} + 2n \int \frac{(y^2 + l^2 - l^2) dy}{(y^2 + l^2)^{n+1}} = \\ &= \frac{y}{(y^2 + l^2)^n} + 2nI_n - 2nl^2 I_{n+1} \Rightarrow \\ I_{n+1} &= \frac{2n - 1}{2nl^2} I_n + \frac{1}{2nl^2} \frac{y}{(y^2 + l^2)^n}. \end{aligned} \quad (1)$$

Дістали так звану *рекурентну формулу* для обчислення невизначеного інтеграла $I_n \forall n \in \mathbb{N}$. Зокрема, з рівності (1) для $n = 1$ дістаємо

$$I_2 = \frac{1}{2l^2} \frac{1}{l} \operatorname{arctg} \frac{y}{l} + \frac{1}{2l^2} \frac{y}{y^2 + l^2} + C.$$

Тепер, якщо в (1) покласти $n = 2$, можна дістати значення I_3 і так далі. Отже будь-яка первісна будь-якого елементарного дробу є елементарною функцією, яку можна визначити через раціональні функції, логарифми та арктангенси. Тому, враховуючи сказане вище, можемо стверджувати, що *будь-яка первісна будь-якої раціональної функції є елементарною функцією*.

Кажуть, що *функція f інтегрується у скінченному вигляді або в елементарних функціях*, коли будь-яка первісна функції f є елементарною функцією. Таким чином, будь-яка дійсна раціональна функція інтегрується в скінченному вигляді.

1.3.3. Алгоритм відшукування невизначеного інтеграла раціональної функції. Для обчислення невизначеного інтеграла від довільної дійсної дробово-раціональної функції можна скористатися наступним алгоритмом.

1. Якщо дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ неправильний, то шляхом ділення $P(x)$ на $Q(x)$ виділити з нього цілу частину, тобто записати цей дріб у вигляді

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

де $R(x)$ – деякий многочлен, а дріб $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ є правильним.

2. Розкласти многочлен $Q_1(x)$ на множники вигляду $(x - a_k)^{v_k}$, $k \in \overline{1, n}$, та $(x^2 + p_k x + q_k)^{\mu_k}$, $k \in \overline{1, m}$, де v_k і $\mu_k \in \mathbb{N}$, a_k , p_k і q_k є дійсними числами і $p_k^2 - 4q_k < 0$.
3. Кожному множнику $(x - a_k)^{v_k}$, $k \in \overline{1, n}$, поставити у відповідність суму $\sum_{i=1}^{v_k} \frac{A_i^{(k)}}{(x - a_k)^i}$, а кожному множнику $(x^2 + p_k x + q_k)^{\mu_k}$, $k \in \overline{1, m}$, – суму $\sum_{i=1}^{\mu_k} \frac{B_i^{(k)} x + C_i^{(k)}}{(x^2 + p_k x + q_k)^i}$, де $A_i^{(k)}$, $B_i^{(k)}$, $C_i^{(k)}$ – невизначені коефіцієнти.

4. Записати рівність
$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{v_k} \frac{A_i^{(k)}}{(x - a_k)^i} + \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{\mu_k} \frac{B_i^{(k)} x + C_i^{(k)}}{(x^2 + p_k x + q_k)^i}.$$

5. Звести праву частину до спільного знаменника і прирівняти її чисельник до $P_1(x)$, діставши рівність двох многочленів.
6. Використовуючи умови рівності двох многочленів (відповідні коефіцієнти рівні або многочлени в однакових точках набувають однакових значень), знайти невизначені коефіцієнти $A_i^{(k)}$, $B_i^{(k)}$, $C_i^{(k)}$.
7. Підставити знайдені коефіцієнти $A_i^{(k)}$, $B_i^{(k)}$, $C_i^{(k)}$ у рівність 4 та проінтегрувати рівність $f(x) = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$.

Застосуємо вказаний алгоритм до обчислення інтеграла

$$\int \frac{x^4 - x - 1}{x^4 + x^2} dx.$$

1. $f(x) = \frac{x^4 - x - 1}{x^4 + x^2}$ – неправильний дріб. Виділимо цілу частину:

$$f(x) = \frac{x^4 + x^2 - x^2 - x - 1}{x^4 + x^2} = 1 - \frac{x^2 + x + 1}{x^4 + x^2}.$$

Отже, $R(x) = 1$ – ціла частина $f(x)$, а

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = -\frac{x^2 + x + 1}{x^4 + x^2}$$

– дробова частина $f(x)$.

2. $Q_1(x) = x^2(x^2 + 1)$.

3. Множнику x^2 відповідає сума $\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2}$, а множнику $x^2 + 1$ – один доданок: $\frac{B_1x + C_1}{x^2 + 1}$, де A_1, A_2, B_1, C_1 – невизначені коефіцієнти.

4. Маємо:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + x + 1}{x^4 + x^2} &= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B_1x + C_1}{x^2 + 1} = \\ &= \frac{A_1x(x^2 + 1) + A_2(x^2 + 1) + B_1x^3 + C_1x^2}{x^4 + x^2}, \end{aligned}$$

а тому

$$x^2 + x + 1 = A_1x(x^2 + 1) + A_2(x^2 + 1) + B_1x^3 + C_1x^2.$$

5. Перший спосіб обчислення невизначених коефіцієнтів. Прирівняємо коефіцієнти при відповідних степенях x .

$$\left. \begin{array}{l} x^3: 0 = A_1 + B_1, \\ x^2: 1 = A_2 + C_1, \\ x: 1 = A_1, \\ 1 = x^0: 1 = A_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_1 = 1, \\ A_2 = 1, \\ B_1 = -A_1 = -1, \\ C_1 = 1 - A_2 = 0. \end{array} \right.$$

Другий спосіб обчислення невизначених коефіцієнтів. Надаємо x різних значень.

$$\left. \begin{array}{l} x = 0: 1 = A_2, \\ x = -1: 1 = -2A_1 + 2A_2 - B_1 + C_1, \\ x = 1: 3 = 2A_1 + 2A_2 + B_1 + C_1, \\ x = -2: 3 = -10A_1 + 5A_2 - 8B_1 + 4C_1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 = 1, \\ 2C_1 + 4A_2 = 4, \\ 2A_1 + B_1 + C_1 = 1, \\ -10A_1 - 8B_1 + 4C_1 = -2 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 = 1, \\ C_1 = 0, \\ 2A_1 + B_1 = 1, \\ 5A_1 + 4B_1 = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_2 = 1, \\ C_1 = 0, \\ 3A_1 = 3, \\ 2A_1 + B_1 = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_2 = 1, \\ C_1 = 0, \\ A_1 = 1, \\ B_1 = -1. \end{array} \right.$$

Отже, в даному випадку перший спосіб більш раціональний. Зауважимо, що другий спосіб обчислення коефіцієнтів є зручнішим від першого у випадку, коли знаменник дробу розкладається на лінійні множники, тобто має дійсні корені. Тоді x надають значень цих коренів.

6. Таким чином, $\frac{x^2+x+1}{x^4+x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{x}{x^2+1}$ і

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^4 - x - 1}{x^4 + x^2} = 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2 + 1} \Rightarrow \\ \int f(x) dx &= \int dx - \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{x dx}{x^2 + 1} = \\ &= x - \ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \\ &= x - \ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C, \quad x \in E, \end{aligned}$$

де $E = (0; +\infty)$ або $E = (-\infty; 0)$.

1.3.4. Інтегрування комплексних дробово-раціональних функцій.

Розглянемо довільну комплексну дробово-раціональну функцію $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, де змінна z і коефіцієнти многочленів P та Q є комплексними (зокрема, й дійсними) числами. Тоді інтегрування таких функцій навіть спрощується, у порівнянні з функціями дійсної змінної.

По-перше, *елементарними дробами* називають лише функції вигляду $\frac{1}{(z-a)^n}$, де $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$.

По-друге, *алгоритм відшукування невизначеного інтеграла від комплексної раціональної функції* спроститься, у порівнянні з наведеним у пункті 1.3.3, і набуде вигляду:

1. Якщо дріб $\frac{P(z)}{Q(z)}$ неправильний, то виділити цілу $R(z)$ та дробову $\frac{P_1(z)}{Q_1(z)}$ частини шляхом ділення P на Q :

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = R(z) + \frac{P_1(z)}{Q_1(z)}.$$

2. Розкласти многочлен $Q_1(z)$ на множники вигляду $(z - c_k)^{\nu_k}$, де $\nu_k \in \mathbb{N}$, $k \in \overline{1, n}$.

3. Кожному множнику $(z - c_k)^{\nu_k}$ поставити у відповідність суму

$$\sum_{l=1}^{\nu_k} \frac{A_l^{(k)}}{(z - c_k)^l}, \quad k \in \overline{1, n}.$$

4. Записати рівність $\frac{P_1(z)}{Q_1(z)} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{v_k} \frac{A_l^{(k)}}{(z-c_k)^l}$.
5. Звести праву частину останньої рівності до спільного знаменника і прирівняти чисельник одержаного дробу до $P_1(z)$.
6. Використовуючи умови рівності многочленів, обчислити невизначені коефіцієнти $A_l^{(k)}$.
7. Підставити знайдені коефіцієнти $A_l^{(k)}$ у рівність 4 та проінтегрувати рівність $f(z) = R(z) + \frac{P_1(z)}{Q_1(z)}$.

Обчислимо за допомогою наведеного алгоритму інтеграл

$$\int \frac{z^4 - z - 1}{z^4 + z^2} dz,$$

розглянутий у пункті 1.3.3 для дійсного $z = x$.

1. $f(z) = \frac{z^4 - z - 1}{z^4 + z^2} = 1 - \frac{z^2 + z + 1}{z^4 + z^2}$.
2. $Q_1(z) = z^2(z^2 + 1) = z^2(z + i)(z - i)$.
3. Множнику z^2 відповідає сума $\frac{A_1}{z^2} + \frac{A_2}{z}$, множнику $(z + i)$ – дріб $\frac{A_3}{z + i}$, а множнику $(z - i)$ – дріб $\frac{A_4}{z - i}$.

$$4. \frac{z^2 + z + 1}{z^4 + z^2} = \frac{A_1}{z^2} + \frac{A_2}{z} + \frac{A_3}{z + i} + \frac{A_4}{z - i}.$$

$$5. \frac{z^2 + z + 1}{z^4 + z^2} = \frac{A_1(z + i)(z - i) + A_2z(z + i)(z - i) + A_3z^2(z - i) + A_4z^2(z + i)}{z^4 + z^2}.$$

$$6. z^2 + z + 1 = A_1(z + i)(z - i) + A_2z(z + i)(z - i) + A_3z^2(z - i) + A_4z^2(z + i) \Rightarrow$$

$$z = 0: \quad 1 = A_1$$

$$z = i: \quad i = A_4 \cdot (-1) \cdot 2i \Leftrightarrow A_4 = -\frac{1}{2}$$

$$z = -i: \quad -i = A_3 \cdot (-1) \cdot (-2i) \Leftrightarrow A_3 = -\frac{1}{2}$$

$$z = 1: \quad 3 = A_1 \cdot 2 + A_2 \cdot 2 + A_3(1 - i) + A_4(1 + i)$$

$$\Leftrightarrow 3 = 2 + 2A_2 - \frac{1}{2}(1 - i + 1 + i) \Leftrightarrow$$

$$3 = 2 + 2A_2 - 1 \Leftrightarrow A_2 = 1.$$

$$7. \frac{z^4 - z - 1}{z^4 + z^2} = 1 - \frac{z^2 + z + 1}{z^4 + z^2} = 1 - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z + i} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z - i} \Rightarrow$$

$$\int \frac{z^4 - z - 1}{z^4 + z^2} dz = \int dz - \int \frac{dz}{z^2} - \int \frac{dz}{z} + \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z + i} + \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z - i} =$$

$$= z + \frac{1}{z} - \ln z + \frac{1}{2} \ln(z + i) + \frac{1}{2} \ln(z - i) + C,$$

$z \in \mathbb{C} \setminus (\{z = x: x \leq 0\} \cup \{z = x - i: x \leq 0\} \cup \{z = x + i: x \leq 0\}) = D$
(див. рис. 1.3.1). Зокрема, якщо $z = x > 0$, то

$$\ln(z + i) = \ln(x + i) = \ln|x + i| + i \arg(x + i) = \ln|x + i| + i \operatorname{arctg} \frac{1}{x},$$

$$\ln(z - i) = \ln(x - i) = \ln|x - i| + i \arg(x - i) = \ln|x - i| +$$

$$+i \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{x}\right) = \ln|x-i| - i \operatorname{arctg}\frac{1}{x}.$$

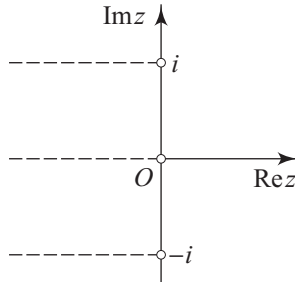


Рис. 1.3.1.

Тому $\frac{1}{2}(\ln(z+i) + \ln(z-i)) = \frac{1}{2}(\ln|x+i| + \ln|x-i|) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1)$ і

$$\int \frac{x^4-x-1}{x^4+x^2} dx = x + \frac{1}{x} - \ln x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C, \quad x > 0.$$

Аналогічно переконуємося, що

$$\int \frac{x^4-x-1}{x^4+x^2} dx = x + \frac{1}{x} - \ln(-x) + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C, \quad x < 0.$$

1.3.5. Інтегрування деяких ірраціональних алгебраїчних функцій. Нехай f – деяка ірраціональна (тобто така, що не є раціональною) функція дійсної або комплексної змінної x . Якщо для обчислення значень $f(x)$ цієї функції можна спочатку обчислити значення $u_k = u_k(x)$, $k \in \overline{1, n}$, а з них та з деяких сталих за допомогою скінченної кількості арифметичних операцій дістати значення $f(x)$, то кажуть, що f є раціональною функцією змінних u_k , $k \in \overline{1, n}$, і записують $f(x) = R(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Наприклад, $f(x) = \frac{x - \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{1 + x - 2\sqrt{x}}$ є ірраціональною функцією змінної x , але раціональною функцією змінних $u_1 = x$, $u_2 = \sqrt{x}$ і $u_3 = \sqrt[3]{x}$, тобто $f(x) = R(x, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x})$. Якщо врахувати, що $x = (\sqrt[6]{x})^6$, $\sqrt{x} = (\sqrt[6]{x})^3$, а $\sqrt[3]{x} = (\sqrt[6]{x})^2$, коли $x \geq 0$ (для комплексного x ця умова набуває вигляду $x \neq \operatorname{Re} x \leq 0$), то можна вважати f раціональною функцією однієї змінної $u = \sqrt[6]{x}$.

Зауважимо, що обчислення інтегралів від деяких ірраціональних функцій можна звести за допомогою певних підстановок до інтегрування раціональних функцій.

У таблиці 1 показано деякі класи таких ірраціональних функцій та методи їх інтегрування.

Зауважимо, що ірраціональні функції $y = f(x)$, $x \in \langle a; b \rangle$, наведені у таблиці 1, є водночас так званими алгебраїчними функціями, тобто

такими, що є розв'язками (відносно y) рівняння вигляду

$$a_0 + a_1 y + \dots + a_n y^n = 0,$$

де $n \in \mathbb{N}$ – фіксоване число, а коефіцієнти $a_k = a_k(x)$, $k \in \overline{0, n}$, є заданими многочленами.

Іраціональні функції, що не є алгебраїчними, називають *трансцендентними*.

Таблиця 1

Функція	Додаткові умови	Можливий метод інтегрування
$f(x) = R(u_1, u_2, \dots, u_r)$, $u_k = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}$, $k \in \overline{1, r}$	$ad - bc \neq 0$, $m_k \in \mathbb{Z}$, $n_k \in \mathbb{N} \forall k \in \overline{1, r}$	Підстановка: $\frac{ax+b}{cx+d} = t^p$, де $p = \text{НСК}(n_1, n_2, \dots, n_r)$
$f(x) = x^m (a + bx^n)^p$	$ab \neq 0$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$. f інтегрується у скінченному вигляді тоді й тільки тоді, коли виконується хоча б одна з умов: 1) $p \in \mathbb{Z}$, 2) $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, або 3) $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$	Підстановки Чебишова: 1) $x = t^k$, де k – спільний знаменник m і n ; 2) $a + bx^n = t^s$, де s – знаменник p ; 3) $a + bx^n = t^s x^n$, де s – знаменник p
$f(x) = R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$	$a \neq 0$, $b^2 - 4ac \neq 0$ та існує інтервал $(\alpha; \beta)$, для якого $ax^2 + bx + c > 0$, коли $x \in (\alpha; \beta)$	Підстановки Ейлера: 1) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{ax}$, коли $a > 0$; 2) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt - \sqrt{c}$, коли $a < 0$ і $c > 0$; 3) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_0)$, коли x_0 – один з дійсних коренів тричлена $ax^2 + bx + c$

За допомогою кожної з указаних у таблиці 1 підстановок обчислення інтеграла від заданої ірраціональної функції f зводиться до обчислення інтеграла від деякої раціональної функції.

Проілюструємо це для інтеграла $\int x^m (a + bx^n)^p dx$, який називають *інтегралом від диференціального бінома* або *від біноміального диференціала*. Розглянемо випадок 3).

Отже, нехай $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ і $a + bx^n = t^s x^n$, або $ax^{-n} + b = t^s$, де s – знаменник p , тобто $sp \in \mathbb{Z}$. Тоді $x = a^{\frac{1}{n}}(t^s - b)^{-\frac{1}{n}}$, $dx = -\frac{s}{n} a^{\frac{1}{n}}(t^s - b)^{-\frac{1}{n}-1} t^{s-1} dt$ і

$$\begin{aligned} \int x^m (a + bx^n)^p dx &= \int x^{m+np} (ax^{-n} + b)^p dx = \\ &= \int a^{\frac{m}{n}+p} (t^s - b)^{-\frac{m}{n}-p} t^{sp} \left(-\frac{s}{n}\right) a^{\frac{1}{n}} (t^s - b)^{-\frac{1}{n}-1} t^{s-1} dt = \end{aligned}$$

$$= -\frac{s}{n} a^{\frac{m+1}{n}+p} \int (t^s - b)^{-\left(\frac{m+1}{n}+p+1\right)} t^{sp+s-1} dt,$$

а це вже інтеграл від раціональної функції.

Міркування для інших підстановок таблиці 1 не є складнішими від наведених.

1.3.6. Інтегрування деяких трансцендентних функцій. У таблиці 2 наведено деякі класи трансцендентних функцій та вказано методи інтегрування цих функцій.

Таблиця 2

Функція	Додаткові умови	Можливий метод інтегрування
$\int f(x) = P(x)\varphi(x)$	$P(x)$ – многочлен, $\varphi(x)$ – це e^{ax} або $\cos ax$, або $\sin ax$	Інтегрування частинами: $u = P(x)$, $dv = \varphi(x) dx$
	$P(x)$ – многочлен, $\varphi(x)$ – це $\ln x$ або $\arcsin ax$, або $\arccos ax$, або $\operatorname{arctg} ax$, або $\operatorname{arctg} ax$	Інтегрування частинами: $u = \varphi(x)$, $dv = P(x) dx$
$\int f(x) = R(e^{ax})$	$a \neq 0$	Підстановка: $e^{ax} = t$
$\int f(x) = R(\sin ax, \cos ax) = R_1(\operatorname{tg} \frac{ax}{2})$	$a \neq 0$	Універсальна підстановка: $\operatorname{tg} \frac{ax}{2} = t$
$\int f(x) = R(\sin ax, \cos ax)$	$R(-u, v) = -R(u, v)$, $a \neq 0$	Підстановка: $\cos ax = t$
$\int f(x) = R(\sin ax, \cos ax)$	$R(u, -v) = -R(u, v)$, $a \neq 0$	Підстановка: $\sin ax = t$
$\int f(x) = R(\sin ax, \cos ax)$	$R(-u, -v) = R(u, v)$, $a \neq 0$	Підстановки: $\operatorname{tg} ax = t$ або $\operatorname{ctg} ax = t$
$\int f(x) = \sin^v x \cos^u x$	v і u раціональні, але не є одночасно цілими	Підстановка: $\sin^2 x = t$
$\int f(x) = \alpha(x)\beta(x)$	$\alpha(x)$ – це $\cos ax$ або $\sin ax$, $\beta(x)$ – це $\cos bx$ або $\sin bx$, $a \neq 0$, $b \neq 0$	Перетворити добуток $\alpha(x)\beta(x)$ на суму, наприклад: $\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x)$ і т. ін.
$\int f(x) = \alpha(x)\beta(x)$	$\alpha(x)$ – це e^{ax} , $\beta(x)$ – це $\cos bx$ або $\sin bx$, $a \neq 0$, $b \neq 0$	Двічі застосувати інтегрування частинами, кожного разу позначаючи $u = e^{ax}$

За наведеними в таблиці 2 методами інтегрування зводять обчислення інтеграла від трансцендентної функції f до обчислення інтегралів розглянутих вище типів. Проілюструємо це на деяких прикладах.

1. Розглянемо інтеграл $\int R(\sin ax, \cos ax) dx$, $a \neq 0$. Застосуємо до нього універсальну підстановку з таблиці 2: $t = \operatorname{tg} \frac{ax}{2}$. Звідси знаходимо $\frac{ax}{2} = \operatorname{arctg} t$, $x = \frac{2}{a} \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2}{a} \frac{dt}{1+t^2}$.

Оскільки

$$\sin ax = \frac{2 \sin \frac{ax}{2} \cos \frac{ax}{2}}{\sin^2 \frac{ax}{2} + \cos^2 \frac{ax}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{ax}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{ax}{2} + 1} = \frac{2t}{1+t^2},$$
$$\cos ax = \frac{\cos^2 \frac{ax}{2} - \sin^2 \frac{ax}{2}}{\cos^2 \frac{ax}{2} + \sin^2 \frac{ax}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{ax}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{ax}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

то

$$\int R(\sin ax, \cos ax) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{a} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Останній інтеграл є інтегралом від раціональної функції змінної t .

2. Розглянемо інтеграл $I = \int e^{ax} \cos bx dx$, де $a \neq 0$ і $b \neq 0$. Використовуючи метод інтегрування частинами, дістанемо:

$$\begin{aligned} I &= \left| \begin{array}{l} u = e^{ax} \quad du = ae^{ax} dx \\ dv = \cos bx dx \quad v = \frac{1}{b} \sin bx \end{array} \right| = \\ &= e^{ax} \frac{1}{b} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = e^{ax} \quad du = ae^{ax} dx \\ dv = \sin bx dx \quad v = -\frac{1}{b} \cos bx \end{array} \right| = \\ &= e^{ax} \frac{1}{b} \sin bx - \frac{a}{b} \left(-e^{ax} \frac{1}{b} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx dx \right) = \\ &= e^{ax} \frac{1}{b} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} I \Rightarrow \\ (1 + \frac{a^2}{b^2}) \int e^{ax} \cos bx dx &= \frac{e^{ax}}{b^2} (b \sin bx + a \cos bx) \Rightarrow \\ \int e^{ax} \cos bx dx &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \sin bx + a \cos bx) + C. \end{aligned}$$

Зауважимо, що наведені в таблицях 1 та 2 методи інтегрування можливі, але не єдині. На практиці може виявитися, що для обчислення того чи іншого інтеграла вказаний в таблицях 1 та 2 метод не є найкращим. Наприклад, для обчислення інтеграла $\int \operatorname{tg}^2 x dx$ можна було б застосувати вказану в таблиці 2 підстановку $\operatorname{tg} x = t$. Але це не доцільно, оскільки

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

і тому

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

1.3.7. Приклади неелементарних функцій. Зауважимо, що не кожна елементарна функція інтегрується в скінченному вигляді. Наприклад, кожен з наведених нижче інтегралів 1) – 5) не обчислюється у скінченному вигляді:

$$1) \int_0^z \frac{du}{\ln u} =: \operatorname{li} z - \text{інтегральний логарифм};$$

$$2) \int_0^z \frac{\sin u}{u} du =: \operatorname{si} z - \text{інтегральний синус};$$

$$3) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx - \text{інтеграл ймовірності};$$

$$4) \int_0^z \sin x^2 dx \text{ і } \int_0^z \cos x^2 dx - \text{інтеграли Френеля};$$

5) $\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, $\int_0^z \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ і $\int_0^z \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, $0 < k < 1$ – **еліптичні інтеграли** відповідно 1-го, 2-го та 3-го роду;

6) $\int_0^\phi \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}}$, $\int_0^\phi \sqrt{1-k^2 \sin^2 t} dt$ і $\int_0^\phi \frac{dt}{(1+h \sin^2 t)\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}}$, $0 < k < 1$ – **еліптичні інтеграли** відповідно 1-го, 2-го та 3-го роду у формі Лежандра.

Вказані інтеграли та багато інших, що не обчислюються в скінченному вигляді, відіграють у математиці важливу роль. Тому важливими є й методи обчислення цих інтегралів. Один з таких методів – **метод розвипення функцій у степеневий ряд**. Суть цього методу визначається формулою:

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^z \sum_{k=0}^{\infty} a_k (u - z_0)^k du &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{z_0}^z (u - z_0)^k du = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(z - z_0)^{k+1}}{k+1}, \quad z \in K = \{z: |z - z_0| < R\}, \end{aligned} \quad (2)$$

коли радіус збіжності даного степеневого ряду $R > 0$.

Застосуємо формулу (2) до обчислення інтегрального синуса. Маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{z} &= \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!} \Rightarrow \\ \operatorname{si} z &= \int_0^z \frac{\sin u}{u} du = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} \int_0^z u^{2k} du = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)} \quad \forall z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

За цією формулою можна обчислити інтегральний синус в будь-якій точці z з будь-якою точністю.

1.3.8. Використання комп'ютерних засобів математики. У даному пункті розглянемо відшукання первісної в аналітичному вигляді.

1.3.8.1. Використання Gran1. Програма Gran1 не призначена для символічних перетворень, а лише для чисельних розрахунків і візуального зображення деяких математичних об'єктів.

1.3.8.2. Використання Maxima. Як показує практика, більшість невизначених інтегралів, які подані у задачниках, можна обчислити за допомогою команди `integrate(f(x),x)`, розглянутої раніше. Певною мірою це зумовлено тим, що ці інтеграли відносно нескладні. Проте іноді виникає потреба мати простіший результат, ніж отриманий за допомогою Maxima. При цьому спрощення виданої відповіді за командами `ratsimp`, `radcan`, `factor`, `expand`, `trigsimp`, `trigexpand`, `trigreduce` тощо не завжди дає бажаний результат. У таких випадках більш ефективними є: перетворення підінтегральної функції, застосування тієї чи іншої підстановки або методу інтегрування частинами. Зупинимося саме на таких моментах.

Почнемо з інтегрування раціональних функцій $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Згідно з алгоритмом, наведеним у пункті 1.3.3, потрібно спочатку виділити цілу частину і правильний дріб. У Maxima є команда `divide(P(x),Q(x),x)`, за якою можна знайти частку $R(x)$ і остачу $P_1(x)$ від ділення многочлена $P(x)$ на $Q(x)$.

Так, якщо $P(x) = x^8 - x^7 + x^4 - 3x^2 - x + 1$, а $Q(x) = x^6 + x^2$, то командою

```
(%i1) divide((x^8-x^7+x^4-3*x^2-x+1),(x^6+x^2),x);
```

буде знайдено частку і остачу від ділення $P(x)$ на $Q(x)$ у вигляді списку

```
(%o1) [x^2 - x, x^3 - 3x^2 - x + 1]
```

Крім того, у Maxima є команда `partfrac(f(x),x)`, за якою дріб $f(x)$ розкладається на суму нескоротних дробів, елементарних над полем \mathbb{Q} . При цьому також виділяється ціла частина.

Наприклад, узявши ті самі многочлени, що й раніше, розкладемо дріб $P(x)/Q(x)$ на більш прості дроби:

```
(%i2) partfrac((x^8-x^7+x^4-3*x^2-x+1)/(x^6+x^2),x);
```

```
(%o2)  $\frac{x^3-x^2+x-3}{x^4+1} + x^2 - x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ 
```

Часто після спрощення раціональної функції за командою `partfrac` можна одразу переходити до інтегрування, навіть якщо одержані дроби не є елементарними над полем \mathbb{R} .

Припустимо, що треба обчислити інтеграл

$$I = \int \frac{x^{11} dx}{x^8 + 3x^4 + 2}.$$

Для цього спочатку виконаємо команду

(%i3) $\text{partfrac}(x^{11}/(x^8+3*x^4+2),x);$

(%o3) $-\frac{4x^3}{x^4+2} + \frac{x^3}{x^4+1} + x^3$

Як бачимо, такий розклад підінтегральної функції дозволяє знайти потрібний інтеграл майже усно:

$$I = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) - \ln(x^4 + 2) + C.$$

Далі за алгоритмом інтегрування раціональної функції йде розкладання знаменника правильного дробу $P_1(x)/Q_1(x)$ на незвідні над \mathbb{R} множники. З алгебри відомо, що ця задача у загальному випадку нерозв'язна. Її можна розв'язати лише у деяких простіших випадках. Зокрема, у Maxima є команда `factor(Q(x))`, за якою можна розкласти многочлен $Q(x)$ на незвідні множники над полем \mathbb{Q} . Наприклад,

(%i4) `factor(10*x^4-39*x^3+80*x^2-108*x+63);`

(%o4) $(2x - 3)(5x - 7)(x^2 - x + 3)$

(%i5) `factor(x^4+5*x^3+6*x^2-x-3);`

(%o5) $(x + 1)(x + 3)(x^2 + x - 1)$

У рядку (%o4) одержали розклад многочлена $10x^4 - 39x^3 + 80x^2 - 108x + 63$ і над \mathbb{Q} , і над \mathbb{R} . А для многочлена $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - x - 3$ розклад над \mathbb{Q} (див. рядок (%o5)) ще не є розкладом над \mathbb{R} , оскільки многочлен $x^2 - x + 1$ у свою чергу розкладається на лінійні множники, тільки з ірраціональними коефіцієнтами.

Коли за командою `factor` не вдається розкласти многочлен над полем \mathbb{R} , то можна спробувати зробити це по-іншому. Одним із способів є використання команди `solve(Q(x))`, за якою знаходять у точному вигляді усі комплексні корені $Q(x)$, коли це можливо. Як відомо, кожному дійсному кореню X_j відповідає лінійний множник $x - X_j$, а парі комплексних спряжених коренів X_k та X_l відповідає квадратичний множник $x^2 + px + q = (x - X_k)(x - X_l)$.

Наприклад, знайдемо незвідні множники многочлена x^4+2 . Для цього знайдемо спочатку його корені:

(%i6) `solve(x^4+2), rectform;`

(за додатковою командою `rectform` забезпечується виведення комплексних коренів в алгебраїчній формі)

(%o6) $[x = \frac{i}{2^{\frac{1}{4}}} - \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}, x = -\frac{i}{2^{\frac{1}{4}}} - \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}, x = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} - \frac{i}{2^{\frac{1}{4}}}, x = \frac{i}{2^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}]$

Виведені корені є попарно спряжені. Перемножимо відповідні пари виразів $x - X_k$ та $x - \bar{X}_k$ і розкриємо дужки. При введенні нових виразів можна копіювати фрагменти формул з вікна виведення.

(%i7) `(x-(%i/2^(1/4)-1/2^(1/4)))*(x-(%i/2^(1/4)-1/2^(1/4))), expand;`

(%o7) $x^2 + 2^{\frac{3}{4}}x + \sqrt{2}$

(%i8) `(x-(1/2^(1/4)-%i/2^(1/4)))*(x-(1/2^(1/4)+%i/2^(1/4))), expand;`

$$(\%o8) x^2 - 2^{\frac{3}{4}}x + \sqrt{2}$$

Таким чином, $x^4 + 2 = (x^2 + 2^{\frac{3}{4}}x + \sqrt{2})(x^2 - 2^{\frac{3}{4}}x + \sqrt{2})$.

Наступним кроком алгоритму інтегрування раціональної функції є розкладання правильного дробу $P_1(x)/Q_1(x)$ на елементарні дроби. Як зазначалося вище, у випадку існування такого розкладу над полем \mathbb{Q} його можна знайти за допомогою команди `partfrac(P1(x),Q1(x),x)`. При цьому многочлени можуть бути і з буквеними коефіцієнтами.

Розглянемо, для прикладу, таку задачу. Потрібно встановити, коли інтеграл

$$\int \frac{ax^2 + bx + c}{x^3(x-1)^2} dx$$

виражається через раціональну функцію.

Застосуємо до підінтегральної функції команду `partfrac`:

$$(\%i9) \text{partfrac}((a*x^2+b*x+c)/(x-1)^2/x^3,x);$$

$$(\%o9) \frac{3c+2b+a}{x} + \frac{2c+b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{-3c-2b-a}{x-1} + \frac{c+b+a}{(x-1)^2}$$

Після цього розв'язок задачі виглядає очевидним: шукана первісна буде раціональною тоді й тільки тоді, коли $a + 2b + 3c = 0$.

Однак, за командою `partfrac` не завжди вдається розкласти дріб на елементарні дроби (див. рядок `(%o2)`). Крім того, часто необхідно наводити детальний хід розв'язування задачі, у тому числі процесу розкладання дробу на елементарні дроби. В цій ситуації `Maxima` також може бути ефективно застосована. Адже коли знаменник дробу розкладений на прості множники, неважко написати формальний розклад з невизначеними коефіцієнтами. Залишається лише знайти ці коефіцієнти за допомогою комп'ютера.

Повернемося до дробу

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 3}{x^4 + 1},$$

одержаного в рядку `(%o2)`, і розкладемо його на елементарні дроби.

Оскільки $x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$, то згідно з п. 3 алгоритму інтегрування раціональної функції

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 3}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}.$$

Отже, вводимо у комп'ютер

$$(\%i10) (A*x+B)/(x^2-\text{sqrt}(2)*x+1)+(C*x+D)/(x^2+\text{sqrt}(2)*x+1);$$

$$(\%o10) \frac{D+x C}{x^2+\sqrt{2} x+1} + \frac{B+x A}{x^2-\sqrt{2} x+1}$$

Зведемо тепер цей вираз до спільного знаменника, згрупувавши при цьому в чисельнику коефіцієнти при x :

$$(\%i11) \text{ratsimp}(\%,x);$$

$$(\%o11) \frac{x(-\sqrt{2} D+C+\sqrt{2} B+A)+x^2(D-\sqrt{2} C+B+\sqrt{2} A)+D+x^3(C+A)+B}{x^4+1}$$

Приврівняємо коефіцієнти при однакових степенях x у чисельнику даного дроби і початкового. З отриманих рівностей складемо систему (список) і розв'яжемо її за командою `solve`. При цьому доцільно скопіювати потрібні вирази з рядка (%o8) і вставити у рядок введення.

```
(%i12) solve([C+A=1, D-sqrt(2)*C+B+sqrt(2)*A=-1,
-sqrt(2)*D+C+sqrt(2)*B+A=1, B+D=-3]);
```

```
(%o12) [[D = -3/2, B = -3/2, C = -sqrt(2)-1, A = sqrt(2)+1]]
```

Коефіцієнти знайдено, а отже, задачу розв'язано.

Розглянемо тепер інтегрування ірраціональних функцій.

В цілому за допомогою Maxima легко обчислюються інтеграли від найпростіших ірраціональностей і диференціальних біномів. При інтегруванні квадратичних ірраціональностей досить часто за допомогою Maxima не вдається отримати відповідь. Дробово-лінійні ірраціональності, які містять корені степеня $n > 2$, за командою `integrate` проінтегрувати часто не вдається. Але одразу зазначимо, що в Maxima є засоби реалізації методів підстановки та інтегрування частинами, за допомогою яких можна розв'язати більшість проблем з обчисленням інтегралів.

Для того щоб перейти в інтегралі $\int f(x) dx$ до нової змінної t , яка задовольняє рівність $G(x, t) = 0$, зокрема $x = g(t)$, слід виконати команду `changevar('integrate(f(x),x),G(x,t),t,x)`. Апостроф ставиться для того, щоб інтеграл спочатку не обчислювався. Для більшої наочності цю команду краще виконувати за кілька кроків:

- 1) ввести заданий інтеграл `I:'integrate(f(x),x);`
- 2) явно виразити попередню змінну через нову `g(t):solve(G(x,t),x);`
- 3) виконати заміну: `changevar(I,x=g(t),t,x)`.

У результаті буде виведено новий інтеграл (скажімо, I_1) від змінної t у необчисленій формі. Щоб обчислити його, потрібно задати команду `I1, nouns -` з клавіатури або через меню

Спростити

 > Обчислити необчислювані (noun) форми.

Після цього можна повернутися до попередньої змінної, знайшовши обернену підстановку $t = h(x)$ за командою `h(x):solve(G(x,t),t)`, і задавши команду `I1, t=h(x)` або `subst(h(x),t,I1)`.

Перезапустивши сеанс Maxima, обчислимо кілька інтегралів, які без спрощення не беруться.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}} = ?$$

```
(%i1) integrate(1/sqrt((x-1)^3*(x-2)),x);
```

```
(%o1) \int \frac{1}{\sqrt{(x-2)(x-1)^3}} dx
```

Спробуємо спростити підінтегральну функцію за командою спрощування виразів з радикалами:

(%i2) radcan(%);

(%o2) $\int \frac{1}{\sqrt{x-2}(x-1)^{\frac{3}{2}}} dx$

Обчислення цього інтеграла завершується успішно:

(%i3) %,nouns;

(%o3) $\frac{2\sqrt{x^2-3x+2}}{x-1}$

Отже, даний інтеграл вдалося обчислити після деякого перетворення підінтегральної функції. З таким же успіхом можна було просто задати команду integrate(1/sqrt((x-1)*(x-2))/(x-1),x), у якій $(x - 1)$ винесено з-під знаку кореня.

$$\int \sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{(x-1)^5}} dx = ?$$

(%i4) integrate(((x+1)^2/(x-1)^5)^(1/3),x);

(%o4) $\int \frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{(x-1)^{\frac{5}{3}}} dx$

Оскільки це дробово-лінійна ірраціональність, зробимо заміну змінної

(%i5) changevar(%,(x+1)/(x-1)=t^3,t,x);

(%o5) $-3 \int \frac{t^4}{t^3-1} dt$

Отриманий інтеграл уже обчислюється:

(%i6) %,nouns;

(%o6) $-3 \left(-\frac{\log(t^2+t+1)}{6} + \frac{\operatorname{atan}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} + \frac{\log(t-1)}{3} + \frac{t^2}{2} \right)$

Зрозуміло, що тут $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$, але в такому складному виразі недоцільно повертатися до попередньої змінної у явному вигляді.

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = ?$$

(%i7) integrate(1/(x+sqrt(x^2+x+1)),x);

(%o7) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} dx$

Виконаємо першу підстановку Ейлера, розкриваючи корінь, оскільки при наявності кореня за допомогою Махіма виразити x через t не вдається:

(%i8) changevar(%,x^2+x+1=(t-x)^2,t,x);

(%o8) $\int \frac{2t^2+2t+2}{4t^3+4t^2+t} dt$

(%i9) %,nouns

(%o9) $-\frac{3}{2} \log_2(2t+1) + 2 \log(t) + \frac{3}{4t+2}$

Виконаємо обернену підстановку:

(%i10) %,t=x+sqrt(x^2+x+1);

$$\frac{(\%o10) - \frac{3 \log(2(\sqrt{x^2+x+1}+x)+1)}{2} + 2 \log(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{4(\sqrt{x^2+x+1}+x)+2}$$

Це і є остаточно відповідь.

Цікаво поекспериментувати з даним інтегралом. Крім першої, до нього можна застосувати також другу підстановку Ейлера: $\sqrt{x^2+x+1} = tx - 1$. На цей раз за допомогою комп'ютера виразимо спочатку x , потім dx і підінтегральну функцію через нову змінну t .

(%i11) solve(x^2+x+1=(t*x-1)^2,x);

(%o11) [x = $\frac{2t+1}{t^2-1}$, x = 0]

Зрозуміло, що $x = 0$ – сторонній корінь. Знайдемо dx за допомогою оператора диференціювання del, який можна застосовувати як до функцій, так і до рівнянь.

(%i12) del(x=(2*t+1)/(t^2-1));

(%o12) del(x = $\frac{2t+1}{t^2-1}$)

(%i13) %,nouns;

(%o13) del(x) = $\left(\frac{2}{t^2-1} - \frac{2t(2t+1)}{(t^2-1)^2}\right) del(t)$

Дещо спростимо цей вираз:

(%i14) factor(%);

(%o14) del(x) = $-\frac{2(t^2+t+1)del(t)}{(t-1)^2(t+1)^2}$

Виразимо підінтегральну функцію $f(x)$ через t і спростимо:

(%i15) subst((2*t+1)/(t^2-1),x,1/(x+sqrt(x^2+x+1))),radcan;

(%o15) $\frac{t-1}{t+2}$

Розглянемо тепер нову підінтегральну функцію відносно змінної t :

(%i16) -(t-1)/(t+2)*(2*(t^2+t+1))/((t-1)^2*(t+1)^2);

(%o16) $\frac{2(1-t)(t^2+t+1)}{(t-1)^2(t+1)^2(t+2)}$

(%i17) ratsimp(%);

(%o17) $-\frac{2(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)^2(t+2)}$

Звідси вже видно, що друга підстановка Ейлера привела до складнішої раціональної функції, ніж перша. Дещо складнішим виглядає і результат інтегрування:

(%i18) integrate(%,t);

(%o18) $-2 \left(-\log(t+2) + \frac{3 \log(t+1)}{4} + \frac{\log(t-1)}{4} + \frac{1}{2t+2} \right)$,

де $t = \frac{1}{x}(1 + \sqrt{x^2+x+1})$.

Серед трансцендентних функцій теж достатньо часто трапляються такі, які неможливо проінтегрувати тільки за допомогою команди integrate. Для прикладу, спробуємо знайти ще кілька інтегралів.

$$\int \sqrt{1 + \sin x} dx = ?$$

(%i19) integrate(sqrt(1+sin(x)),x);

(%o19) $\int \sqrt{\sin(x) + 1} dx$

Інтеграл повернуто у необчисленому вигляді. Тому зробимо у ньому заміну змінної $\sin x = t$:

(%i20) changevar(%sin(x)=t,x);

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o20) $\int \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt$

Миттєво дістали досить простий інтеграл. При цьому було виведено попередження, що для обчислення невідомого x за відомим t використано обернену тригонометричну функцію і деякі розв'язки втрачено. Простіше кажучи, було взято $x = \arcsin t$. Завершимо розв'язування:

(%i21) %nouns,t=sin(x);

(%o21) $-2 \sqrt{1 - \sin(x)}$

$$\int \frac{2^x dx}{\sqrt{4^x + 1}} = ?$$

(%i22) integrate(2^x/sqrt(4^x+1),x);

(%o22) $\int \frac{2^x}{\sqrt{4^x + 1}} dx$

Перетворимо підінтегральну функцію:

(%i23) radcan(%);

(%o23) $\int \frac{2^x}{\sqrt{2^{2x} + 1}} dx$

і спробуємо проінтегрувати ще раз:

(%i24) %nouns;

(%o24) $\frac{\operatorname{asinh}(2^x)}{\log(2)}$

Тепер інтеграл обчислено. Щоб перейти від оберненої гіперболічної функції до логарифмічної, застосуємо функцію logarc:

(%i25) logarc(%);

(%o25) $\frac{\log(\sqrt{2^{2x} + 1} + 2^x)}{\log(2)}$

Нарешті, розглянемо деякі випадки, коли доцільно застосувати метод інтегрування частинами. У Maxima немає вбудованої команди для інтегрування частинами, але її легко створити самостійно і зберегти в окремому файлі для подальшого використання. У комплекті з Maxima розповсюджується багато додаткових пакетів, призначених для розв'язування тих чи інших задач. Зокрема, серед них є пакет bypart.macs, який містить всього одну команду – команду інтегрування частинами для невизначеного інтеграла $\int f(x) dx = \int u(x)v'(x) dx$. Вона має вигляд byparts(f(x),x,u(x),v'(x)), а результатом її виконання є $F(x)$ – первісна функції $f(x)$. Для використання пакету його потрібно спочатку завантажити за командою load(bypart).

Наприклад, порівняємо результати безпосереднього інтегрування та інтегрування частинами при обчисленні інтеграла $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} dx$:

```
(%i1) f:log(cos(x))/sin(x)^2$
```

```
(%i2) integrate(f,x);
```

Не будемо наводити ту громіздку відповідь, яка з'явиться у рядку (%o2). Натомість спростимо її за допомогою команд `trigsimp(%); logcontract(%); trigsimp(%)`, після чого дістанемо

```
(%o5) 
$$\frac{(\cos(2x)-1) \log(4 \sin(x)^2)+2x \sin(2x)}{2 \cos(2x)-2}$$

```

Тепер знайдемо цей самий інтеграл частинами, завантаживши попередньо пакет `bypart`:

```
(%i6) load(bypart)$
```

```
(%i7) byparts(f,x,x,1/sin(x)^2);
```

```
(%o7) 
$$\log(\sin(x)) - \frac{x}{\tan(x)}$$

```

Очевидно, що при інтегруванні частинами вийшов набагато простіший результат.

При застосуванні команди `byparts` інтеграл $\int u dv$ автоматично обчислюється і немає змоги побачити самі частини формули. А іноді за допомогою цієї команди не вдається обчислити, здавалося б, досить нескладний інтеграл.

Наприклад, інтеграл $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$ за командою `integrate` знайти не вдається. Неважко перевірити, що за методом інтегрування частинами цей інтеграл обчислити легко. Але й за командою `byparts` його обчислити не вдається. Виявляється, у файлі `bypart.mac` цю команду визначено так:

```
byparts(exp,x,u,dv):=(dv:integrate(dv,x),u*dv-integrate(dv*diff(u,x,1),x));
```

Аналізуючи це означення, можна зробити такі висновки: 1) перший аргумент `exp` ніяк не використовується; 2) застосування команди `diff(u,x,1)`, призначеної для обчислення похідної $u'(x)$, може приводити до складних виразів, що і є причиною невдач при інтегруванні; 3) перед другою командою `integrate` доцільно поставити апостроф, щоб спочатку інтеграл $\int v du$ не обчислювався.

У зв'язку з цим доцільно створити нову команду інтегрування частинами:

```
byparts1(x,u,dv):=(dv:integrate(dv,x),u*dv-'integrate(dv*rat(diff(u,x),x));
```

і зберегти її у файл `bypart1.mac`. Тут враховані відмічені вище зауваження, зокрема похідна $u'(x)$ спрощується до канонічної раціональної форми за командою `rat`, а задавати саму функцію $f(x)$ не потрібно.

Застосуємо таку команду `byparts1` до поки що не знайденого інтеграла

$$\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx.$$

```
(%i8) load(bypart1)$
```

```
(%i9) byparts1(x,log(x+sqrt(1+x^2)),1);
```

$$(\%o9) x \log(\sqrt{x^2 + 1} + x) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

(%i10) %,nouns

$$(\%o10) x \log(\sqrt{x^2 + 1} + x) - \sqrt{x^2 + 1}$$

На цей раз команду інтегрування частинами виконано успішно.

Виявляється, можна було б обчислити цей інтеграл і за командою integrate, якби його задали у вигляді $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx = \int \operatorname{arsh}(x) dx$:

(%i11) integrate(asinh(x),x);

$$(\%o11) x \operatorname{asinh}(x) - \sqrt{x^2 + 1}$$

З такою ж легкістю обчислюється й інтеграл

$$\int \ln^2(x + \sqrt{1 + x^2}) dx = \int \operatorname{arsh}^2(x) dx:$$

(%i12) integrate(asinh(x)^2,x);

$$(\%o12) x \operatorname{asinh}(x)^2 - 2 \sqrt{x^2 + 1} \operatorname{asinh}(x) + 2x$$

Але далеко не кожен логарифм, схожий на попередній, можна виразити через обернену гіперболічну функцію, і тоді цей спосіб виявиться непридатним. Наприклад, обчислимо інтеграл $\int \ln(1 + \sqrt{x^2 + 1}) dx$.

По-перше, почнемо з інтегрування частинами:

(%i13) byparts1(x,log(1+sqrt(1+x^2)),1);

$$(\%o13) x \log(\sqrt{x^2 + 1} + 1) - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1 + x^2 + 1}} dx$$

Інтеграл у правій частині за командою nouns не вдається обчислити. Тому обчислимо його окремо. Його можна раціоналізувати за допомогою першої чи другої підстановки Ейлера. Але найпростіше зробити гіперболічну підстановку $x = \operatorname{sh} t$. Отже,

(%i14) integrate(x^2/(sqrt(x^2+1)+x^2+1),x);

$$(\%o14) \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1 + x^2 + 1}} dx$$

(%i15) changevar(%,x=sinh(t),t,x);

$$(\%o15) \int \frac{\cosh(t) \sinh(t)^2}{\sqrt{\sinh(t)^2 + 1 + \sinh(t)^2 + 1}} dt$$

(%i16) trigsimp(%);

$$(\%o16) \int \cosh(t) - 1 dt$$

(%i17) %,nouns

$$(\%o17) \sinh(t) - t$$

Зробимо обернену підстановку:

(%i18) %,t=asinh(x);

$$(\%o18) x - \operatorname{asinh}(x)$$

(%i19) logarc(%)

$$(\%o19) x - \log(\sqrt{x^2 + 1} + x)$$

Запишемо відповідь, враховуючи (%o13) і (%o19):

$$(\%i20) x * \log(\sqrt{x^2 + 1} + 1) - x + \log(\sqrt{x^2 + 1} + x);$$

$$(\%o20) \log(\sqrt{x^2 + 1} + x) + x \log(\sqrt{x^2 + 1} + 1) - x$$

Перевіримо результат диференціюванням:

(%i21) diff(%x);

(%o21) $\log(\sqrt{x^2 + 1} + 1) + \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1}{\sqrt{x^2+1+x}} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1+1})} - 1$

(%i22) ratsimp(%);

(%o22) $\log(\sqrt{x^2 + 1} + 1)$

Перевірка пройшла успішно. Але необхідно зауважити, що так буває не завжди, оскільки похідну від первісної не завжди вдається спростити до її збігу з підінтегральною функцією. Слід зауважити, що проблема спрощування виразів досить складна і з цим поки що треба змиритися.

Метод інтегрування частинами можна також успішно застосовувати для виведення рекурентних формул. Покажемо, як це робиться, наприклад, для інтеграла

$$J_n = \int x^a \ln^n x \, dx, \quad n = 2, 3, \dots, a \neq -1.$$

(%i23) byparts1(x,log(x)^n,x^a);

Is a+1 zero or nonzero? n;

(%o23) $\frac{x^{a+1} \log(x)^n}{a+1} - \frac{n \int x^a \log(x)^{n-1} dx}{a+1}$

Звідси випливає, що

$$J_n = \frac{x^{a+1}}{a+1} \ln^n x - \frac{n}{a+1} J_{n-1}.$$

1.3.9. Завдання для виконання за допомогою комп'ютера.

1. Знайти область визначення кожного елементарного дробу та його невизначеного інтеграла у випадку дійсної та комплексної змінної.
2. Зобразити графік кожної неелементарної функції з пункту 1.3.7 і обчислити значення цих функцій для деяких дійсних та комплексних z .
3. Зобразити графік функції $f(x) = \int_0^x \sqrt[3]{1+t^2} \, dt$. З'ясувати, чи є ця функція елементарною.

2. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

2.1. Поняття визначеного інтеграла та його існування

2.1.1. Розбиття відрізка та його дрібність. У підрозділі 1.2 було введено поняття площі криволінійної трапеції за допомогою поняття площі звичайної трапеції. Але досить часто поняття площі довільної фігури $\Phi \subset \mathbb{R}^2$ вводиться за допомогою поняття площі прямокутника. Проілюструємо, як це можна зробити, коли Φ – криволінійна трапеція, тобто

$$\Phi = \{(x; y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

де f – задана функція, що є неперервною і невід’ємною на відрізку $[a; b]$ (рис. 2.1.1).

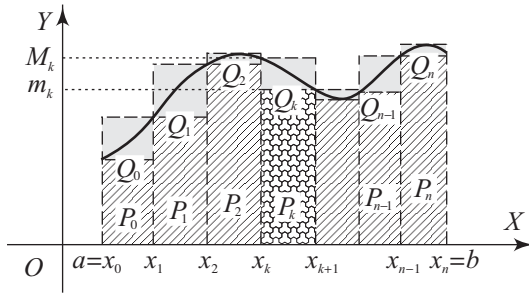


Рис. 2.1.1.

Множину T точок $x_k \in [a; b]$, $k \in \overline{0, n}$, називають *розбиттям відрізка* $[a; b]$, якщо $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b$. При цьому число $\lambda(T) = \max_{0 \leq k \leq n-1} (x_{k+1} - x_k)$ називають *дрібністю розбиття* T .

2.1.2. Поняття площі криволінійної трапеції. Нехай Φ – криволінійна трапеція, визначена в пункті 2.1.1 (рис. 2.1.1). Розглянемо довільне розбиття T відрізка $[a; b]$ точками x_k , $k \in \overline{0, n}$. Оскільки f є неперервною функцією на $[a; b]$, то вона є неперервною і на кожному відрізку $[x_k; x_{k+1}]$, $k \in \overline{0, n-1}$, а тому за другою теоремою Вейєрштрасса існують $m_k = \min_{[x_k; x_{k+1}]} f(x) = f(x_k^*)$ і $M_k = \max_{[x_k; x_{k+1}]} f(x) = f(x_k^{**})$.

Визначимо прямокутники $P_k = \{(x, y): x_k \leq x \leq x_{k+1}, 0 \leq y \leq m_k\}$, $k \in \overline{0, n-1}$ (рис. 2.1.1). Тоді *східчаста фігура* $\Phi_* = \bigcup_{k=0}^{n-1} P_k$ цілком лежатиме у Φ , причому при зменшенні дрібності розбиття T фігура Φ_* буде “розширюватися”, наближаючись до фігури Φ зсередини.

Якщо визначити прямокутники $Q_k = \{(x, y): x_k \leq x \leq x_{k+1}, 0 \leq y \leq$

$M_k\}$, $k \in \overline{0, n-1}$ (рис. 2.1.1), то *східчаста фігура* $\Phi^* = \bigcup_{k=0}^{n-1} Q_k$ міститиме у собі Φ . При цьому, коли дрібність $\lambda(T)$ розбиття T почне зменшуватися, то фігура Φ^* почне “звужуватися”, наближаючись до фігури Φ ззовні.

У зв'язку з цим природно визначити площу фігури Φ як спільну границю площ фігур Φ_* і Φ^* , коли $\lambda(T) \rightarrow 0$:

$$S(\Phi) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(\Phi_*) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(\Phi^*).$$

Оскільки

$$S(\Phi_*) = \sum_{k=0}^{n-1} S(P_k) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*)(x_{k+1} - x_k),$$

а

$$S(\Phi^*) = \sum_{k=0}^{n-1} S(Q_k) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^{**})(x_{k+1} - x_k),$$

то поняття площі криволінійної трапеції приводить до поняття границі вигляду

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)(x_{k+1} - x_k).$$

До таких само границь приводять багато інших практичних задач і тому ці границі розглянемо детальніше.

2.1.3. Поняття інтегральної суми та її границі. Нехай f – довільна числова функція, визначена на відрізку $[a; b] \subset \mathbb{R}$. Для довільного розбиття T відрізка $[a; b]$ точками x_k , $k \in \overline{0, n}$, виберемо довільним чином так звані *проміжні точки* $x_k^* \in [x_k; x_{k+1}]$, $k \in \overline{0, n-1}$, позначимо через X^* множину всіх цих проміжних точок і складемо суму

$$S(T, X^*, f) = S(T, X^*) = S(T) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*) \Delta x_k,$$

де $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Цю суму називають *інтегральною сумою, складеною для заданої функції f , заданого розбиття T відрізка $[a; b]$ і заданої множини проміжних точок X^** .

Число I називають *границею інтегральної суми $S(T)$* , коли $\lambda(T) \rightarrow 0$, і записують $I = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(T)$, якщо $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0: |S(T) - I| < \epsilon$,

коли $\lambda(T) < \delta$, для довільного розбиття T відрізка $[a; b]$ і довільної множини X^* проміжних точок x_k^* .

Суть поняття *границі інтегральної суми* полягає в тому, що при достатньо малій дрібності $\lambda(T)$ довільна інтегральна сума $S(T)$ як завгодно близька до числа I .

За своєю формою поняття границі інтегральної суми схоже на поняття границі функції в точці. Тому природно чекати, що й властивості границі інтегральної суми нагадують відповідні властивості границі функції в точці. Зокрема, мають місце властивості про єдиність границі, про границю суми, різниці, добутку й частки, про перехід до границі під знаком модуля та в нерівності, про границю проміжної змінної та інші. У цьому можна легко переконатися.

2.1.4. Поняття R -інтегрованої функції та R -інтеграла. Функцію f називають R -інтегрованою або інтегрованою за Ріманом на відрізку $[a; b]$ і записують $f \in R[a; b]$, якщо існує скінченна границя $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(T) = I$. При цьому число I називають інтегралом або R -інтегралом, або інтегралом Рімана, або визначеним інтегралом функції f на відрізку $[a; b]$ і позначають його $(R) \int_a^b f(x) dx$ або $\int_a^b f(x) dx$, коли зрозуміло, про який інтеграл іде мова. Отже,

$$(R) \int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*) \Delta x_k.$$

Легко бачити, що $f \in R[a; b] \Leftrightarrow \operatorname{Re} f \in R[a; b]$ та $\operatorname{Im} f \in R[a; b]$, причому

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x) dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x) dx.$$

Тому надалі вважатимемо, що $f(x) \in \mathbb{R} \forall x \in [a; b]$, тобто усі значення $f(x)$ є дійсними числами.

2.1.5. Зв'язок між інтегралами Рімана і Ньютона – Лейбніца. Розглянемо питання про інтегровність функції за Ріманом. Спочатку з'ясуємо, чому позначення інтеграла Рімана збігається з позначенням інтеграла Ньютона – Лейбніца.

Теорема 1 (про зв'язок NL -інтеграла з інтегральними сумами). *Якщо дійсна функція $f \in NL[a; b]$ і $(NL) \int_a^b f(x) dx$ – її NL -інтеграл на $[a; b]$, то для будь-якого розбиття $T = \{x_k: k \in \overline{0, n}\}$ відрізка $[a; b]$ існує набір $X^* = \{x_k^*: k \in \overline{0, n-1}\}$ проміжних точок, такий що*

$$(NL) \int_a^b f(x) dx = S(T, X^*).$$

З теореми 1 випливає наступне твердження.

Теорема 2 (про зв'язок NL -інтеграла з R -інтегралом). *Якщо функція f одночасно інтегровна за Ріманом і за Ньютоном – Лейбніцом, то її*

R -інтеграл і NL -інтеграл на відрізку $[a; b]$ збігаються. Тому

$$(NL) \int_a^b f(x) dx = (R) \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (1)$$

де F – довільна первісна функції f на відрізку $[a; b]$.

Формулу (1) називають *формулою Ньютона – Лейбніца* для R -інтеграла.

2.1.6. R -інтегровність неперервних функцій. Геометричний зміст R -інтеграла. Відомо, що коли f є неперервною функцією на $[a; b]$, то f є NL -інтегрованою на $[a; b]$. Виникає питання: чи є неперервна функція f R -інтегрованою на $[a; b]$? Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема 3 (про R -інтегровність неперервної функції). *Якщо f є неперервною функцією на $[a; b]$, то вона інтегровна за Ріманом на $[a; b]$ і для неї правильна формула Ньютона – Лейбніца (1).*

З теореми 3 зокрема випливає, що криволінійна трапеція Φ має площу $S(\Phi)$ у наведеному вище розумінні, оскільки

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(\Phi_*) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*) \Delta x_k = (R) \int_a^b f(x) dx,$$

а

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(\Phi^*) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^{**}) \Delta x_k = (R) \int_a^b f(x) dx,$$

причому

$$S(\Phi) = (R) \int_a^b f(x) dx = (NL) \int_a^b f(x) dx.$$

У цьому полягає *геометричний зміст R -інтеграла*.

2.1.7. Необхідна умова R -інтегровності.

Теорема 4 (необхідна умова R -інтегровності). *Якщо функція f інтегровна за Ріманом на відрізку $[a; b]$, то вона є обмеженою на $[a; b]$.*

Виникає питання: чи кожна обмежена на $[a; b]$ функція f є інтегрованою за Ріманом на $[a; b]$?

Відповідь на це питання негативна. Дійсно, якщо розглянути так звану *функцію Діріхле*:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{коли } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{коли } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

то виявиться, що вона обмежена, проте не є R -інтегрованою на будь-якому відрізку $[a; b]$, $a < b$.

2.1.8. Суми Дарбу та їх властивості. Верхній та нижній інтеграли Дарбу. У теоремі 4 стверджується, що R -інтегровні функції слід шукати серед обмежених функцій. З'ясуємо, які саме обмежені функції є R -інтегровними.

Нехай f – обмежена дійсна функція на $[a; b]$. Зафіксуємо розбиття T відрізка $[a; b]$ точками x_k , $k \in \overline{0, n}$. Тоді f є обмеженою функцією на кожному відрізку $[x_k; x_{k+1}]$, а тому існують скінченні числа

$$m_k = \inf_{[x_k; x_{k+1}]} f(x) \text{ і } M_k = \sup_{[x_k; x_{k+1}]} f(x).$$

Складемо суми

$$S_*(T) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \text{ і } S^*(T) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k.$$

Їх називають відповідно *нижньою і верхньою сумами Дарбу, складеними для даної функції f і даного розбиття T* .

Перелічимо властивості сум Дарбу функції f .

Властивість 1 (про зв'язок сум Дарбу з інтегральними сумами). *Довільна інтегральна сума $S(T, X^*)$ задовольняє нерівність*

$$S_*(T) \leq S(T, X^*) \leq S^*(T),$$

а за рахунок вибору проміжних точок інтегральну суму можна як завгодно близько наблизити до нижньої (верхньої) суми Дарбу, тобто $\forall \varepsilon > 0 \exists X^, X^{**}$:*

$$S(T, X^*) - \varepsilon < S_*(T) \leq S^*(T) < S(T, X^{**}) + \varepsilon.$$

Властивість 2 (про монотонність сум Дарбу). *Якщо розбиття $T^{(m)}$ отримується з розбиття T шляхом введення m нових точок, то правильні нерівності*

$$S_*(T) \leq S_*(T^{(m)}) \leq S^*(T^{(m)}) \leq S^*(T),$$

і

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq S_*(T^{(m)}) - S_*(T) \leq 2mH\lambda(T), \\ 0 &\leq S^*(T) - S^*(T^{(m)}) \leq 2mH\lambda(T). \end{aligned} \right\}$$

Нехай розбиття T і T' довільні, а $T^* = T \cup T'$. Тоді за властивістю 2

$$S_*(T) \leq S_*(T^*) \leq S^*(T^*) \leq S^*(T'),$$

тобто $S_*(T) \leq S^*(T')$. Звідси, зафіксувавши довільне розбиття T' , дістанемо існування $\sup_{(T)} S_*(T) = I_* = I_*(f)$, причому

$$S_*(T) \leq I_* \leq S^*(T') \quad \forall T \text{ і } T'.$$

З останньої нерівності випливає існування $\inf_{(T')} S^*(T') = I^* = I^*(f)$ та нерівність $S_*(T) \leq I_* \leq I^* \leq S^*(T') \quad \forall T \text{ і } T'$.

Числа I_* та I^* називають відповідно *нижнім* і *верхнім інтегралами Дарбу функції* f .

Властивість 3 (про існування нижнього і верхнього інтегралів Дарбу). *Довільна функція f , обмежена на відрізку $[a; b]$, має на цьому відрізку нижній I_* та верхній I^* інтеграл Дарбу. При цьому які б не взяли розбиття T і T' відрізка $[a; b]$, виконуватиметься нерівність*

$$S_*(T) \leq I_* \leq I^* \leq S^*(T').$$

2.1.9. Критерії R -інтегровності. Вкажемо тепер умови, необхідні й достатні для R -інтегровності обмеженої функції f .

Теорема 5 (перший критерій R -інтегровності). *Нехай дійсна функція f є обмеженою на відрізку $[a; b]$. Тоді наступні твердження 1) – 4) еквівалентні між собою:*

- 1) $f \in R[a; b]$, тобто існує $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(T, X^*) = I$;
- 2) $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S^*(T) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S_*(T) = I$;
- 3) $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (S^*(T) - S_*(T)) = 0$;
- 4) $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k = 0$.

Теорема 6 (другий критерій R -інтегровності). *Нехай дійсна функція f є обмеженою на відрізку $[a; b]$. Тоді наступні твердження 1) – 5) еквівалентні між собою:*

- 1) $f \in R[a; b]$, тобто існує $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(T, X^*) = I$;
- 2) існує $\lim_{n \rightarrow \infty} S(T_n, X_n^*) = I$ для деякої послідовності розбиттів (T_n) такої, що $\lambda(T_n) \rightarrow 0$, коли $n \rightarrow \infty$, та довільної послідовності (M_n) відповідних наборів проміжних точок;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_*(T_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S^*(T_n)$ для деякої послідовності розбиттів (T_n) , для якої $\lambda(T_n) \rightarrow 0$, коли $n \rightarrow \infty$;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (S^*(T_n) - S_*(T_n)) = 0$ для деякої послідовності розбиттів (T_n) , для якої $\lambda(T_n) \rightarrow 0$, коли $n \rightarrow \infty$;
- 5) $I_* = I^* = I$.

2.1.10. Достатні умови R -інтегровності. Застосовуючи критерії R -інтегровності, можна дістати наступне твердження.

Теорема 7 (про достатні умови R -інтегровності). *Нехай функція f є обмеженою на відрізку $[a; b]$. Тоді ця функція є R -інтегрованою на $[a; b]$, якщо вона задовольняє принаймні одну з умов 1) – 5):*

- 1) f – монотонна на $[a; b]$;
- 2) f – неперервна на $[a; b]$;
- 3) f має на $[a; b]$ скінченну кількість точок розриву;
- 4) множина точок розриву функції f на $[a; b]$ є множиною з нульовою довжиною;
- 5) f є майже R -інтегрованою на $[a; b]$.

З теореми 7 випливає, що зміна значень функції f на множині E з нульовою довжиною (зокрема, на скінченній множині E) не впливає ані на R -інтегровність цієї функції, ані на величину її R -інтеграла.

2.1.11. Використання комп'ютерних засобів математики. За допомогою комп'ютера можна: 1) побудувати і обчислити інтегральні суми елементарної функції, 2) проілюструвати суть поняття визначеного інтеграла як границі інтегральних сум, 3) обчислити визначений інтеграл у символічному або чисельному вигляді, 4) проілюструвати геометричний зміст визначеного інтеграла.

2.1.11.1. Використання Gran1. За допомогою програми Gran1 можна чисельно обчислити визначений інтеграл (який фактично є NL -інтегралом) від елементарної функції на заданому відрізку і продемонструвати геометричний зміст інтеграла шляхом заштриховування фігури між графіком функції та віссю OX (див. підпункт 1.2.5.1).

2.1.11.2. Використання Maxima. Проілюструємо можливі застосування програми Maxima на прикладі розв'язування деяких типів задач.

Задача 1. Для заданої функції $f(x)$ і довільного заданого розбиття T відрізка $[a; b]$ обчислити інтегральну суму $S(T, X^*)$ з машинною точністю. За проміжні точки узяти ліві (праві) кінці відрізків розбиття.

□ Спершу задаємо функцію, наприклад, $f(x) = e^{-x^2}$.

(%i1) f(x):=exp(-x^2)\$

Розбиття T задаємо у вигляді упорядкованого списку. Зауважимо, що цим самим автоматично задається і відрізок $[a; b]$.

(%i2) T:[-2,-1.7,-1.3,-1,-0.5,0,0.25,0.5,0.8,1,1.2,1.6,1.8,2]\$

Підраховуємо, скільки елементарних відрізків у даному розбитті:

(%i3) N:length(T)-1\$

Складемо інтегральну суму $S(T, X^*) = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k$, узявши ліві кінці в якості проміжних точок. У комп'ютерному поданні $x_k = T[k]$ – це k -тий елемент списку T , причому нумерація повинна починатися від $k = 1$.

(%i4) S:sum(f(T[k])*(T[k+1]-T[k]),k,1,N)\$

Обчислюємо дану інтегральну суму S :

(%i5) float(S);

(%o5) 1.672013850279529

Для того щоб проміжними точками слугували праві кінці, у рядку (%i4) потрібно було б записати $f(T[k+1])$. ■

Проміжні точки можна теж задати довільно. Для цього після задання розбиття T потрібно задати ще один список X^* , до якого включити всі бажані проміжні точки. При цьому потрібно слідкувати, щоб проміжні точки належали відповідним відріzkам розбиття.

Задача 2. Для заданої функції $f(x)$ і заданого розбиття T обчислити верхню й нижню суми Дарбу $S^*(T)$ і $S_*(T)$.

□ Порівняно з попередньою, ця задача набагато складніша, тому що при її розв'язуванні потрібно шукати інфімуми та супремуми функції на відрізках розбиття.

У комплекті з Maxima включено пакет riemsum.mac, призначений для чисельного обчислення сум Дарбу функції $f(x)$, яка є раціональною функцією, зокрема многочленом. Після завантаження цього пакету стає доступною команда `upper_and_lower_sums(f(x),x,T)`, де T – розбиття відрізка $[a; b]$ у вигляді списку, не обов'язково упорядкованого. В якості результату при зверненні до цієї команди повертається список з трьох чисел: $[S^*(T), S_*(T), S^*(T) - S_*(T)]$.

Продемонструємо відшукування сум Дарбу за допомогою пакету riemsum на прикладі функції $f(x) := \frac{x^3 - 2x - 1}{x^2 + 4}$.

```
(%i1) load(riemsum)$
```

```
(%i2) f(x):=(x^3-2*x-1)/(x^2+4)$
```

Розбиття візьмемо з розв'язання попередньої задачі:

```
(%i3) T:[-2,-1.7,-1.3,-1,-0.5,0,0.25,0.5,0.8,1,1.2,1.6,1.8,2]$
```

Знайти суми Дарбу й різницю між ними для заданої функції і заданого розбиття можна за допомогою команди:

```
(%i4) upper_and_lower_sums(f(x),x,T);
```

Дістанемо відповідь:

```
(%o4) [-0.48156168761106, -1.10581480373927, 0.62425311612821]
```

Точність цих значень не більша за 10^{-7} , оскільки саме з такою точністю запрограмоване відшукування коренів многочленів у пакеті riemsum.mac.

Вручну вводити розбиття T досить незручно. Для випадку розбиття відрізка $[a; b]$ на n рівних частин у пакеті riemsum.mac є команда `make_partition(a,b,n)`, якою виконується таке розбиття і повертаються його точки у вигляді списку. Наприклад, продовжуючи відкриту сесію Maxima, утворимо розбиття відрізка $[-2; 2]$ на 50 частин:

```
(%i5) T:make_partition(-2,2,50)$
```

Обчислимо тепер суми Дарбу для цього розбиття:

```
(%i6) upper_and_lower_sums(f(x),x,T);
```

```
(%o6) [-0.70720147773207, -0.86352100977965, 0.15631953204758]
```

Помічаємо закономірність, що при подрібненні розбиття різниця між верхньою й нижньою сумами Дарбу все ближче наближається до нуля. Оскільки інтеграл Рімана міститься між сумами Дарбу, то за його наближене значення можна взяти середнє значення сум Дарбу:

```
(%i7) (%[1]+%[2])/2;
(%o7) -0.78536124375586
```

Отже, $\int_{-2}^2 \frac{x^3-2x-1}{x^2+4} dx \approx -0.78536$. Зауважимо, що точне значення цього інтеграла дорівнює $-\frac{\pi}{4} \approx -0.78539816339745$, а обчислення за допомогою `Gran1` дає число $I = -0.7854$. ■

Задача 3. Для заданої функції $f(x) \geq 0$ та заданого відрізка $[a; b]$ обчислити інтегральну суму, яка відповідає розбиттю відрізка на N рівних частин і конкретному способу вибору проміжних точок (наприклад, як середин елементарних відрізків). Проілюструвати геометричний зміст інтегральної суми.

□ Розглянемо розв'язання цієї задачі на двох прикладах. При цьому до першого прикладу наведемо детальні пояснення, а другий подамо у вигляді готового шаблону-розв'язання.

Приклад 1. $f(x) = \cos x$, $[a; b] = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}]$, $N = 20$.

Спочатку задамо функцію, відрізок і кількість точок розбиття.

```
(%i1) f(x):=cos(x)$ a:=%pi/2$ b:%pi/4$ N:20$
```

Визначимо послідовність розбиттів $T_n = \{x(k, n)\}$ і відповідну послідовність наборів $X_n^* = \{c(k, n)\}$ проміжних точок:

```
(%i2) x(k,n):=a+k*(b-a)/n$ c(k,n):=(x(k,n)+x(k+1,n))/2$
```

Визначимо послідовність інтегральних сум $S(n)$:

```
(%i3) S(n):=sum(f(c(k,n))*(b-a)/n,k,0,n-1)$
```

Знайдемо точне значення інтеграла:

```
(%i4) I:integrate(f(x),x,a,b)$
```

Виведемо на екран значення інтегральної суми при $n = N = 20$:

```
(%i5) print("S(",N,")=",float(S(N)))$
```

```
(%o5) S( 20 ) = 1.708094395922389
```

Для уявлення про ступінь наближення інтегральної суми до інтеграла виведемо ще й точне значення інтеграла.

```
(%i6) print("I=",I,"=",float(I))$
```

```
(%o6) I = 1/√2 + 1 = 1.707106781186548
```

Аналітичну частину завершено. Перейдемо до графічного зображення. Можливостей використання команди `plot2d` для побудови фігур із заповненням недостатньо. Тому скористаємося допоміжним пакетом `draw.lisp`, який служить інтерфейсом між `Maxima` і графічним редактором `gnuplot`. Перевагами цього пакету є зручне управління опціями зображень; можливість побудови графіків неявних функцій, багатокутни-

ків, прямокутників, еліпсів та векторів; зручна можливість заповнення фігур кольором.

Основною командою пакету draw для зображення плоских кривих і фігур є draw2d(параметри, фігури). Skorистаємося цією командою для зображення геометричного змісту інтегральної суми.

Задамо графічні об'єкти, які треба зобразити. Спочатку визначимо графік функції $f(x)$ на відрізку $[a - 0, 2; b + 0, 2]$ з товщиною лінії 2 тч:

```
(%i7) graph:[line_width=2,explicit(f(x),x,a-0.2,b+0.2)]$
```

Далі опишемо серію прямокутників, поставлених на відрізки розбиття:

```
(%i8) pp(n):=makelist(rectangle([x(k,n),0],[x(k+1,n),f(c(k,n))]),k,0,n-1)$
```

Визначимо параметри рисунка, а саме, в даному випадку, колір заповнення фігур (прямокутників pp(n)) і пропорційні осі, тобто однакові масштаби на осях.

```
(%i9) options:[fill_color=light-blue,proportional_axes=xy]$
```

Визначимо тепер весь малюнок як один об'єкт. Він описується списком, який складається з фігур та параметрів зображення.

```
(%i10) mal(n):=append(options,pp(n),graph)$
```

(За командою append декілька списків об'єднуються в один.)

Завантажимо пакет draw:

```
(%i11) load(draw)$
```

і виконаємо побудову зображення за командою draw2d, застосовану до об'єкта mal(n) при $n = N = 20$:

```
(%i12) apply(draw2d,mal(N))$
```

Після цього у вікні gnuplot з'явиться рисунок 2.1.2, яким ілюструється геометричний зміст інтегральної суми.

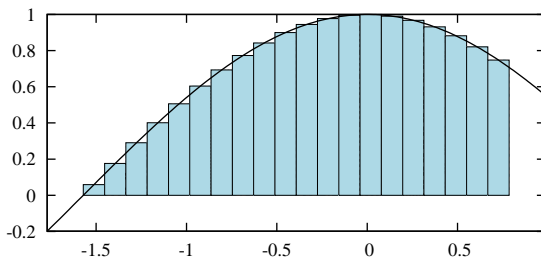



Рис. 2.1.2.

Приклад 2. $f(x) = x \cos x$, $[a; b] = [0; \frac{\pi}{2}]$, $N = 25$.

Розв'язання задачі 3 для прикладу 2 подамо у вигляді готового набору команд. Вони такі самі, як і в попередньому прикладі, тільки доповнені ширшим набором опцій регулювання вигляду зображення. Їх доцільно ввести всі разом через вікно введення багаторядкових команд, натиснувши кнопку  біля командного рядка. Попередньо можна перезапустити сесію Maxima.

```

f(x):=x*cos(x)$ a:0$ b:%pi/2$ N:25$
x(k,n):=a+k*(b-a)/n$ c(k,n):=(x(k,n)+x(k+1,n))/2$
S(n):=sum(f(c(k,n))*(b-a)/n,k,0,n-1)$
I:integrate(f(x),x,a,b)$
print("S(",N,")=",float(S(N)))$
print("I=",I,"=",float(I))$
pp(n):=makelist(
    rectangle([x(k,n),0],[x(k+1,n),f(c(k,n))]),k,0,n-1)$
graph:[line_width=2,key="x cos (x)",
explicit(f(x),x,a-0.1,b+0.1)]$
options:[title="",user_preamble=["set key right top"],
xtics=None, ytics=None,
label(["a",0.05,-0.05]), label(["b",b,-0.05]),
yrange=auto,
xrange=auto,
xaxis=true, yaxis=true,
axis_bottom=false, axis_top=false,
axis_right=false, axis_left=false,
xtics_axis=true, ytics_axis=true,
proportional_axes=xy, transparent=false,
fill_color=light-green, terminal=screen ]$
mal(n):=append(options,pp(n),graph)$
load(draw)$
apply(draw2d,mal(N))$

```

Після виконання цього набору команд на екрані з'являться числа

$$S(25) = 0.57121929242742$$

$$I = \frac{\pi}{2} - 1 = 0.5707963267949$$

Одночасно у вікні gnuplot виводиться потрібний рисунок 2.1.3.

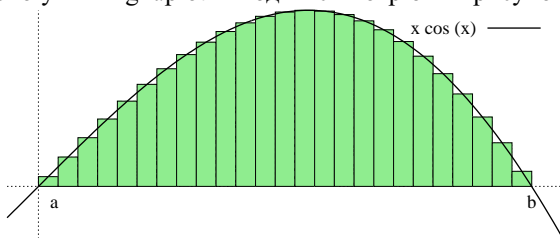


Рис. 2.1.3.

Доцільно зберегти цей набір команд у файл `geom_zmist_integr_sum.vwxm`. Потім його можна знову завантажити для подальшого використання. Зауважимо, що цей шаблон придатний для довільної функції $f(x)$, відрізка $[a; b]$ і кількості N точок розбиття. Достатньо у вікні виведення задати нові значення цих об'єктів і заново запустити даний набір команд на виконання, натиснувши `Ctrl+Enter`. ■

Задача 4. Обчислити визначений інтеграл заданої функції на заданому відрізку як границю певної послідовності інтегральних сум.

□ Послідовність (T_n) розбиттів відрізка $[a; b]$ природно отримується шляхом його поділу на n рівних частин. А природним способом вибору

проміжних точок є вибір лівих, правих чи середніх точок відрізків розбиття. Саме такі послідовності було побудовано при розв'язуванні задачі 3. Тому можна переписати звідти перші три рядки введення:

```
(%i1) f(x):=x^2$ a:-1$ b:2$
      x(k,n):=a+k*(b-a)/n$ c(k,n):=(x(k,n)+x(k+1,n))/2$
      S(n):=sum(f(c(k,n))*(b-a)/n,k,0,n-1)$
```

Тепер залишається знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} S(n)$. Але за командою `limit(S(n),n,inf)` неможливо обчислити границю такого складного об'єкта, як сума. Тому перш ніж обчислювати границю послідовності $S(n)$, потрібно цю послідовність спростити. Стандартною опцією у Maxima, за якою виконується спрощення сум, є опція `simpsum`, яку потрібно вводити через кому після суми.

Застосуємо опцію `simpsum` до розглядуваної суми $S(n)$, причому для одержання менш громіздкої відповіді поєднаємо її з опцією `ratsimp`:

```
(%i7) S(n),simpsum,ratsimp;
(%o7)  $\frac{12n^2-9}{4n^2}$ 
```

Після такого спрощення знаходження границі стає елементарним:

```
(%i8) limit(%n,inf);
(%o8) 3
```

Команди спрощення суми $S(n)$ та обчислення її границі можна об'єднати в одну команду:

```
(%i9) limit(ev(S(n),simpsum),n,inf);
(%o9) 3
```

Але при такому способі втрачається можливість побачити спрощений вираз суми. Так само за допомогою Maxima можна знайти границю інтегральної суми і у випадку, коли $f(x)$ є довільним многочленом.

Наприклад, знайдемо $\int_{-2}^3 (x^3 - x - 1) dx$ як границю інтегральної суми.

Для цього повернемося до команди (%i1), перезадамо в її першому рядку функцію і відрізок:

```
(%i1) f(x):=x^3-x-1$ a:-2$ b:3$
      x(k,n):=a+k*(b-a)/n$ c(k,n):=(x(k,n)+x(k+1,n))/2$
      S(n):=sum(f(c(k,n))*(b-a)/n,k,0,n-1)$
```

і виконаємо знову цю команду. У результаті буде визначено нову послідовність $S(n)$ інтегральних сум. Знайдемо її границю за командою

```
(%i16) limit(ev(S(n),simpsum),n,inf);
(%o16)  $\frac{35}{4}$ 
```

Можливості використання опції `simpsum`, по суті, вичерпуються спрощенням сум вигляду $\sum_k a^k$ і $\sum_{k=m}^n p(k)$, де $p(k)$ – многочлен відносно k .

На даний момент у комплекті з Maxima є додатковий пакет simplify_sum.mac, у якому є значно потужніша за опцію simpsum команда simplify_sum. За допомогою неї можна спрощувати суми, які містять факторіали (чи біноміальні коефіцієнти), а також суми вигляду

$$\sum_{k=m}^n p(k) \exp(ak), \quad \sum_{k=m}^n p(k) \cos(ak), \quad \sum_{k=m}^n p(k) \sin(ak),$$

де $p(k)$ – многочлен відносно k .

Наведемо кілька прикладів застосування команди simplify_sum.

(%i17) load(simplify_sum)\$

(%i18) sum(k*3^k,k,1,n);

(%o18) $\sum_{k=1}^n k 3^k$

(%i19) simplify_sum(%);

(%o19) $\frac{(2n-1)3^{n+1}}{4} + \frac{3}{4}$

(%i20) sum(k^2*4^k,k,1,n);

(%o20) $\sum_{k=1}^n k^2 4^k$

(%i21) simplify_sum(%);

(%o21) $\frac{(9n^2-6n+5)4^{n+1}}{27} - \frac{20}{27}$

(%i22) sum(k/(n+k)!,k,1,n);

(%o22) $\sum_{k=1}^n \frac{k!}{(n+k)!}$

(%i23) simplify_sum(%);

(%o23) $\frac{n+1}{(n-1)(n+1)!} - \frac{(n+1)!}{(n-1)(2n)!}$

(%i24) sum(cos(k*x),k,0,n);

(%o24) $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$

(%i25) simplify_sum(%);

(%o25) $\frac{e^{i(n+1)x-1} + e^{-i(n+1)x-1}}{2} - \frac{e^{ix-1} + e^{-ix-1}}{2}$

(%i26) trigrat(%);

(%o26) $\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

(%i27) sum(k*cos(k*x),k,1,n);

(%o27) $\sum_{k=1}^n k \cos(kx)$

(%i28) trigrat(simplify_sum(%));

(%o28) $\frac{n \cos((n+1)x) + (-n-1) \cos(nx) + 1}{2 \cos(x) - 2}$

На жаль, за допомогою команди simplify_sum не завжди можна розкласти суму на дві суми, щоб потім спростити кожну з них окремо. На-

приклад, сума $\sum_{k=0}^n k^2 + 5^k$ спрощується одразу, а сума $\sum_{k=1}^n k 2^k + k 3^k$ – ні.

Повернемося до задачі про обчислення границі послідовності інтегральних сум за допомогою системи Maxima. Наведемо ще кілька прикладів використання даної системи. При цьому розпочнемо новий сеанс роботи.

$$\int_0^1 2^x dx = ?$$

(%i1) f(x):=2^x\$ a:0\$ b:1\$

x(k,n):=a+k*(b-a)/n\$ c(k,n):=(x(k,n)+x(k+1,n))/2\$

S(n):=sum(f(c(k,n))*(b-a)/n,k,0,n-1)\$

(%i7) S(n),factor;

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^{\frac{k}{n} + \frac{1}{2n}}$$

(%o7) $\frac{\sum_{k=0}^{n-1} 2^{\frac{k}{n} + \frac{1}{2n}}}{n}$

(%i8) %,simpsum;

(%o8) $\frac{2^{\frac{1}{2n}}}{n(2^{\frac{1}{n}} - 1)}$

(%i9) limit(%o,n,inf);

(%o9) $\frac{1}{\log(2)}$

$$\int_{-\pi/4}^{3\pi/2} \cos x dx = ?$$

(%i1) f(x):=cos(x)\$ a:-%pi/4\$ b:3*%pi/2\$

x(k,n):=a+k*(b-a)/n\$ c(k,n):=(x(k,n)+x(k+1,n))/2\$

S(n):=sum(f(c(k,n))*(b-a)/n,k,0,n-1)\$

(%i16) S(n),factor;

$$7\pi \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi(2n-14k-7)}{8n}\right)$$

(%o16) $\frac{7\pi \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi(2n-14k-7)}{8n}\right)}{4n}$

(%i17) load(simplify_sum)\$

(%i18) simplify_sum(%o16),rectform,trigreduce;

(%o18) $\frac{7\sqrt{2}\pi \sin\left(\frac{7\pi}{8n}\right) - 7\pi \sin\left(\frac{7\pi}{8n}\right)}{\left(2^{\frac{5}{2}} \cos\left(\frac{7\pi}{4n}\right) - 2^{\frac{5}{2}}\right)n}$

(%i19) limit(%o,n,inf),expand;

(%o19) $\frac{1}{\sqrt{2}} - 1$

З розв'язування задачі 4 видно, що обчислення границь інтегральних сум тісно пов'язане з проблемою спрощення сум, яка є набагато складнішою, ніж обчислення визначених і невизначених інтегралів. ■

Задача 5. Продемонструвати у середовищі Maxima геометричний

зміст інтеграла Рімана функції $f(x)$, неперервної і невід'ємної на відрізку $[a; b]$.

□ Згідно з пунктом 2.1.6, якщо f – неперервна і невід'ємна функція на $[a; b]$, то інтеграл Рімана $\int_a^b f(x) dx$, як і NL -інтеграл, виражає собою площу криволінійної трапеції, тобто фігури, обмеженої графіком функції f , віссю OX і прямими $x = a$ та $x = b$.

Покажемо, як зобразити у програмі Махіма заповнену кольором криволінійну трапецію. Це робиться за допомогою пакету `draw`. Наприклад, для зображення криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $x \sin x$, $x \in [0; \pi]$, досить ввести набір команд

```
(%i1) load(draw)$
      draw2d(fill_color=magenta,
            filled_func=true,
            explicit(x*sin(x),x,0,%pi),
            line_width=5,
            filled_func=false,
            explicit(x*sin(x),x,0,%pi));
```

У результаті буде побудовано рисунок 2.1.4:

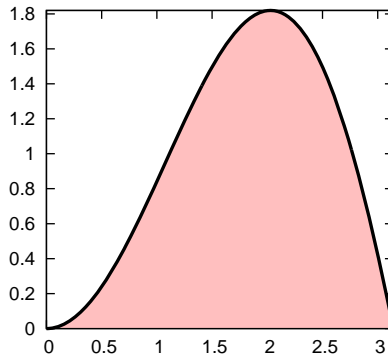


Рис. 2.1.4.

Існує ще багато налаштувань зображень, про які можна дізнатися у довідці системи Махіма. ■

2.1.12. Завдання для виконання за допомогою комп'ютера.

1. Зобразити криволінійну трапецію для заданої функції f і відповідні східчасті фігури Φ_* та Φ^* і проілюструвати зміну цих фігур при збільшенні кількості точок розбиття.
2. Для заданої функції обчислити її інтегральну суму і проілюструвати зміну цієї суми при зміні проміжних точок.

3. Для заданої функції обчислити її верхню і нижню суми Дарбу і проілюструвати зміну цих сум при зменшенні дрібності розбиття.

2.2. Основні властивості R -інтеграла

2.2.1. R -інтегровність сталої функції, лінійність та монотонність R -інтеграла. Розглянемо спочатку властивості визначеного інтеграла (R -інтеграла), які досить легко випливають з його означення. Деякі з них нагадують відповідні властивості NL -інтеграла, що природно внаслідок теореми 2 пункту 2.1.5.

Властивість 1 (про R -інтеграл сталої функції). Якщо $f(x) = c \forall x \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x) dx = c(b - a)$. Зокрема, $\int_a^b 0 dx = 0$, а $\int_a^b 1 dx = b - a$.

Властивість 2 (про лінійність R -інтеграла). Якщо $f \in R[a; b]$ і $\varphi \in R[a; b]$, то для будь-яких чисел α і β функція $\alpha f + \beta \varphi \in R[a; b]$ і має місце рівність $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta \varphi(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b \varphi(x) dx$.

Властивість 3 (про монотонність R -інтеграла). Якщо $f \in R[a; b]$ і $\varphi \in R[a; b]$, причому $f(x) \geq \varphi(x) \forall x \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b \varphi(x) dx$.

Зокрема, якщо $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$, коли $f \in R[a; b]$.

2.2.2. R -інтегровність модуля функції та добутку функцій. Доведення наступних властивостей вимагають використання не тільки означення R -інтеграла, але й деяких інших тверджень, зокрема критеріїв R -інтегровності.

Властивість 4 (про R -інтегровність $|f|$). Якщо функція $f \in R[a; b]$, то $|f| \in R[a; b]$ і правильна нерівність $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Властивість 5 (про R -інтегровність добутку функцій). Якщо функції f та $\varphi \in R[a; b]$, то $f\varphi \in R[a; b]$ і має місце нерівність

$$\int_a^b |f(x)\varphi(x)| dx \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b \varphi^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Зокрема, якщо $\varphi(x) = 1 \forall x \in [a; b]$, то

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq (b - a)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2.2.3. Теорема про середнє. Розглянемо ще одну властивість, пов'язану з R -інтегралом від добутку двох функцій.

Властивість 6 (теорема про середнє). Нехай $f \in R[a; b]$ і $g \in R[a; b]$, $g(x) \geq 0$ і $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a; b]$. Тоді якщо $\int_a^b g(x) dx > 0$, то $\exists m^* \in [m; M]$:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = m^* \int_a^b g(x) dx.$$

Зокрема, якщо функція f є неперервною на $[a; b]$, то $\exists x^* \in [a; b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(x^*) \int_a^b g(x) dx.$$

Якщо, крім того, $g(x) = 1 \forall x \in [a; b]$, то

$$f(x^*) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Теорема про середнє має простий геометричний зміст: площа криволінійної трапеції $\Phi = \{(x; y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ дорівнює площі прямокутника P , основою якого є відрізок $[a; b]$, а висота дорівнює $f(x^*)$, тобто $P = \{(x; y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x^*)\}$ і $S(P) = \int_a^b f(x) dx = f(x^*)(b-a)$ (рис. 2.2.1).

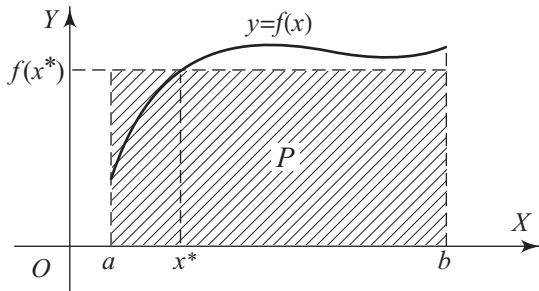


Рис. 2.2.1.

2.2.4. Адитивність R -інтеграла.

Властивість 7 (адитивність R -інтеграла). Нехай c – довільна фіксована точка з інтервалу $(a; b)$. Тоді для того, щоб $f \in R[a; b]$, необхідно й досить, щоб $f \in R[a; c]$ і $f \in R[c; b]$. При цьому

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Адитивну властивість R -інтеграла можна дещо узагальнити. Для цього

ГО ВВЕДЕМО ДВА ОЗНАЧЕННЯ:

$$\int_a^a f(x) dx := 0 \quad \text{і} \quad \int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx, \quad \text{коли } b < a.$$

Тепер легко довести наступну властивість.

Властивість 7* (узагальнена адитивність R -інтеграла). *Якщо $f \in R[a; b]$, то для будь-яких точок α , β і γ з відрізка $[a; b]$ має місце рівність*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx. \quad (1)$$

При цьому

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx \right| \leq H|\beta - \alpha|,$$

де $H = \sup_{[a; b]} |f(x)|$.

За методом математичної індукції рівність (1) можна узагальнити на випадок довільної кількості точок $x_k \in [a; b]$, $k \in \overline{0, m}$:

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x) dx = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx.$$

2.2.5. Інтеграл із змінною межею інтегрування. Розглянемо функцію f , R -інтегровну на відрізку $[a; b]$. Зафіксуємо точку $c \in [a; b]$. Тоді за властивістю узагальненої адитивності R -інтеграла $\forall x \in [a; b]$ існують інтеграли (які є функціями від x)

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt \quad \text{і} \quad \Phi(x) = \int_x^c f(t) dt.$$

При цьому функції F та Φ називають відповідно *інтегралами з верхньою та нижньою змінними межами інтегрування*.

Властивість 8 (про інтеграл із змінною верхньою межею). *Нехай $f \in R[a; b]$, $c \in [a; b]$ і $F(x) = \int_c^x f(t) dt \quad \forall x \in [a; b]$. Тоді функція F :*

- 1) задовольняє умову Ліпіца на $[a; b]$;
- 2) є функцією обмеженої варіації на $[a; b]$;
- 3) є неперервною на $[a; b]$;
- 4) диференційовна в кожній точці $x_0 \in [a; b]$, в якій функція f є неперервною, і при цьому $F'(x_0) = f(x_0)$. Зокрема, якщо f неперервна

на всьому відрізьку $[a; b]$, то

$$\left(\int_c^x f(t) dt \right)' = f(x) \quad \forall x \in [a; b].$$

З властивості 8 зокрема впливає твердження про те, що коли f є неперервною функцією на проміжку $\langle a; b \rangle$, то вона має первісну на цьому проміжку, причому однією з первісних функцій f на $\langle a; b \rangle$ є функція $F(x) = \int_c^x f(t) dt$, де c – фіксована, а x – біжуча точка з $\langle a; b \rangle$.

2.2.6. Формули заміни змінної та інтегрування частинами для R -інтеграла. Нехай функція f неперервна на проміжку $\langle A; B \rangle$, а функція φ має на відрізьку $[\alpha; \beta]$ R -інтегровну похідну φ' , причому $\varphi(t) \in \langle A; B \rangle \forall t \in [\alpha; \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$ і $\varphi(\beta) = b$. Тоді для визначеного інтеграла (R -інтеграла) $\int_a^b f(x) dx$ має місце формула заміни змінної:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a=\varphi(\alpha)}^{b=\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Ця формула є правильною і тоді, коли $f \in R[a; b]$ (і не обов'язково є неперервною на $[a; b]$), але при цьому похідна φ' неперервна і невід'ємна (неодатна) на $[\alpha; \beta]$.

Нехай функції u і v диференційовні на $[a; b]$, причому $u'v$ і uv' є R -інтегровними функціями на $[a; b]$. Тоді функція $(uv)' = u'v + uv'$ є R -інтегровною і правильна формула інтегрування частинами для R -інтеграла:

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx.$$

Приклад. Розглянемо інтеграл $I = \int_0^a (a^2 - x^2)^n dx$. Використовуючи формулу заміни змінної, матимемо:

$$I = \left| \begin{array}{l} x = a \sin t \Rightarrow dx = a \cos t dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - a^2 \sin^2 t)^n a \cos t dt = a^{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt.$$

Обчислимо окремо інтеграл $I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t dt \quad \forall m \in \mathbb{N}$. Застосуємо до

нього формулу інтегрування частинами:

$$\begin{aligned}
 I_m &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1} t \cos t \, dt = \\
 &= \left| \begin{array}{l} u = \cos^{m-1} t, \quad du = (m-1) \cos^{m-2} t \sin t \, dt \\ dv = \cos t \, dt, \quad v = \sin t \end{array} \right| = \\
 &= \cos^{m-1} t \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (m-1) \cos^{m-2} t \sin^2 t \, dt = \\
 &= (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-2} t (1 - \cos^2 t) \, dt = \\
 &= -(m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t + (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-2} t \, dt = \\
 &= -(m-1)I_m + (m-1)I_{m-2}.
 \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
 I_m &= -(m-1)I_m + (m-1)I_{m-2} \Rightarrow \\
 mI_m &= (m-1)I_{m-2} \Rightarrow I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}.
 \end{aligned}$$

Тому

$$I_m = \begin{cases} \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0, & \text{коли } m = 2k, \\ \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1, & \text{коли } m = 2k+1. \end{cases}$$

Оскільки $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dt = \frac{\pi}{2}$, а $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$, то

$$I_m = \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{коли } m = 2k, \\ \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & \text{коли } m = 2k+1. \end{cases}$$

Аналогічно можна обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m t \, dt$.

Повертаючись до інтеграла $I = \int_0^a (a^2 - x^2)^n \, dx$, дістаємо

$$I = a^{2n+1} \int_0^{2\pi} \cos^{2n+1} t \, dt = a^{2n+1} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

2.2.7. Використання комп'ютерних засобів математики. У даній темі СКМ можна використати для ілюстрування основних властивостей інтеграла Рімана, а також для обчислення визначених інтегралів за методами заміни змінної та інтегрування частинами.

2.2.7.1. Використання Gran1. Програму Gran1 можна використати для ілюстрування основних властивостей інтеграла Рімана. Розглянемо приклади розв'язування задач такого типу.

1. Дано фігури $\Phi_1 = \{(x, y): x \in [-1; 2], 0 \leq y \leq 2^{-|x|}\}$ і $\Phi_2 = \{(x, y): x \in [-1; 2], 0 \leq y \leq 3 \cdot 2^{-|x|}\}$. Потрібно зобразити ці фігури на одному рисунку, знайти площі S_1 та S_2 цих фігур і відношення $S_2 : S_1$.

Спочатку задаємо функції та будемо їхні графіки (рис. 2.2.2).

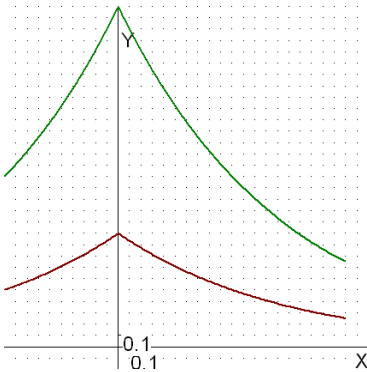


Рис. 2.2.2.

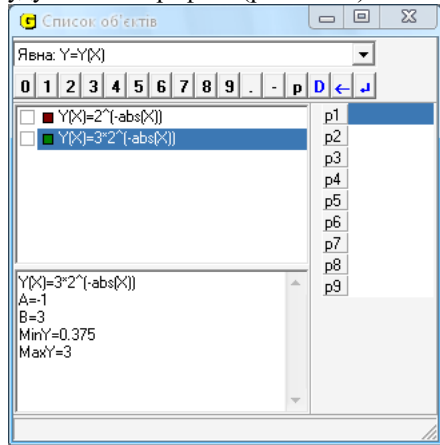


Рис. 2.2.3.

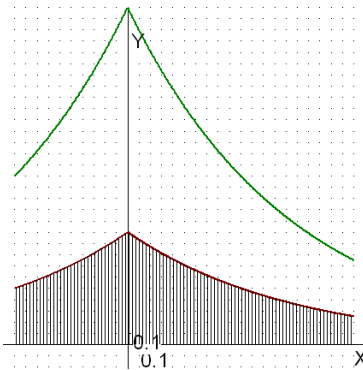


Рис. 2.2.4.

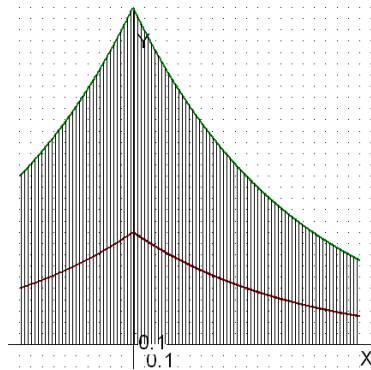


Рис. 2.2.5.

Далі у вікні “Список об’єктів” (рис. 2.2.3) ставимо мітки проти першої, а потім проти другої функції та обчислюємо їх інтеграли із занесенням до відповідей. У результаті буде заштриховано фігури Φ_1 (рис. 2.2.4) і Φ_2 (рис. 2.2.5) та обчислено їх площі (рис. 2.2.6).

Після цього за допомогою калькулятора ділимо другий інтеграл на перший і цим самим знаходимо відношення площ $S_2 : S_1 = 5.95112/1.98371 = 2.99999$. Робимо висновок, що при розтягненні фігури у 3 рази її площа теж збільшується утричі. Похибка в 10^{-6} пов’язана з тим, що при обчисленнях за допомогою комп’ютера використовуються не точні дійсні числа, а їх десяткові наближення.

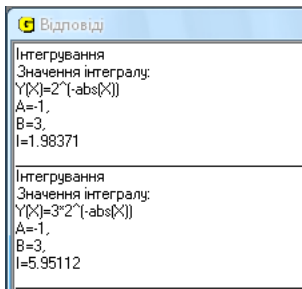


Рис. 2.2.6.

2. Дано фігури $\Phi_1 = \{(x, y): x \in [0; \pi], 0 \leq y \leq \sin x\}$ та $\Phi_2 = \{(x, y): x \in [0; \pi], 0 \leq y \leq x^2\}$. Зобразити ці фігури і знайти площі S_1 та S_2 цих фігур, а також зобразити фігуру, яка має площу $S_1 + S_2$.

За лінійною властивістю інтеграла фігура з площею $S_1 + S_2$ може лежати під графіком функції $\sin x + x^2$, $x \in [0; \pi]$. Тому спочатку можна просто ввести 3 функції і побудувати їх графіки, а потім, відмічаючи мітками кожну з цих функцій окремо, обчислити їх інтеграли. При цьому автоматично будуть штрихуватися відповідні фігури (рис. 2.2.7).

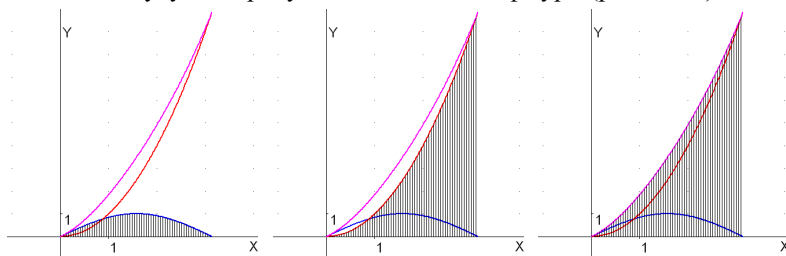


Рис. 2.2.7.

При цьому можна ще й проаналізувати відповіді на предмет того, чи дорівнює площа третьої фігури сумі двох перших.

3. Дано фігури $\Phi_1 = \{(x, y): x \in [-1; 1], 0 \leq y \leq x^2\}$ та $\Phi_2 = \{(x, y): x \in [1; 2], 0 \leq y \leq 2 - x\}$. Зобразити ці фігури і знайти їх площі S_1 та S_2 , а також зобразити фігуру, яка має площу $S_1 + S_2$.

Оскільки в умові задано функції на різних відрізках (які мають спільну точку дотику), то за адитивною властивістю інтеграла фігура з площею $S_1 + S_2$ може лежати під графіками обох функцій.

Тому спочатку задамо дві потрібні функції і побудуємо їх графіки,

а потім по черзі обчислимо інтеграли від кожної з цих функцій окремо та від обох одночасно (рис. 2.2.8). Цим якраз і буде проілюстровано адитивну властивість інтеграла.

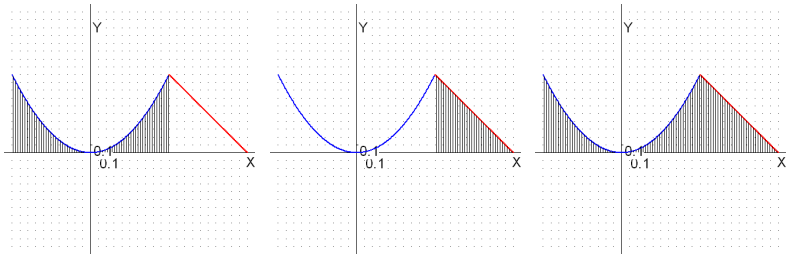


Рис. 2.2.8.

За відповідями переконуємося, що обчислено площі саме заштрихованих фігур.

Аналогічно за допомогою програми *Gran1* зручно ілюструвати і такі властивості інтеграла, як монотонність, інтеграл від модуля, від парної (непарної) чи періодичної функції.

2.2.7.2. Використання Maxima. У програмі *Maxima* є вбудована команда `changevar(I,x=g(t),t,x)`, використання якої дозволяє зробити заміну $x = g(t)$ в інтегралі $I = \int_a^b f(x) dx$, попередньо заданому за командою `I:integrate (f(x), x,a,b)`. При цьому спочатку на екран буде виведено новий інтеграл за новою змінною та з новими межами інтегрування, а потім його можна буде обчислити за командою `ouns`. Як і при невизначеному інтегруванні, цю формулу доцільно застосовувати, коли потрібно перевірити ефективність різних підстановок, а також тоді, коли за допомогою *Maxima* знайти інтеграл безпосередньо не вдається.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Обчислити задані інтеграли за допомогою вказаних підстановок: 1) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$, $\sqrt{x} = t$; 2) $\int_0^a \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$, $\frac{a+x}{a-x} = t^2$; 3) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$, $e^x - 1 = t^2$; 4) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2 \cos x}$, $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

□ Введемо перший інтеграл:

```
(%i1) 'integrate(1/(sqrt(x)+1),x,0,4);
```

```
(%o1)  $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1} dx$ 
```

```
(%i2) changevar(%o23,sqrt(x)=t,t,x);
```

На запит, що з'являється,

```
Is t positive, negative, or zero?
```

дамо відповідь p , тобто $t > 0$. В результаті дістаємо

$$(\%o2) \ 2 \int_0^2 \frac{t}{t+1} dt$$

Обчислюємо одержаний інтеграл за командою

(%i3) %,nouns;

(%o3) 2 (2 - log(3))

Зауважимо, що інтеграл (%o1) за командою `integrate` обчислити не вдається.

Переходимо до другого інтеграла.

(%i4) 'integrate(sqrt((a+x)/(a-x)),x,0,a/2);

$$(\%o4) \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{x+a}{a-x}} dx$$

(%i5) changevar(%o2,(a+x)/(a-x)=t^2,t,x);

$$(\%o5) \ -4a \int_{-\sqrt{3}}^{-1} \frac{t|t|}{t^4+2t^2+1} dt$$

Для подальшого обчислення цього інтеграла потрібно спростити підінтегральну функцію, розкривши модуль. Модуль буде розкрито, якщо зробити припущення про знак t . У даному випадку, аналізуючи межі інтегрування, робимо припущення

(%i6) assume(t<0);

(%o6) [t < 0]

Виведемо інтеграл (%o5) на екран ще раз, тепер уже в спрощеному вигляді:

(%i7) %o5,simp;

$$(\%o7) \ 4a \int_{-\sqrt{3}}^{-1} \frac{t^2}{t^4+2t^2+1} dt$$

(%i8) %,nouns;

$$(\%o8) \ 4 \left(\frac{4\pi-3^{\frac{3}{2}}}{24} - \frac{\pi-2}{8} \right) a$$

Така сама відповідь отримується і при безпосередньому обчисленні інтеграла (%o4) за командою `integrate`.

Перейдемо до третього інтеграла, вилучивши попередньо припущення $t < 0$:

(%i9) forget(t<0)\$

(%i10) 'integrate(sqrt(%e^x-1),x,0,log(2));

$$(\%o10) \int_0^{\log(2)} \sqrt{e^x - 1} dx$$

(%i11) changevar(%,%e^x-1=t^2,t,x);

$$(\%o11) \ -2 \int_{-1}^0 \frac{t|t|}{t^2+1} dt$$

(%i12) assume(t<0)\$

(%i13) %o11,simp;

$$2 \int_{-1}^0 \frac{t^2}{t^2+1} dt$$

(%i14) %,nouns;

$$-\frac{\pi-4}{2}$$

Цю відповідь можна перевірити і за допомогою команди integrate, застосованої до інтеграла (%o10).

Вилучимо всі факти про змінну t з оперативної пам'яті за командою (%i15) kill(t)\$

Нарешті, обчислимо четвертий інтеграл, застосовуючи універсальну тригонометричну підстановку:

(%i16) 'integrate(1/(3+2*cos(x)),x,0,%pi/2);

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 \cos(x)+3} dx$$

(%i17) changevar(%tan(x/2)=t,t,x);

$$2 \int_0^1 \frac{1}{(2t^2+2) \cos(2 \operatorname{atan}(t))+3t^2+3} dt$$

(%i18) %,trigexpand,ratsimp;

$$2 \int_0^1 \frac{1}{t^2+5} dt$$

(%i19) %,nouns;

$$\frac{2 \operatorname{atan}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{5}}$$

Зробимо перевірку:

(%i20) %o16,nouns;

$$\frac{2 \operatorname{atan}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{5}}$$

Приклад 1 розв'язано повністю. ■

Приклад 2. Обчислити задані інтеграли за допомогою вказаних підстановок і проілюструвати ці підстановки графічно: 1) $\int_1^2 x^2 dx$, $x^2 = t$;
2) $\int_1^2 x^3 dx$, $x^3 = t$; 3) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$, $4-x^2 = (tx-2)^2$; 4) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$,
 $x = 2 \sin t$.

□ Заміну змінної будемо виконувати, як і в попередньому прикладі, але крім цього зображатимемо графіки функцій, що задаються вказаними підстановками.

(%i1) I1:'integrate(x^2,x,1,2)\$

(%i2) changevar(I1,x^2=t,t,x);

$$(\%o2) \frac{\int^4 \sqrt{t} dt}{2}$$

Очевидно, ця відповідь неправильна, оскільки початковий інтеграл був невід'ємним, а отримали інтеграл від'ємний. Розглянемо графічне зображення зробленої підстановки (рис. 2.2.9).

```
(%i3) load(draw)$
(%i4) draw2d(xaxis=true,yaxis=true,
  xlabel="Ot",ylabel="Ox",
  xaxis_width=2,yaxis_width=2,
  line_width=4,color=blue,
  proportional_axes=xy,
  xtics=1,ytics=1,
  implicit(x^2=t,t,0,4,x,-2,2));
```

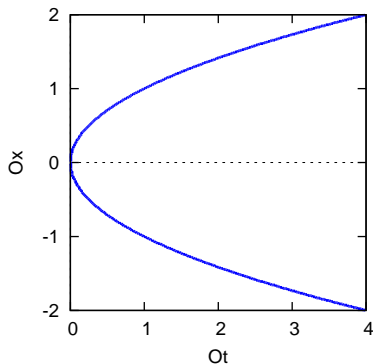


Рис. 2.2.9.

Рівнянням $x^2 = t$ задаються дві функції $x(t)$, а саме $x = -\sqrt{t}$ і $x = \sqrt{t}$ (нижня й верхня гілки параболи). При переході до нової змінної необхідно вибрати якусь одну з цих функцій. За програмою автоматично вибирається нижня гілка, бо вона є першим розв'язком при виконанні команди `solve(x^2=t,x)`. А нові межі знаходяться простою підстановкою старих меж у функцію $t = x^2$.

Перейдемо до інтеграла 2).

```
(%i5) I2:=integrate(x^3,x,1,2)$
```

```
(%i6) changevar(I2,x^3=t,t,x);
```

$$(\%o6) \frac{(\sqrt{3}i-1) \int_1^8 t^{\frac{1}{3}} dt}{6}$$

Цей результат неправильний, тому що він є уявним комплексним числом. Подивимось на графіку (рис. 2.2.10), чи обгрунтовано була підстановка $x^3 = t$ для даного інтеграла.

```
(%i7) draw2d(xaxis=true,yaxis=true,xlabel="Ot",ylabel="Ox",xtics=1,
  ytics=1,xaxis_width=2,yaxis_width=2,proportional_axes=xy,
  line_width=4,color=blue,implicit(x^3=t,t,-8,8,x,-2,2));
```

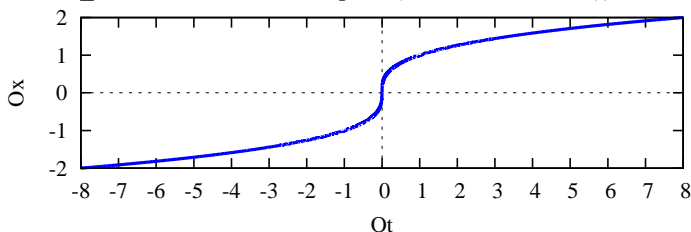


Рис. 2.2.10.

З геометричної точки зору все виглядає бездоганно. Для лінії $t = x^3$ є рівносильне задання $x = t^{1/3}$, причому для відрізка $[1; 2]$ на осі Ox очевидно існує відрізок на осі Ot , який відображається на нього. Проте потрібно ще з'ясувати, як відшукується функція $x = x(t)$ з рівності $x^3 = t$. Швидше за все, знову береться перший розв'язок, одержаний за допомогою команди:

```
(%i8) solve(x^3=t,x);
```

```
(%o8) [x = (sqrt(3)i-1)t^(1/3), x = -(sqrt(3)i+1)t^(1/3), x = t^(1/3)]
```

Справді, бачимо, що першими йдуть уявні розв'язки, а потрібний дійсний розв'язок розташований останнім. Таким чином, при застосуванні команди *changevar* завжди можуть виникати помилки, коли рівняння $G(t, x) = 0$, через яке задається підстановка, має комплексні розв'язки відносно x (що можна перевірити за командою $\text{solve}(G(t,x),x)$).

Так, якщо для обчислення інтеграла 1) замість підстановки $x^2 = t$ зробити підстановку $x = \sqrt{t}$, то дістанемо цілком коректне розв'язання:

```
(%i9) changevar(11,x=sqrt(t),t,x);
```

```
Is x positive, negative, or zero? p;
```

```
integrate(sqrt(t),t)
```

```
(%o9) 1/2
```

Аналогічно, коректне обчислення інтеграла 2) здійснюється при підстановці $x = t^{1/3}$.

Далі розглянемо інтеграл 3) і виконаємо для нього запропоновану другу підстановку Ейлера.

```
(%i10) I3:=integrate(sqrt(4-x^2),x,0,1)$
```

```
(%i11) changevar(I3,4-x^2=(t*x-2)^2,t,x);
```

```
(%o11) -integrate(8*t^4-16*t^2+8,t^(2-1/3),0,3)
```

Обчислимо тепер початковий інтеграл і поряд з ним новий інтеграл:

```
(%i12) [ev(I3,nouns),ev(%o11,nouns)];
```

```
(%o12) [2*pi+3*sqrt(3)/6, 8*atan(sqrt(3)-2)-sqrt(3)]
```

Щоб з'ясувати, наскільки відрізняються обидві відповіді, переобчислимо їх ще раз, вже чисельно:

```
(%i13) %o12, numer;
```

```
(%o13) [1.913222954981036, -1.913222954981037]
```

Нарешті з'ясується, що новий інтеграл відрізняється від початкового знаком. Побудуємо графік застосованої тут підстановки (рис. 2.2.11).

```
(%i14) draw2d(xaxis=true,yaxis=true,xlabel="Ot",ylabel="Ox",
xaxis_width=2,yaxis_width=2,line_width=4,color=blue,
proportional_axes=xy,xtics=2,ytics=1,
implicit(4-x^2=(t*x-2)^2,t,-6,6,x,-3,3));
```

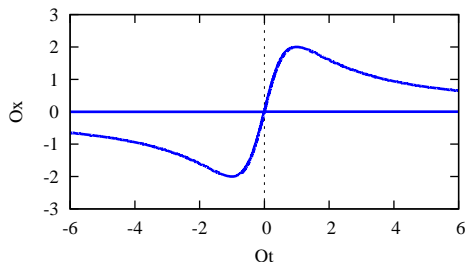



Рис. 2.2.11.

Дослідимо, яка функція $x(t)$ могла бути використана в якості розв’язку рівняння $4 - x^2 = (tx - 2)^2$:

```
(%i15) solve(4-x^2=(t*x-2)^2,x);
```

```
(%o15) [x =  $\frac{4t}{t^2+1}$ , x = 0]
```

Отже, за програмою знаходяться два розв’язки (що відповідає геометричній ілюстрації), причому для переходу до нової змінної за командою `changevar` може бути вибрана тільки функція $x(t) = \frac{4t}{t^2+1}$, і це правильний вибір. Неважко перевірити шляхом підстановки, що й нові межі знайдені правильно. Чому ж тоді в кінцевому результаті неправильний знак?

Звернемо увагу, що за командою заміни змінної повертається результат у вигляді спрощеного інтеграла. У заданому інтегралі 3) був наявний корінь квадратний, а у відповідному йому інтегралі (%o11) ніяких радикалів уже немає. Це наводить на думку, що неправильний знак може виникати при спрощенні радикалів. Підставимо “вручну” вираз $\frac{4t}{t^2+1}$ в підінтегральну функцію $\sqrt{4 - x^2}$ і проаналізуємо, як за допомогою Maxima буде спрощено отриманий вираз.

```
(%i16) sqrt(4-x^2),x=(4*t)/(t^2+1);
```

```
(%o16)  $\sqrt{4 - \frac{16t^2}{(t^2+1)^2}}$ 
```

Серед основних команд спрощування (`ratsimp`, `factor`, `radcan`) розкрити корінь можна тільки за останньою командою. Тому застосуємо її для спрощення розглядуваного виразу:

```
(%i17) radcan(%o16);
```

```
(%o17)  $\frac{2t^2-2}{t^2+1}$ 
```

Легко бачити, що в заданих межах інтегрування, тобто при $t \in [0; 2 - \sqrt{3}]$, вираз (%o17) від’ємний, і він непридатний для подання виразу (%o16). Це і є причиною помилкового знаку в інтегралі (%o11).

Отже, при спрощенні виразів потрібно обережно користуватися командою `radcan`. А якщо робиться заміна змінної у визначеному інтегралі за командою `changevar` і при цьому зникають знаки коренів, то дуже вірогідно, що може виникнути помилка. На результат, що отримується за

командою `changevar`, користувачеві вплинути практично неможливо.

Перейдемо до розв'язування пункту 4) прикладу 2. Оскільки інтеграл I3 вже задано, то одразу зробимо в ньому тригонометричну заміну:

```
(%i18) changevar(I3,x=2*sin(t),t,x);
solve: using arc-trig functions to get a solution.
Some solutions will be lost.
```

$$(\%o18) 4i \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(t) \sqrt{\sin(t) - 1} \sqrt{\sin(t) + 1} dt$$

Зобразимо графічну ілюстрацію даної підстановки (рис. 2.2.12).

```
(%i19) draw2d(xaxis=true,yaxis=true,xlabel="Ot",ylabel="Ox",
xaxis_width=2,yaxis_width=2,line_width=4,color=blue,
proportional_axes=xy,xtics=2,ytics=1, explicit(2*sin(t),t,-6,6));
```

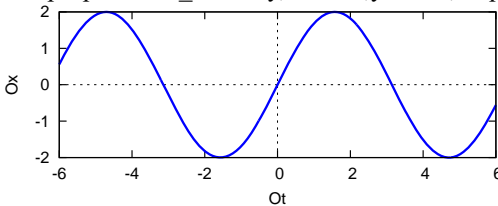


Рис. 2.2.12.

З рис. 2.2.12 видно, що дана підстановка придатна для переходу до нової змінної, тільки потрібно правильно вибрати нові межі. Скоріш за все, за командою `changevar` спочатку відшукується обернена функція $t(x)$ до заданої функції $x(t)$, а потім визначаються нові межі, як значення функції $t(x)$ при відповідних попередніх межах. При відшуванні оберненої функції якраз і виникала неоднозначна ситуація, про яку говорилося в супровідному повідомленні. Неважно пересвідчитися, що межі в новому інтегралі вибрані правильно. А от підінтегральна функція за формою не виглядає прийнятно, бо містить уявний множник i та від'ємний вираз $\sin t - 1$ під знаком одного з коренів. Перевіримо, чи дорівнює вираз $(\%o18)$ шуканому інтегралу. Спростимо його, а потім обчислимо:

```
(%i20) rootscontract(%o18);
(%o20) 4i \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(t) \sqrt{\sin(t)^2 - 1} dt
(%i21) trigsimp(%);
(%o21) -4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(t) |\cos(t)| dt
```

Далі треба вказати, який знак виразу під знаком модуля. Оскільки відрізок інтегрування $[0; \pi/6]$ лежить у першій чверті, то задаємо припущення

```
(%i22) assume(cos(t)>0)$
(%i23) %o21,simp;
```

$$(\%o23) -4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(t)^2 dt$$

Обчислимо тепер початковий інтеграл 4) і поряд його значення після заміни змінної:

$$(\%i24) [ev(I3,nouns),ev(\%o23,nouns)];$$

$$(\%o24) \left[\frac{2\pi+3^{\frac{3}{2}}}{6}, -\frac{2\pi+3^{\frac{3}{2}}}{6} \right]$$

Отже, при заміні змінної в інтегралі поставлено неправильний знак мінус. Виокремимо чіткіше причину цієї помилки. До проведення усіляких спрощень інтеграл (%o18) повинен був мати вигляд

$$(\%i25) \text{'integrate(sqrt(4-4*\sin(t)^2)*2*\cos(t),t,0,\%pi/6);}$$

$$(\%o25) 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(t) \sqrt{4-4\sin(t)^2} dt$$

Оскільки в інтегралі (%o18) один корінь розпався на два, то швидше за все за алгоритмом команди `changevar` до підінтегральної функції було застосовано команду `radcan`. Справді,

$$(\%i26) \text{radcan}(\%o25);$$

$$(\%o26) 4i \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(t) \sqrt{\sin(t)-1} \sqrt{\sin(t)+1} dt$$

Маємо підтвердження результату (%o18), що є опосередкованим підтвердженням застосування команди `radcan` в алгоритмі команди `changevar`, а в даному випадку її застосування було недоцільне. Щоб повернутися до початкового вигляду інтеграла, тобто до (%o25), необхідно виконувати обернену операцію `rootscontract`, за якою групуються корені. При цьому якщо уявний множник i стоїть безпосередньо біля кореня, то він вноситься під корінь. А якщо цей множник винесений за знак інтеграла, то такого внесення не відбувається. Порівняємо результат (%o20) застосування `rootscontract` до інтеграла (%o18) (де i так і залишилося за знаком інтеграла) і окремо до його підінтегральної функції:

$$(\%i26) 4*\%i*\cos(t)*\sqrt{\sin(t)-1}*\sqrt{\sin(t)+1};$$

$$(\%o26) 4i \cos(t) \sqrt{\sin(t)-1} \sqrt{\sin(t)+1}$$

$$(\%i27) \text{rootscontract}(\%);$$

$$(\%o27) 4 \cos(t) \sqrt{1-\sin(t)^2}$$

Отже, при обчисленні інтеграла 4) з прикладу 2 було виявлено *недоречності в алгоритмі процедури `changevar`, пов'язані з наслідками застосування в ній команди `radcan`, автоматично усунути які за певною командою в Maxima неможливо.* ■

Для усунення виявлених недоліків у вбудованій у Maxima команді заміни змінної `changevar`, а також для отримання більшого контролю над процесом заміни змінної визначимо нову команду `chv(expr,G,t,x)`. За своїм призначенням вона еквівалентна команді `changevar(expr,G,t,x)`, тільки

будується на іншому алгоритмі. При визначенні цієї команди використовуються оператори програмування та деякі нові функції системи Maxima, про які раніше не згадувалось, але їх опис можна знайти в довідці Maxima. Доцільно зберегти означення команди chv у файлі

```

Maxima-5.25.1\share\maxima\5.25.1\share\integration\changevar1.mac,
після чого вона стане доступною через load(changevar1).
chv(expr,G,t,x):=(block([f,g,h,a,b,a1,b1,G1,G2,n1,n2,i0,
                        gpr,ghpr,apr,bpr],
if string(part(expr,0))="integrate" and part(expr,2)=x
then (f:part(expr,1),
     if length(expr)=2
     then (G1:sort(solve(G,x)),n1:length(G1),i0:0,
          for i:1 step 1 while (i<=n1 and is
            (scalarp(part(G1[i],2)))) do i0:i0+1,
          if i0<n1
          then (for i:i0+1 step 1
                while (i<=n1 and is (part(G1[i],1)#x or
                  not(freeof(x,part(G1[i],2))))))
                do i0:i0+1,
                if i0<n1
                then (g:part(G1[i0+1],2),
                     if freeof (%i,g)
                     then 'integrate(subst(g,x,f)*diff(g,t),t)
                     else (print("-- Function",x,"(",t,")","="),
                          g,"is complex!.."),expr)
                     else (print("-- It is impossible to express",
                          x,"(",t,")"),expr)
                     else (print("-- All solutions",x,"(",t,")",
                          "are constant!.."),expr)
                else (a:part(expr,3),b:part(expr,4),G1:sort(solve(G,x)),
                     n1:length(G1),G2:sort(solve(G,t)),n2:length(G2),
                     a1:%gamma,b1:%gamma,g:1,i0:0,gpr:false,ghpr:false,
                     for i:1 step 1 while (i<=n1 and
                       is(scalarp(part(G1[i],2)))) do i0:i0+1,
                     if i0<n1
                     then (i0:i0+1,apr:plus,bpr:minus,
                          for i:i0 step 1 unless (i>n1 or ghpr)
                          do (if part(G1[i],1)=x and freeof(x,part(G1[i],2))
                              then (g:part(G1[i],2),gpr:true)
                              else g:1,
                              for j:1 step 1 unless (j>n2 or ghpr)
                              do (h:part(G2[j],2),a1:limit(h,x,a,plus),
                                  b1:limit(h,x,b,minus),
                                  if a1<=b1
                                  then (apr:plus,bpr:minus)
                                  else (apr:minus,bpr:plus),
                                  if string(float(a))=
                                    string(float(limit(g,t,a1,apr)))
                                    and string(float(b))=
                                    string(float(limit(g,t,b1,bpr)))
                                  then ghpr:true)),

```

```

if ghpr
then (if not(freeof(%i,g))
      then print("-- Function",x,"(",t,")","=",
                g,"is complex!.."),
      if imagpart(a1)#0 or imagpart(b1)#0
      then print("-- New bounds are complex!.."),
      'integrate(subst(g,x,f)*diff(g,t),t,a1,b1))
else (if not(gpr)
      then print("-- It is impossible to express",
                x,"(",t,")..")
      else print("-- Substitution
                  is not correct!"),expr))
      else (print("-- All solutions",x,"(",t,")",
                  "are constant!.."),expr))
else (if string(part(expr,0))#"integrate"
      then (print("-- Expression must be a single integral
                  without any coefficients!.."),return(expr)),
      if part(expr,2)#x
      then print("-- The 4-th argument must be marked as",
                  part(expr,2),"!.."),expr))$

```

Описану вище процедуру-команду `chv(expr,G,t,x)` можна застосовувати як до визначених, так і до невизначених інтегралів. Вираз `expr` повинен являти собою тільки один інтеграл, причому без коефіцієнтів.

Обчислимо всі інтеграли з прикладу 2 за допомогою нової команди заміни змінної `chv`.

```

(%i1) load(changevar1)$
(%i2) I:'integrate(x^2,x,1,2)$
(%i3) I1:chv(I,x^2=t,t,x)$ I1=ev(I1,nouns);
      
$$\int_1^2 \sqrt{t} dt$$

(%o4)  $\frac{1}{2} = \frac{7}{3}$ 
(%i5) I:'integrate(x^3,x,1,2)$
(%i6) I1:chv(I,x^3=t,t,x)$ I1=ev(I1,nouns);
      
$$\int_1^8 t^{1/3} dt$$

(%o7)  $\frac{1}{3} = \frac{15}{4}$ 
(%i8) I:'integrate(sqrt(4-x^2),x,0,1);
      
$$\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$$

(%i9) chv(I,4-x^2=(t*x-2)^2,t,x);
(%o9) 
$$\int_0^{2-\sqrt{3}} \sqrt{4 - \frac{16t^2}{(t^2+1)^2}} \left( \frac{4}{t^2+1} - \frac{8t^2}{(t^2+1)^2} \right) dt$$


```

Щоб здійснити спрощування підінтегрального виразу, у тому числі під знаком кореня, використаємо команду `scanmap(f,expr)`, за якою функція або команда `f` застосовується до всіх складових частин виразу `expr`:

```

(%i10) scanmap(factor,%);

```

$$(\%o10) -8 \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{(t-1)(t+1)|t-1||t+1|}{(t^2+1)^3} dt$$

(%i11) assume(t-1<0,t+1>0)\$

(%i12) %o10,factor

$$(\%o12) 8 \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{(t-1)^2 (t+1)^2}{(t^2+1)^3} dt$$

(%i13) %,nouns;

$$(\%o13) -\frac{8 \operatorname{atan}(\sqrt{3}-2)-\sqrt{3}}{2}$$

Щоб спростити вираз (%o13), позначимо $a = \operatorname{arctg}(2 - \sqrt{3})$:

(%i14) a:atan(2-sqrt(3))\$

i обчислимо $\operatorname{tg} 3a$:

(%i15) tan(3*a),trigexpand,radcan;

(%o15) 1

Отже, $3a = \frac{\pi}{4} \Rightarrow a = \frac{\pi}{12}$. Враховуючи це, спростимо (%o13):

(%i16) (8*%pi/12+sqrt(3))/2,radcan;

$$(\%o16) \frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6}$$

Обчислення інтеграла 3) прикладу 2 завершено. Перейдемо до інтеграла 4). Застосуємо до інтеграла (%o8) тригонометричну підстановку:

(%i17) chv(%o8,x=2*sin(t),t,x);

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

$$(\%o17) 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(t) \sqrt{4 - 4 \sin(t)^2} dt$$

(%i18) trigsimp(%);

$$(\%o18) 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(t) |\cos(t)| dt$$

(%i19) assume(cos(t)>0)\$

(%i20) %o19,simp;

$$(\%o20) 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(t)^2 dt$$

(%i21) %,nouns;

$$(\%o21) \frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6}$$

Таким чином, на відміну від штатної команди `changevar`, за допомогою нової команди `chv` вдалося безпомилково розв'язати усі завдання з прикладу 2.

Розглянемо ще кілька цікавих інтегралів.

Приклад 3. Обчислити наступні інтеграли за методом підстановки:

$$1) \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx; 2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \quad (a > 0, b > 0);$$

$$3) \int_{-a}^a \sqrt[3]{\frac{x-2a}{x+2a}} dx \quad (a > 0); 4) \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx; 5) \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{\cos x} \sin(x) dx.$$

□ 1) Щоб позбутися кореня, використаємо формулу $\operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} - 1$

і зробимо заміну $x = \frac{2}{\cos t} = 2 \sec t$:

(%i1) load(changevar1)\$

(%i2) 'integrate(sqrt(x^2-4)/x^4,x,2,4);

$$(\%o2) \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx$$

(%i3) chv(%o2,x=2*sec(t),t,x);

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

$$(\%o3) \frac{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{4 \sec(t)^2 - 4} \tan(t)}{\sec(t)^3} dt}{8}$$

(%i4) trigsimp(%o3);

$$(\%o4) \frac{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(t) |\cos(t)| |\sin(t)| dt}{4}$$

(%i5) apply(assume,[cos(t)>0,sin(t)>0]);

(%o5) [cos(t) > 0, sin(t) > 0]

(%i6) %o4,simp;

$$(\%o6) \frac{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(t) \sin(t)^2 dt}{4}$$

(%i7) %,nouns;

$$(\%o7) \frac{\sqrt{3}}{32}$$

Спробуємо ще застосувати до інтеграла 1) третю підстановку Чебишова:

(%i8) chv(%o2,x^2-4=t^2*x^2,t,x);

– Function $x(t) = \frac{2i}{\sqrt{t^2-1}}$ is complex!..

$$(\%o8) \frac{i \int_0^1 t \sqrt{t^2-1} \sqrt{-\frac{4}{t^2-1}-4} dt}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Попередження про комплексну функцію (точніше, про її можливі уявні значення) не означає помилку, адже з урахуванням меж інтегрування, $|t| < 1$, в силу чого значення виразу $\frac{2i}{\sqrt{t^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{1-t^2}}$ є дійсними. Тому

продовжимо розв'язування:

(%i9) factor(%o8);

$$\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 t^2 dt$$

(%o9) $\frac{-\sqrt{3}}{4}$

(%i10) %nouns;

(%o10) $\frac{\sqrt{3}}{32}$

Після спрощення стало зрозуміло, наскільки ефективною є підстановка Чебишова для даного інтеграла, і що за допомогою комп'ютера її виконано правильно.

Обчислимо ще інтеграл 1) за допомогою першої підстановки Ейлера.

(%i11) chv(%o2,x^2-4=(x-t)^2,t,x);

(%o11) $-16 \int_{4-2\sqrt{3}}^2 \frac{t^4 \left(1 - \frac{t^2+4}{2t^2}\right) \sqrt{\frac{(t^2+4)^2}{4t^2} - 4}}{(t^2+4)^4} dt$

Далі застосуємо команду sqfr, яка аналогічна до команди factor, проте за її допомогою здійснюється лише часткове розкладання на множники:

(%i12) scanmap(sqfr,%);

(%o12) $-4 \int_{-2(\sqrt{3}-2)}^2 \frac{(t^2-4) |t| |t^2-4|}{(t^2+4)^4} dt$

Знайдемо наближене значення нижньої межі:

(%i13) -2*(sqrt(3)-2),numer;

(%o13) 0.53589838486225

Звідси стає зрозумілим, що для розкриття модулів у інтегралі (%o12) слід зробити припущення:

(%i14) assume(t>0,t<2)\$

(%i15) %o12,simp;

(%o15) $-4 \int_{-2(\sqrt{3}-2)}^2 \frac{t(4-t^2)(t^2-4)}{(t^2+4)^4} dt$

Останній інтеграл також спростимо за допомогою підстановки $u = t^2$. Оскільки при застосуванні команди chv вимагається, щоб перед інтегралом не було ніяких коефіцієнтів, то інтеграл (%o15) спочатку поділимо, а потім помножимо на -4 :

(%i16) -4*chv(%o15/(-4),t^2=u,u,t);

(%o16) $2 \int_{-4(4\sqrt{3}-7)}^4 \frac{(u-4)^2}{(u+4)^4} du$

(%i17) %o16,nouns,ratsimp;

(%o17) $\frac{\sqrt{3}}{32}$

Обчисливши інтеграл 1) різними способами, можна зробити висновок про те, яка з виконаних підстановок виявилась найефективнішою.

Перед обчисленням кожного наступного інтеграла з прикладу 3 перезапустимо сеанс Maxima.

2) У цьому інтегралі наявні параметри a , b . За теорією рекомендується робити заміну $t = \operatorname{tg} x$, хоч можна спробувати і такі підстановки, як $t = \operatorname{ctg} x$ або $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Зупинимось на першій підстановці.

(%i1) load(changevar1)\$

(%i2) 'integrate(1/(a^2*cos(x)^2+b^2*sin(x)^2),x,0,%pi/4);

(%o2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{b^2 \sin(x)^2 + a^2 \cos(x)^2} dx$

(%i3) chv(%o2,t=tan(x),t,x);

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

(%o3) $\int_0^1 \frac{1}{(t^2+1) \left(\frac{b^2 t^2}{t^2+1} + \frac{a^2}{t^2+1} \right)} dt$

(%i4) ratsimp(%);

(%o4) $\int_0^1 \frac{1}{b^2 t^2 + a^2} dt$

(%i5) %, nouns;

(%o5) $\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{t}{a}\right)}{a b}$

Інтеграл 2) обчислено.

Якщо аналогічно спробувати зробити підстановку $t = \operatorname{ctg} x$, то дістанемо так званий невласний інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{1}{a^2 t^2 + b^2} dt = \frac{\pi}{2 a b} - \frac{\operatorname{atan}\left(\frac{t}{a}\right)}{a b}$, а це не дорівнює інтегралу 2). Помилка виникла тому, що порушено умови, за яких є правильною формула заміни змінної (межі $a = 0$ відповідає нескінченна межа $\alpha = \infty$, що некоректно).

Універсальна тригонометрична підстанова $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (як це часто буває) приводить до громіздкого інтеграла $2 \int_0^{\operatorname{tan}\left(\frac{\pi}{8}\right)} \frac{t^2+1}{a^2 t^4 + (4 b^2 - 2 a^2) t^2 + a^2} dt$, при обчисленні якого за програмою видається багато додаткових запитів щодо знаків серії громіздких виразів, що зрештою заводять у тупик.

3) Даний інтеграл містить параметр i в підінтегральній функції, і в межах інтегрування. За допомогою Maxima безпосереднім інтегруванням його обчислити неможливо. Разом з тим, використовуючи команду chv для заміни змінної, матимемо:

(%i1) load(changevar1)\$

(%i2) 'integrate(((x-2*a)/(x+2*a))^(1/3),x,-a,a);

(%o2) $\int_{-a}^a \frac{(x-2a)^{\frac{1}{3}}}{(x+2a)^{\frac{1}{3}}} dx$

(%i3) chv(%o2,(x-2*a)/(x+2*a)=t^3,t,x);

$$(\%o3) \int_{-3^{\frac{1}{3}}}^{-\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}}} \frac{\left(-\frac{2a}{t^3-1} + 2a\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3t^2(2at^3+2a)}{(t^3-1)^2} - \frac{6at^2}{t^3-1}\right)}{\left(2a - \frac{2a}{t^3-1}\right)^{\frac{1}{3}}} dt$$

(%i4) factor(%);

$$(\%o4) 12a \int_{-3^{\frac{1}{3}}}^{-\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}}} \frac{t^3}{(t^3-1)^2} dt$$

(%i5) %, nouns, logcontract, ratsimp;

$$(\%o5) \frac{\left(4\sqrt{3} \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{3}-2\sqrt[3]{6}}{3}\right) - 4\sqrt{3} \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{3}-2\sqrt[3]{6}}{3}\right) - 3\sqrt[3]{\frac{5}{3}} + 3\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right)a}{3}$$

Інтеграл 3) обчислено точно, у символічному вигляді. Щоб підтвердити правильність результату (%o5), можна скористатися іншим засобом комп'ютерної математики, наприклад, програмою Gran1.

Переобчислимо чисельно вираз (%o5):

(%i6) %o5, numer;

$$(\%o6) -2.041614878242466a$$

Тепер обчислимо значення інтеграла 3) у випадку $a = 1$ за допомогою програми Gran1: $I = -2.04161$. Це вже є вагомим підтвердженням правильності результатів застосування обох програм. Крім того, оцінити приблизно правильність і законність інтегрування допомагає зображення (за програмою Gran1) геометричного змісту даного інтеграла (рис. 2.2.13):

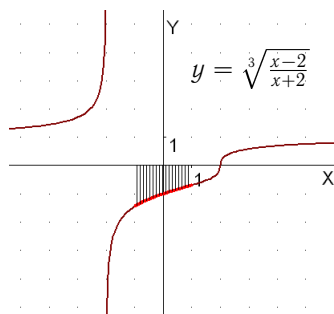


Рис. 2.2.13.

До речі, за штатною командою системи Maxima

(%i7) changevar(%o5, (x-2*a)/(x+2*a)=t^3, t, x);

отримується інтеграл з уявними межами:

$$(\%o7) 12a \int_{-\frac{\sqrt[3]{5}}{3}}^{\frac{\sqrt[3]{3}-1}{3}} \frac{t^3}{t^6-2t^3+1} dt$$

Зрозуміло, що за допомогою цього інтеграла коректно обчислити інтеграл 3) неможливо.

4) Даний інтеграл цікавий тим, що безпосереднім інтегруванням у програмі Maxima він не береться:

```
(%i1) integrate(sqrt(x)/(sqrt(x)+1),x,0,1);
```

```
(%o1)  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx$ 
```

Проте відповідний невизначений інтеграл береться:

```
(%i2) integrate(sqrt(x)/(sqrt(x)+1),x);
```

```
(%o2)  $-4(\sqrt{x} + 1) + (\sqrt{x} + 1)^2 + 2 \log(\sqrt{x} + 1)$ 
```

Маючи первісну, досить просто скористатися формулою Ньютона – Лейбніца:

```
(%i3) ev(%o2,x=1)-ev(%o2,x=0);
```

```
(%o3)  $2 \log(2) - 1$ 
```

Другим способом обчислення інтеграла 4) є спосіб заміни змінної:

```
(%i4) changevar(%o1,t=sqrt(x),t,x);
```

```
Is t positive, negative, or zero?p;
```

```
(%o4)  $2 \int_0^1 \frac{t^2}{t+1} dt$ 
```

```
(%i5) %,nouns;
```

```
(%o5)  $2 \log(2) - 1$ 
```

5) Спробуємо обчислити даний інтеграл безпосередньо:

```
(%i1) 'integrate(sqrt(cos(x))*sin(x),x,%pi/2,3*%pi/2);
```

```
(%o1)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{\cos(x)} \sin(x) dx$ 
```

```
(%i2) %,nouns;
```

```
(%o2) 0
```

Тепер спробуємо обчислити інтеграл 5) за допомогою вбудованої команди заміни змінної:

```
(%i3) changevar(%o1,cos(x)=t,t,x);
```

```
(%o3) 0
```

Обома способами за допомогою Maxima отримано однакові результати.

Зауважимо, що у прикладі 3, 5) підінтегральна функція як дійсна функція не визначена в жодній точці всередині проміжку інтегрування. Графік цієї функції, побудований за програмою Gran1, є таким (рис. 2.2.14):

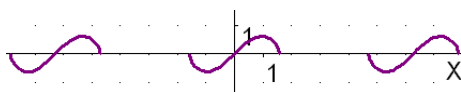


Рис. 2.2.14.

Проте ця функція визначена і неперервна на заданому відрізку як комплекснозначна функція дійсної змінної. За допомогою системи Maxima

можна обчислювати інтеграли і від таких функцій. Так, якщо $a < 0$, то в якості кореня $\sqrt[n]{a}$ береться його головне значення, а саме $i\sqrt[n]{-a}$. Тому й отримуємо

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{\cos x} \sin x \, dx = i \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{-\cos x} \, d(-\cos x) = i \int_0^0 \sqrt{t} \, dt = 0.$$

Взагалі, при інтегруванні функції $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ на відрізку $[a; b] \subset (-\infty; 0]$ у випадку непарного n в якості значень $\sqrt[n]{x}$ беруться дійсні значення, а у випадку парного n – головні значення: $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{|x|} (\cos \frac{\arg x}{n} + i \sin \frac{\arg x}{n})$.
Наприклад,

```
(%i4) integrate(x^(1/5),x,-32,0);
```

```
(%o4) -160/3
```

```
(%i5) integrate(x^(1/4),x,-16,0);
```

```
(%o5) 128(-1)^(1/4)/5
```

```
(%i6) rectform(%);
```

```
(%o6) 2^(13/5) i + 2^(13/5)
```

Цю особливість системи Maxima слід також мати на увазі під час обчислення інтегралів. ■

Таким чином, при обчисленні інтегралів за методом заміни змінної з використанням програми Maxima необхідно враховувати:

- 1) операція заміни змінної складна для комп'ютерної реалізації і далеко не в кожній елементарній функції $f(x)$ можна за допомогою комп'ютера автоматично замінити незалежну змінну на довільну елементарну функцію $x(t)$, навіть якщо така заміна буде теоретично обгрунтованою;
- 2) при виконанні цієї операції потрібно контролювати ситуацію на предмет законності обраної заміни та можливих операцій у комп'ютерній системі у неоднозначних ситуаціях;
- 3) доцільно впевнитися, чи існує заданий інтеграл; зобразити графік функції $G(t, x) = 0$, якою задається підстановка; виразити явно функції $x(t)$ і $t(x)$ за допомогою команди solve тощо;
- 4) за вбудованою командою changevar досить часто отримуються некоректні результати, тому краще користуватися наведеною вище користувацькою процедурою chv;
- 5) бажано перевіряти результати, отримані за допомогою системи Maxima, застосовуючи інші системи комп'ютерної математики або письмові викладки;
- 6) слід взагалі розглядати отримані за допомогою комп'ютера результати як гіпотези, які потрібно перевіряти.

Формули інтегрування частинами для визначеного інтеграла в системі Maxima немає, але реалізувати її доволі просто. Для цього досить додати у файл `bypart1.mac` (про який ішла мова в підпункті 1.3.8.2) такий рядок:

```
byparts2(x,u,dv,a,b):=(block([v],v:integrate(dv,x),subst(b,x,u*v)-
subst(a,x,u*v)-integrate(v*rat(diff(u,x),x,a,b)))$
```

В аргументах цієї команди задається ліва частина формули інтегрування частинами (змінна інтегрування, вирази, які позначаються через u , v' , та межі інтегрування). Результатом виконання наведеної вище команди є права частина формули інтегрування частинами (причому вираз $uv \Big|_a^b$ буде одразу обчислено, а інтеграл $\int_a^b v \, du$ буде виведено у необчисленій формі, щоб можна було його проаналізувати).

Приклад 4. Обчислити наступні інтеграли за методом інтегрування частинами: 1) $\int_{-1}^1 x \, 2^x \, dx$; 2) $\int_0^1 \ln(1+x^2) \, dx$; 3) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x \, dx}{\sin^2 x}$; 4) $\int_0^{1/2} \arcsin^2 x \, dx$;
5) $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \operatorname{arctg}(\sin x) \, dx$.

□ Інтегралами 1) – 3) обчислюються за методом інтегрування частинами як звичайно. Тому просто проілюструємо обчислення їх з використанням системи Maxima.

```
(%i1) load(bypart1)$
(%i2) byparts2(x,x,2^x,-1,1);
(%o2)  $\frac{5}{2 \log(2)} - \frac{1}{\log(2)}$ 
(%i3) %,nouns;
(%o3)  $\frac{5}{2 \log(2)} - \frac{3}{2 \log(2)^2}$ 
(%i4) byparts2(x,log(1+x^2),1,0,1);
(%o4)  $\log(2) - 2 \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} \, dx$ 
(%i5) %,nouns;
(%o5)  $\log(2) + \frac{\pi-4}{2}$ 
(%i6) byparts2(x,x,1/sin(x)^2,%pi/4,%pi/3);
(%o6)  $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\tan(x)} \, dx - \frac{\pi}{3^{3/2}} + \frac{\pi}{4}$ 
(%i7) %,nouns;
(%o7)  $\log\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\log(2)}{2} - \frac{\pi}{3^{3/2}} + \frac{\pi}{4}$ 
```

4) Для обчислення даного інтеграла потрібно двічі застосувати формулу інтегрування частинами.

(%i8) byparts2(x,asin(x)^2,1,0,1/2);

$$(\%o8) \frac{\pi^2}{72} - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \operatorname{asin}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

(%i9) byparts2(x,asin(x),-2*x/sqrt(1-x^2),0,1/2);

$$(\%o9) \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - 1$$

(%i10) %pi^2/72+%;

$$(\%o10) \frac{\pi^2}{72} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - 1$$

5) Обчислення цього інтеграла доцільно розпочати із заміни змінної $\sin x = t$, а потім продовжити інтегрувати частинами.

(%i11) load(changevar1)\$

(%i12) 'integrate(sin(2*x)*atan(sin(x)),x,0,%pi/2);

$$(\%o12) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \operatorname{atan}(\sin(x)) dx$$

(%i13) chv(%o12,sin(x)=t,t,x);

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

$$(\%o13) \int_0^1 \frac{\operatorname{atan}(t) \sin(2 \operatorname{asin}(t))}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

(%i14) trigexpand(%);

$$(\%o14) 2 \int_0^1 t \operatorname{atan}(t) dt$$

(%i15) byparts2(t,atan(t),2*t,0,1);

$$(\%o15) \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1} dt$$

(%i16) %,nouns,expand;

$$(\%o16) \frac{\pi}{2} - 1$$

Виконаємо перевірку правильності обчислення інтеграла 5) за допомогою програми Gran1. Знайдемо спочатку наближене десяткове подання цього інтеграла за програмою Maxima:

(%i17) %o16,numer;

(%o17) 0.5707963267949

Тепер обчислимо значення інтеграла 5) за допомогою програми Gran1: $I = 0.570796$. Перевірка пройшла успішно. Крім того, легко бачити, що підінтегральна функція на проміжку інтегрування додатна. Поглянемо на фігуру, площу якої виражає знайдений інтеграл (рис. 2.2.15).

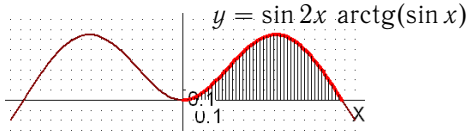


Рис. 2.2.15.

Тепер повернемося до Maxima і виконаємо безпосереднє обчислення інтеграла 5):

```
(%i18) %o12,nouns;
```

```
(%o18)  $-\frac{\pi}{2} - 1$ 
```

Дістали помилковий результат. Це ще раз свідчить про те, що далеко не все, що отримується за допомогою систем комп'ютерної математики, є вірогідним.

Проаналізуємо можливі причини виникнення останньої помилки. Обчислимо відповідний невизначений інтеграл:

```
(%i19) integrate(sin(2*x)*atan(sin(x)),x);
```

```
(%o19)  $-\frac{1}{4} \left( (\cos 2x - 3) \operatorname{atan} 2(\sin 2x + 2 \sin x, \cos 2x + 2 \cos x - 1) \right. \\ \left. + (\cos 2x - 3) \operatorname{atan} 2(\sin 2x - 2 \sin x, -\cos 2x + 2 \cos x + 1) + 4 \sin x \right)$ 
```

Нагадаємо, що $\operatorname{atan} 2(y, x) = \arg(x + iy)$. Можна припустити, що помилка зумовлена переходом до функцій комплексної змінної. При цьому вираз

```
(%i20) 2*sin(x)*cos(x)*atan(sin(x));
```

```
(%o20)  $2 \cos(x) \sin(x) \operatorname{atan}(\sin(x))$ 
```

інтегрується коректно:

```
(%i21) integrate(%o20,x),expand;
```

```
(%o21)  $\sin(x)^2 \operatorname{atan}(\sin(x)) + \operatorname{atan}(\sin(x)) - \sin(x)$  ■
```

Метод інтегрування частинами часто застосовують до виведення рекурентних формул для обчислення інтегралів.

Приклад 5. Обчислити інтеграл $I = \int_0^{\pi/b} e^{ax} \sin bx \, dx$ ($a > 0, b > 0$).

□ Застосуємо формулу інтегрування частинами:

```
(%i1) load(bypart1)$
```

```
(%i2) byparts2(x,%e^(a*x),sin(b*x),0,%pi/b);
```

```
(%o2)  $\frac{a \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \cos(bx) \, dx}{b} + \frac{e^{\frac{\pi a}{b}}}{b} + \frac{1}{b}$ 
```

Далі застосуємо формулу інтегрування частинами до інтеграла, який утворився, причому за u знову позначимо e^{ax} :

```
(%i3) byparts2(x,%e^(a*x),cos(b*x),0,%pi/b);
```

```
(%o3)  $-\frac{a \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \sin(bx) \, dx}{b}$ 
```

Отже, $I = \%o2$, де інтеграл в $\%o2$ дорівнює $\%o3 = -\frac{a}{b}I$. Складемо рівняння:

```
(%i4) (a*(-a)/b*I)/b+%e^(%pi*a)/b+1/b=I;
```

```
(%o4)  $-\frac{a^2 I}{b^2} + \frac{e^{\frac{\pi a}{b}}}{b} + \frac{1}{b} = I$ 
```

Розв'язавши це рівняння, тим самим знайдемо шуканий інтеграл:

```
(%i5) solve(%I),factor;
```

$$(\%o5) [I = \frac{b(e^{\frac{\pi a}{b}} + 1)}{b^2 + a^2}] \blacksquare$$

На розглянутих прикладах продемонстровано особливості застосування програми Maxima до обчислення визначених інтегралів за методами заміни змінної та інтегрування частинами.

Серед багатьох інших застосувань розглянемо ще лише одне – це можливість оперування з визначеними інтегралами зі змінними межами інтегрування.

Приклад 6. Продиференціювати наступні функції: 1) $\int_0^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt$;

2) $\int_{-\sqrt{\arccos x}}^0 \cos t^2 dt$; 3) $\int_{-x^2}^{\ln x} \operatorname{arctg} t dt$.

□ Розв'язання цих прикладів за допомогою системи Maxima наочне і не потребує коментарів.

(%i1) 'integrate(cos(t^2),t,0,sqrt(x));

$$(\%o1) \int_0^{\sqrt{x}} \cos(t^2) dt$$

(%i2) diff(%o1,x);

$$(\%o2) \frac{\cos(x)}{2\sqrt{x}}$$

(%i3) 'integrate(cos(t^2),t,-sqrt(acos(x)),0);

$$(\%o3) \int_{-\sqrt{\arccos(x)}}^0 \cos(t^2) dt$$

(%i4) diff(%o3,x);

$$(\%o4) -\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}\sqrt{\arccos(x)}}$$

(%i5) 'integrate(atan(t),t,-x^2,log(x));

$$(\%o5) \int_{-x^2}^{\log(x)} \operatorname{atan}(t) dt$$

(%i6) diff(%o5,x);

$$(\%o6) \frac{\operatorname{atan}(\log(x))}{x} - 2x \operatorname{atan}(x^2) \blacksquare$$

2.2.8. Завдання для виконання за допомогою комп'ютера.

1. Навести геометричну ілюстрацію властивостей 1 – 7 R -інтеграла.
2. Проілюструвати ситуацію, коли формальна заміна змінної дає неправильний результат при обчисленні R -інтеграла.
3. Проілюструвати метод інтегрування частинами для обчислення R -інтеграла.

3. ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

3.1. Обчислення довжини дуги кривої

3.1.1. Поняття кривої. Приклади кривих. Інтуїтивне поняття кривої пов'язане із слідом, який залишає матеріальна точка (кінчик загостреного олівця), що рухається на площині OXY (або \mathbb{C}). При цьому певному моменту часу (параметру) t відповідає на кривій певна точка $M_t(x, y)$ (або $M_t(z)$) з координатами на площині $x = x(t)$, $y = y(t)$ (або $z = z(t)$). З фізичних міркувань природно розрізняти точки кривої не тільки за їх координатами, тобто за положенням матеріальної точки на площині, а й за моментом часу (параметром) t , в який матеріальна точка займає це положення.

У зв'язку з такими уявленнями про криву вводять наступні означення.

Нехай на проміжку $\langle a; b \rangle$ задані неперервні дійсні функції $x = x(t)$, $y = y(t)$ (або неперервна комплекснозначна функція $z = z(t)$). Тоді кривою або параметричною кривою у площині OXY (або в комплексній площині \mathbb{C}) називають множину $\Gamma = \{M_t(x, y) : x = x(t), y = y(t), t \in \langle a; b \rangle\}$ (або $\Gamma = \{M_t(z) : z = z(t), t \in \langle a; b \rangle\}$). При цьому елемент $M_t(x, y)$ (або $M_t(z)$) цієї множини називають *точкою кривої* Γ , що відповідає параметру t , числа $x = x(t)$, $y = y(t)$ (або $z = z(t)$) називають *координатами цієї точки* у площині OXY (або \mathbb{C}), а рівності

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in \langle a; b \rangle \end{cases} \quad (\text{або } z = z(t), t \in \langle a; b \rangle) \quad (1)$$

називають *параметричними рівняннями кривої* Γ в дійсній (або в комплексній) формі.

Якщо ототожнювати площини OXY та \mathbb{C} , тобто ототожнювати точки (x, y) та $z = x + iy$, то від дійсної форми параметричного рівняння кривої легко перейти до комплексної і навпаки, оскільки $z(t) = x(t) + iy(t) \forall t \in \langle a; b \rangle$.

Зрозуміло, що кожна крива цілком визначається своїми параметричними рівняннями. Тому часто замість слів “крива Γ , параметричні рівняння якої мають вигляд (1)” використовують слова “крива Γ вигляду (1)”, або “крива (1)”, або крива $\Gamma: x = x(t), y = y(t), t \in \langle a; b \rangle$ ($\Gamma: z = z(t), t \in \langle a; b \rangle$).

Якщо в рівнянні (1) $x(t) = t \forall t \in [a; b]$ або $y(t) = t \forall t \in [a; b]$, то кажуть що крива Γ задана явним рівнянням $y = y(x)$, $x \in [a; b]$, або $x = x(y)$, $y \in [a; b]$.

Нехай у рівнянні (1) $x = \rho(t) \cos t$, $y = \rho(t) \sin t \forall t \in \langle a; b \rangle$ і $\rho(t) \geq 0 \forall t \in \langle a; b \rangle$. Тоді $\rho := \sqrt{x^2 + y^2} = \rho(t) \forall t \in \langle a; b \rangle$ і кажуть, що крива Γ задана рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(t)$, $t \in \langle a; b \rangle$, якщо $\rho(t)$ – це відстань точки (x, y) від початку координат, а параметр t – це кут, який радіус-вектор точки (x, y) утворює з додатним напрямом осі OX (рис. 3.1.1).

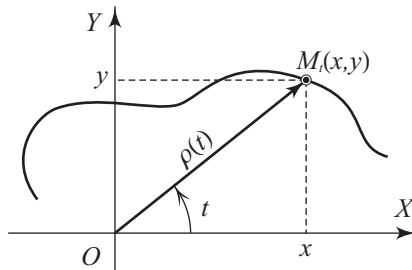


Рис. 3.1.1.

Точку (x, y) (точку z) називають *слідом точки* $M_t(x, y)$ (точку $M_t(z)$) кривої (1) на площині XOY (на площині \mathbb{C}), а сукупність усіх таких слідів називають *слідом кривої* Γ на відповідній площині і позначають Γ_c .

Точки $M_{t_1}(x_1, y_1)$ і $M_{t_2}(x_2, y_2)$ кривої Γ вважають *різними*, якщо $t_1 \neq t_2$, тобто ці точки відповідають різним значенням параметра t . При цьому різні точки кривої, взагалі кажучи, можуть мати однакові координати, тобто можуть мати однакові сліди на площині OXY (або \mathbb{C}).

Якщо різні точки кривої (1) обов'язково мають різні координати (різні сліди), крім, можливо, випадку $t = a$ і $t = b$, то цю криву називають *кривою без точок самоперетину*, або *простою кривою*, або *кривою Жордана*.

Наприклад, крива Γ , задана явним рівнянням, завжди є простою кривою.

Для простої кривої можна опускати індекс t в позначенні її точок, тобто Γ – проста крива $\Leftrightarrow \Gamma = \{M(x, y): x = x(t), y = y(t), t \in \langle a; b \rangle\}$, зокрема $\Gamma = \{M(x, y): y = y(x), x \in [a; b]\}$. Отже, *прості криві можна ототожнювати з відповідними множинами точок у площині OXY або \mathbb{C} .*

Розглянемо деякі **прикладів кривих**.

1. Графік $\Gamma(f)$ кожної основної елементарної функції f можна вважати кривою Жордана у площині OXY , якщо розглядати f на $\langle a; b \rangle \subset D(f)$. Наприклад, $\Gamma = \{M(x, y): y = \sin x, x \in \mathbb{R}\}$ – синусоїда в площині OXY , а в площині \mathbb{C} синусоїда має вигляд $\Gamma = \{z = t + i \sin t, t \in \mathbb{R}\}$.

2. Кожна пряма в площині OXY цілком визначається двома різними

точками $M_{t_1}(x_1, y_1)$ і $M_{t_2}(x_2, y_2)$ і має рівняння $y = y_1$ або $x = x_1$, або

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t = x_2t + x_1(1 - t), \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t = y_2t + y_1(1 - t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Таким чином, кожна пряма в площині OXY є параметричною кривою в цій площині і має рівняння вигляду

$$\begin{cases} x = x_2t + x_1(1 - t), \\ y = y_2t + y_1(1 - t), \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2)$$

де $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ – фіксовані точки прямої.

З останньої системи легко дістати рівняння прямої в комплексній площині:

$$\begin{aligned} z = x(t) + iy(t) &= (x_2 + iy_2)t + (x_1 + iy_1)(1 - t) = \\ &= z_2t + (1 - t)z_1, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Кожна пряма є простою кривою.

3. Рівняння кола $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ в параметричній дійсній формі має вигляд

$$\begin{cases} x - x_0 = r \cos t, \\ y - y_0 = r \sin t, \quad t \in [0; 2\pi], \quad \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x = x_0 + r \cos t, \\ y = y_0 + r \sin t, \quad t \in [0; 2\pi], \end{cases} \end{cases} \quad (3)$$

а в комплексній формі – вигляд

$$\begin{aligned} z = x(t) + iy(t) &= x_0 + iy_0 + r(\cos t + i \sin t) = \\ &= z_0 + r \exp it, \quad t \in [0; 2\pi] \quad (\text{рис. 3.1.2}). \end{aligned}$$

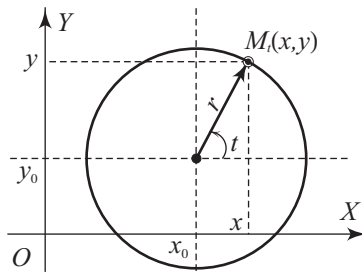


Рис. 3.1.2.

Крива (3) є простою кривою, а якщо у рівнянні (3) замінити відрізок $[0; 2\pi]$ на відрізок $[0; 4\pi]$, то крива (3) вже не буде простою, проте слідом цієї кривої залишиться коло з центром у точці $(x_0; y_0)$ і радіусом r .

4. Криву Γ , рівняння якої в полярних координатах має вигляд $\rho = a(1 + \cos t)$, $t \in [0; 2\pi]$, де $a > 0$ – фіксоване число, називають *кардіоїдою* (рис. 3.1.3).

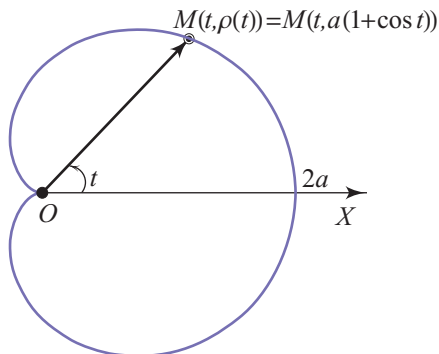


Рис. 3.1.3.

Рівняння кардіоїди в комплексній формі має вигляд

$$z = a(1 + \cos t) \exp it, \quad t \in [0; 2\pi].$$

Кардіоїда є кривою Жордана, тобто простою кривою, а якщо розглянути рівняння $\rho = a(1 + \cos t)$, $t \in [-2\pi; 2\pi]$, то воно буде рівнянням кривої, що не є кривою Жордана, проте її слідом у площині XOY залишиться кардіоїда.

Дугою кривої Γ вигляду (1) називають множину тих точок $M_t(x, y) \in \Gamma$, що відповідають параметру t , який набуває значень з відрізка $[\alpha; \beta] \subset \langle a; b \rangle$. При цьому точку $A = (x(\alpha), y(\alpha))$ називають *початковою*, а точку $B = (x(\beta), y(\beta))$ – *кінцевою точкою дуги* і позначають цю дугу \widehat{AB} , а якщо $A = B$, то дугу \widehat{AB} називають *замкненою дугою* або *контуром*. Точки A і B називають також *межевими точками дуги* \widehat{AB} .

Зрозуміло, що кожна дуга кривої (1) сама є деякою кривою, але довільна крива (1) є дугою тоді й тільки тоді, коли $\langle a; b \rangle = [a; b]$.

Наприклад, пряма (2) не є дугою, але крива

$$\begin{cases} x = x_2 + x_1(1 - t), \\ y = y_2 + y_1(1 - t), \quad t \in [0; 1], \end{cases}$$

є дугою: це *орієнтований* або *напрявлений відрізок* $[A; B]$, де $A = (x_1, y_1)$, а $B = (x_2, y_2)$.

Так само напрямлений відрізок $[z_1; z_2] = \{z = z_2 t + z_1(1 - t) : t \in [0; 1]\}$ у комплексній площині є дугою.

Також дугою є коло $z = z_0 + r \exp it$, $t \in [0; 2\pi]$, і кардіоїда $\rho = a(1 + \cos t)$, $t \in [0; 2\pi]$; ці дуги є замкненими, тобто контурами.

Якщо дуга \widehat{AB} є кривою Жордана, то її називають *простою дугою*.

3.1.2. Поняття довжини дуги. Коли дуга \widehat{AB} є відрізком, наприклад, $[z_1; z_2]$, то природно вважати що її довжина $l(\widehat{AB}) = |z_1 - z_2|$, а якщо $\widehat{AB} = \bigcup_{k=0}^{n-1} [z_k; z_{k+1}]$ – ламана, то за означенням $l(\widehat{AB}) = \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|$ – довжина цієї ламаної.

Природно виникає питання, що розуміти під довжиною довільної дуги \widehat{AB} .

Щоб відповісти на поставлене питання розглянемо довільну дугу \widehat{AB} , параметричне рівняння якої в комплексній формі має вигляд $z = z(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$. Зауважимо, що коли це рівняння задане в дійсній формі

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [\alpha; \beta], \end{cases}$$

то від нього зажди можна перейти до рівняння в комплексній формі, поклавши $z = x(t) + iy(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$.

Візьмемо довільне розбиття T відрізка $[\alpha; \beta]$ точками t_k , $k \in \overline{0, n}$, і позначимо $z_k = z(t_k) \forall k \in \overline{0, n-1}$.

Точки z_k утворюють ламану, вписану в дугу \widehat{AB} , довжина якої $L(T) = \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|$ (рис. 3.1.4).

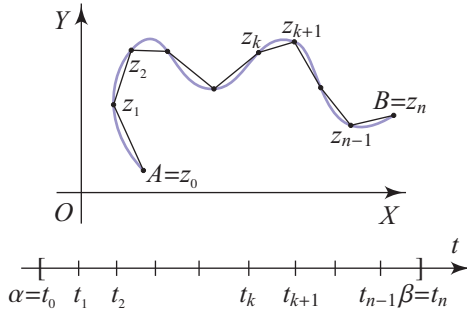


Рис. 3.1.4.

Довжиною дуги \widehat{AB} називають число

$$\begin{aligned} L &= \sup_{(T)} L(T) = \sup_{(T)} \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| = \\ &= \sup_{(T)} \sum_{k=0}^{n-1} |z(t_{k+1}) - z(t_k)| = \int_{\alpha}^{\beta} |z'(t)| dt. \end{aligned}$$

При цьому, якщо $L(T) < +\infty$, то дугу \widehat{AB} називають *спрямлюваною*.

Для кожної кривої, що одержується з дуги \widehat{AB} шляхом вилучення принаймні однієї межевої точки, вважають, що вона має ту саму довжину, що й дуга \widehat{AB} .

3.1.3. Критерії спрямлюваності.

Теорема 1 (перший критерій спрямлюваності). Дуга \widehat{AB} : $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$ (або

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [\alpha; \beta])$$

є спрямлюваною дугою тоді й тільки тоді, коли функція $z = z(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$ (функції $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$) має (мають) обмежену варіацію на відрізку $[\alpha; \beta]$. Зокрема, дуга \widehat{AB} : $y = f(x)$, $x \in [\alpha; \beta]$, є спрямлюваною тоді й тільки тоді, коли $\int_{\alpha}^{\beta} f' < +\infty$.

Всі розглянуті вище дуги (відрізок, коло, кардіоида) є спрямлюваними дугами. Проте існують і неспрамлювані дуги.

Приклад 1. Дуга \widehat{AB} : $y = x \sin \frac{1}{x}$, $x \in [0; 1]$, де $y(0) = 0$, не є спрямлюваною, оскільки функція f , що задає дугу, не є функцією обмеженої варіації на відрізку $[0; 1]$.

□ Справді, якщо $x_0^{(m)} = 0$, $x_1^{(m)} = \frac{2}{\pi(2m+1)}$, $x_2^{(m)} = \frac{2}{\pi \cdot 2m}$, $x_3^{(m)} = \frac{2}{\pi(2m-1)}$, \dots , $x_{2m+1}^{(m)} = \frac{2}{\pi}$, $x_{2m+2}^{(m)} = 1$, то

$$\sum_{k=0}^{2m+1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \geq \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2m+1} \right) \rightarrow \infty,$$

коли $m \rightarrow \infty$. ■

Візьмемо довільну точку $C = M_{t^*}(z(t^*))$ дуги \widehat{AB} : $z = z(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$. Ця точка відповідає параметру $t^* \in [\alpha; \beta]$. Вважатимемо, що $t^* \in (\alpha; \beta)$. Тоді дуга \widehat{AB} : $z = z(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, є об'єднанням дуг \widehat{AC} : $z = z(t)$, $t \in [\alpha; t^*]$, і \widehat{CB} : $z = z(t)$, $t \in [t^*; \beta]$. Саме так розумітимемо надалі рівність $\widehat{AB} = \widehat{AC} \cup \widehat{CB}$.

Теорема 2 (адитивна властивість довжини дуги). Якщо дуга $\widehat{AB} = \widehat{AC} \cup \widehat{CB}$, то дуга \widehat{AB} є спрямлюваною тоді і тільки тоді, коли спрямлювані дуги \widehat{AC} і \widehat{CB} . При цьому $L(\widehat{AB}) = L(\widehat{AC}) + L(\widehat{CB})$.

Досить часто на практиці поняття довжини дуги вводять по-іншому: $L = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} L(T)$. Еквівалентність двох вказаних означень довжини дуги стверджується у наступній теоремі.

Теорема 3 (другий критерій спрямлюваності дуги). Дуга \widehat{AB} : $z = z(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, є спрямлюваною тоді й тільки тоді, коли існує скінченна

границя $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} L(T) = L$. При цьому $L = \int_{\alpha}^{\beta} z(t)$ є довжиною дуги \widehat{AB} .

Зауваження. Якщо розглядати сукупність \mathfrak{S}_l різноманітних спрямлюваних дуг, то можна переконатися, що ця сукупність задовольняє наступні властивості:

- 1_l. Сукупність \mathfrak{S}_l непорожня і $L(\Gamma) \geq 0 \forall \Gamma \in \mathfrak{S}_l$.
- 2_l. Якщо дуги $\Gamma_i \in \mathfrak{S}_l, i \in \overline{1, 2}, \Gamma_1 \subset \Gamma_2$ і $\Gamma_2 \setminus \Gamma_1 = \Gamma \in \mathfrak{S}_l$ і $L(\Gamma) = L(\Gamma_2) - L(\Gamma_1)$.
- 3_l. Якщо дуги $\Gamma_i \in \mathfrak{S}_l, i \in \overline{1, 2}$ і дуга $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, то $\Gamma \in \mathfrak{S}_l$, причому $L(\Gamma) = L(\Gamma_1) + L(\Gamma_2)$, коли $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

Ці властивості називають основними властивостями спрямлюваних дуг і довжин.

3.1.4. Обчислення довжини дуги. Має місце наступна теорема.

Теорема 4 (про обчислення довжини дуги). Нехай функції $x = x(t)$ і $y = y(t)$ є диференційовними на відрізку $[\alpha; \beta]$, причому функції $x'(t)$ та $y'(t) \in R[\alpha; \beta]$, зокрема, неперервні на $[\alpha; \beta]$. Тоді дуга $\widehat{AB}: z = x(t) + iy(t), t \in [\alpha; \beta]$, є спрямлюваною і довжину $L(\widehat{AB})$ можна обчислити за формулою

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} |z'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \quad (4)$$

Зокрема, якщо дуга \widehat{AB} задана явним рівнянням: $y = f(x), x \in [\alpha; \beta], i f' \in R[\alpha; \beta]$, то

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + f'^2(x)} dx, \quad (5)$$

Якщо дуга \widehat{AB} задана рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(t), t \in [\alpha; \beta], i \rho'(t) \in R[\alpha; \beta]$, то

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'^2(t) + \rho^2(t)} dt. \quad (6)$$

Розглянемо деякі **приклад**и.

2. Нехай \widehat{AB} є відрізком $[z_1; z_2]$, тобто задана рівнянням $z = z_2 t + (1-t)z_1, t \in [0; 1]$. Тоді $z' = z_2 - z_1 = \text{const}$ на $[0; 1]$. Отже, умови теореми 3 виконуються і тому за формулою (4) дістаємо: $L([z_1; z_2]) = \int_0^1 |z_2 - z_1| dt = |z_2 - z_1|$, а це звичайна довжина відрізка.

3. Для обчислення довжини кола радіуса r зручно скористатися його рівнянням у полярних координатах: $\rho = r, t \in [0; 2\pi]$. Звідси за форму-

лою (6) дістанемо знайому формулу $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2} dt = r \cdot 2\pi = 2\pi r$.

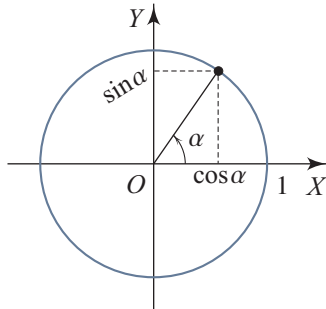


Рис. 3.1.5.

Якщо формулу (6) застосувати до обчислення дуги кола \widehat{AB} : $\rho = r$, $t \in [0; \alpha]$, то матимемо $A = (0, r)$, $B = (\alpha, r)$ і $L(\widehat{AB}) = \int_0^{\alpha} r dt = r\alpha$.

Якщо при цьому $r = 1$, то $L(\widehat{AB}) = \alpha$, і саме тому абсцису точки B називають косинусом, а ординату B – синусом числа α (рис. 3.1.5).

3.1.5. Диференціал довжини дуги. Розглянемо дугу \widehat{AB} : $z = x(u) + iy(u)$, $u \in [\alpha; \beta]$, де похідні $x'(u)$ та $y'(u)$ – неперервні функції на $[\alpha; \beta]$. За теоремою 4 для будь-якої фіксованої точки $t \in [\alpha; \beta]$ дуга \widehat{AB}_t , $z = x(u) + iy(u)$, $u \in [\alpha; t]$ є спрямлюваною, а її довжину можна обчислити за формулою

$$l(\widehat{AB}_t) = l(t) = \int_{\alpha}^t \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)} du \quad \forall t \in [\alpha; \beta].$$

Звідси випливає, що функція $l = l(t)$ є диференційовною на $[\alpha; \beta]$ і $l'(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$, а

$$dl(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \quad \forall t \in [\alpha; \beta].$$

При цьому $dl(t)$ називають *диференціалом довжини дуги*.

Зокрема, якщо дуга \widehat{AB} задана явним рівнянням $y = f(x)$, $x \in [\alpha; \beta]$, то

$$dl(x) = \sqrt{1 + f'^2(x)} dx,$$

а якщо \widehat{AB} задана рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, то

$$dl(t) = \sqrt{\rho'^2(t) + \rho^2(t)} dt.$$

3.1.6. Гладкі та кусково-гладкі дуги. Дугу \widehat{AB} : $z = x(u) + iy(u)$, $u \in [\alpha; \beta]$ називають *гладкою*, якщо функції $x(u)$ і $y(u)$ мають на $[\alpha; \beta]$ неперервні похідні $x'(u)$ та $y'(u)$, які одночасно не перетворюються в нуль, тобто $|z'(u)|^2 = x'^2(u) + y'^2(u) > 0 \forall u \in [\alpha; \beta]$.

Згадуючи геометричний зміст похідної комплекснозначної функції дійсної змінної, дістаємо, що гладка дуга в кожній своїй точці $M_t(z(t))$ має дотичний вектор і положення цього вектора неперервно змінюється, коли t пробігає відрізок $[\alpha; \beta]$.

Неперервну дугу \widehat{AB} називають *кусково-гладкою*, якщо вона є об'єднанням скінченної кількості гладких дуг.

Наприклад, відрізок і коло є гладкими дугами, а ламана і кардіоида – кусково-гладкими.

Враховуючи адитивну властивість R -інтеграла та довжини дуги, приходимо до висновку, що формули (4), (5) і (6) можна застосувати до обчислення довжин кусково-гладких дуг.

Якщо дуга \widehat{AB} : $z = x(t) + iy(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, є гладкою, то функція

$$l = l(t) = \int_{\alpha}^t \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)} du, \quad t \in [\alpha; \beta],$$

є зростаючою та неперервною на відрізку $[\alpha; \beta]$, а її множина значень $E(l) = [0; L]$, де L – довжина дуги \widehat{AB} . Тому за відомою теоремою існує обернена функція $t = t^{-1}(l)$, $l \in [0; L]$, що є неперервною і зростаючою на $[0; L]$.

Отже, рівняння \widehat{AB} можна записати у вигляді

$$z = x(t^{-1}(l)) + iy(t^{-1}(l)) = x_1(l) + iy_1(l) = z_1(l), \quad l \in [0; L].$$

Таке рівняння дуги \widehat{AB} називають *нормальним рівнянням* цієї дуги.

3.1.7. Використання комп'ютерних засобів математики. У даному підрозділі системи комп'ютерної математики можна використовувати, в основному, для графічного зображення кривих і для обчислення їх довжин за формулами (4) – (6) пункту 3.1.4.

3.1.7.1. Використання Gran1. Програма Gran1 є зручним засобом при вивченні даної теми, оскільки за її допомогою можна зображати дуги кривих, заданих явно, неявно, параметрично чи в полярних координатах, а також знаходити наближено довжини цих дуг. При побудові кривої є можливість задавати масштаб, змінювати колір і товщину ліній, включати/виключати зображення системи координат (яка може бути декартовою чи полярною) тощо. Спосіб задання кривої обирається у вікні “Список об'єктів” (рис. 3.1.6):

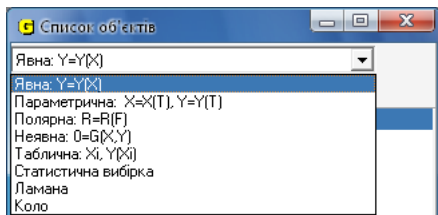


Рис. 3.1.6.

Регулювання вигляду кривої здійснюється через меню **Графік** > **Параметри вікна "Графік"...**, а для обчислення довжини дуги потрібно вибрати пункт меню **Операції** > **Інтеграли** > **Довжина дуги**.

Дуже корисною є можливість зображення кількох кривих на одному графіку, а також можливість динамічної зміни вигляду кривої за рахунок зміни певних параметрів.

Розглянемо приклади обчислення довжин дуг, заданих явно, параметрично чи в полярних координатах, за допомогою програми Gran1. При цьому кожен криву спочатку зобразимо графічно.

Приклад 1. Обчислимо довжину ланцюгової лінії $y = 2(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}})$ від точки $x = 0$ до точки $x = 4$.

Щоб краще уявити форму ланцюгової лінії, спочатку зобразимо тоншою лінією її дугу, яка відповідає відрізку $[-5; 5]$, а потім товщою лінією задану дугу, яка відповідає відрізку $[0; 4]$ (рис. 3.1.7).

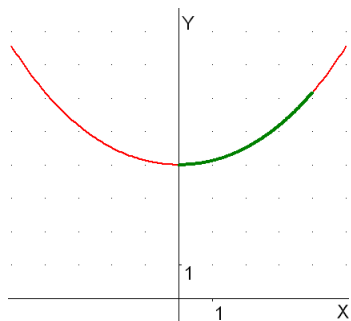


Рис. 3.1.7.

Після цього знайдемо шукану довжину дуги: $L = 4,7008$.

Зауваження. При застосуванні програми Gran1 до обчислення довжини кривої потрібно самостійно вирішувати питання, чи є задана крива спрямлюваною. За програмою Gran1 робиться спроба обчислити довжину будь-якої коректно заданої кривої. Так, якщо спробувати обчислити довжину кривої $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $x \in (0; 1]$, $f(0) = 0$ (зображеної на рис. 3.1.8), то за програмою Gran1 буде отримано результат $L = 2.784$. Проте, як було показано у прикладі 1 пункту 3.1.3, дана крива не є спрямлюваною і правильний результат обчислення її довжини мав би бути таким: $L = +\infty$.

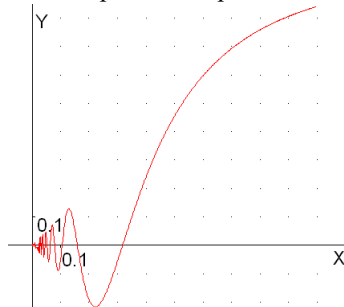


Рис. 3.1.8.

Приклад 2. Обчислимо довжину дуги *астроїди*:

$$\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \quad t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$$

Вказуємо у вікні “Список об’єктів” тип задання кривої: параметрична.

Створюємо новий об’єкт, ввівши задані рівняння і відрізок.

Будуємо задану криву (рис. 3.1.9).

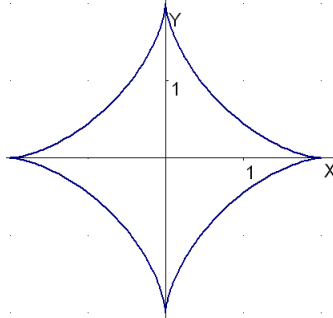


Рис. 3.1.9.

Обчислимо її довжину: $L = 11.99998$.

Приклад 3. Обчислимо довжину *трипелюсткової троянди*: $\rho = \cos 3t$, $t \in [0; 2\pi]$.

Цього разу крива задана у полярній системі координат. Тому вказуємо у вікні “Список об’єктів” тип системи координат: полярна. Задаючи рівняння кривої через меню “Об’єкт”, обов’язково позначаємо аргумент літерою F .

За програмою *Gran1* координата ρ може набувати як додатних значень, так і від’ємних. Якщо $\rho < 0$, то точка M_t , яка відповідає полярному куту t , відкладається на промені Ot у від’ємному напрямку на відстань $|\rho(t)|$ (рис. 3.1.10).

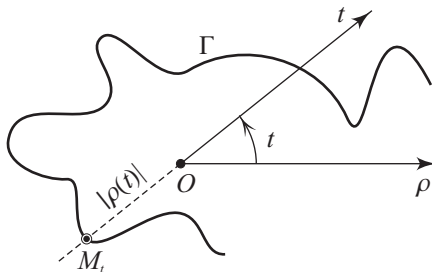


Рис. 3.1.10.

Тому, враховуючи, що функція $\cos 3t$ парна, прийдемо до висновку, що вся трипелюсткова троянда отримується, коли $t \in [0; \pi]$ (рис. 3.1.11).

Для відображення на екрані полярної системи координат доцільно налаштувати властивості вікна “Графік” так, як показано на рис. 3.1.12.

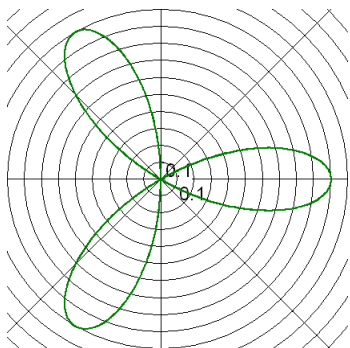


Рис. 3.1.11.

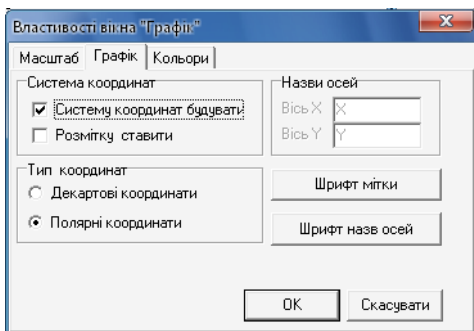


Рис. 3.1.12.

Обчислюємо довжину заданої “троянди”: $L = 6.68206$.

У зв'язку з відсутністю обмеження $\rho \geq 0$ при полярному заданні кривих у цих кривих можуть з'являтися зайві частини. Наприклад, “двопелюсткова троянда” $R = \cos(2F)$ зображається з чотирма пелюстками (рис. 3.1.13). Для зображення даної кривої у відповідності з класичним полярним заданням (рис. 3.1.14) можна записати її рівняння так: $R = (\sqrt{\cos(2F)})^2$.

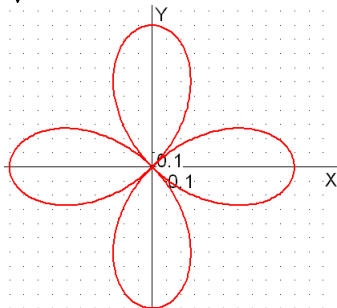


Рис. 3.1.13.

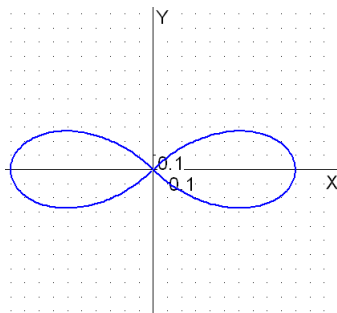


Рис. 3.1.14.

При цьому довжини цих кривих є такими: $L_1 = 9.68712$, $L_2 = 4.8043$.

Зауважимо також, що є такі навіть явно задані функції, що тільки графічно передати особливості їх поведінки неможливо! Для них потрібно проводити додаткові дослідження.

Наприклад, якщо взяти функцію $f(x) = \cos \ln x$, $x \in (0; +\infty)$, і задати відрізок $[0; 100]$, то за програмою Gran1 буде побудовано графік, показаний на рис. 3.1.15.

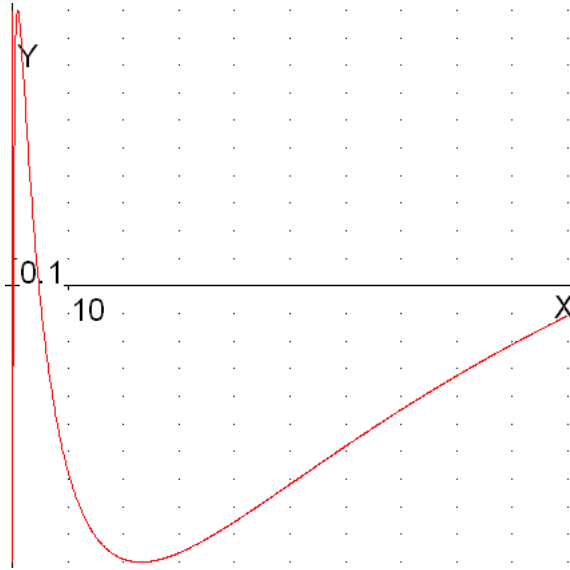


Рис. 3.1.15.

Значення цієї функції коливаються між -1 і 1 , причому точки повтору пов'язані рівністю $t = t_k = e^{2k\pi}x$, $k \in \mathbb{Z}$. Тому відстань між ними стає або дуже великою, коли рухатися вправо, або дуже малою, коли рухатися вліво. Наприклад, для точки $x = 1$ перша точка повтору справа $t_1 \approx 535$, друга $t_2 \approx 286751$; вліво першою йде точка повтору $t_{-1} \approx 0,002$, а другою $t_{-2} \approx 3 \cdot 10^{-6}$. Зрозуміло, що побачити на графіку такої функції хоча б три хвили коливань проблематично.

3.1.7.2. Використання Махіма. За програмою Махіма можна обчислювати довжини дуг, заданих явно, параметрично чи в полярній системі координат, за формулами (4) – (6) пункту 3.1.4. На відміну від Gran1, Махіма не містить готових команд для обчислення довжин кривих. Проте у ній можна одержувати точні значення довжин кривих у символьному поданні. Крім того, можна знаходити наближені значення довжин кривих у вигляді довжин вписаних ламаних (що можна робити і при використанні програми Gran1). Цим самим ілюструється також суть поняття довжини дуги. При обчисленні довжин кривих доцільно зображати ці криві графічно. У системі Махіма є достатньо засобів для цього.

Задача 1. *Зобразити криву $y = x^2$, $x \in [-1; 2]$, і вписану в неї ламану. Обчислити довжину цієї кривої точно і наближено, як довжину вписаної ламаної, що відповідає розбиттю відрізка $[-1; 2]$ на $n = 10$, $n = 20$ і $n = 50$ рівних частин.*

□ Введемо функцію $f(x)$, відрізок $[a; b]$; визначимо точки $x(n, k)$ роз-

биття відрізка $[a; b]$ на n рівних частин; знайдемо довжини $l(n, k)$ ланок ламаної, вписаної у криву $y = f(x)$, і загальну довжину $p(n)$ цієї ламаної. Все це зробимо за допомогою макрокоманди:

```
(%i1) f(x):=x^2$ a:-1$ b:2$
      x(n,k):=a+k*(b-a)/n$
      l(n,k):=sqrt((x(n,k+1)-x(n,k))^2+(f(x(n,k+1))-f(x(n,k)))^2)$
      p(n):=sum(l(n,k),k,0,n-1)$
```

Для зображення ламаної скористаємось командою `points(X,Y)` пакету `draw` з параметром `points_joined=true`. Попередньо створимо списки $X = X(n)$ – абсцис та $Y = Y(n)$ – ординат вершин ламаної:

```
(%i7) X(n):=makelist(x(n,k),k,0,n)$
(%i7) Y(n):=makelist(f(x(n,k)),k,0,n)$
```

Зобразимо задану криву і вписану в неї 7-ланкову ламану (рис. 3.1.16).

```
(%i8) load(draw)$
      draw2d(nticks=200,
      proportional_axes=xy,
      transparent=true,points_joined=true, point_type=none,
      line_width=2,color=red,points(X(7),Y(7)), color=blue,
      explicit(x^2,x,-1,2) )$
```

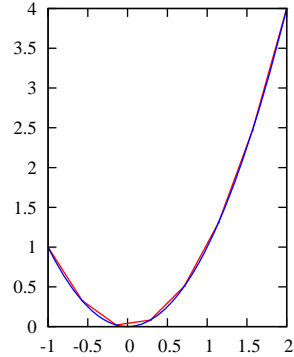


Рис. 3.1.16.

Обчислимо точне значення довжини заданої кривої за формулою (6):

```
(%i9) s:integrate(sqrt(1+diff(f(x),x)^2),x,a,b);
(%o9)  $\frac{\operatorname{asinh}(4)+4\sqrt{17}}{4} + \frac{\operatorname{asinh}(2)+2\sqrt{5}}{4}$ 
(%i10) %,numer
(%o10) 6.125726619977533
```

Знайдемо і подамо одним списком довжини ламаних, які складаються з 10, 20 і 50 ланок:

```
(%i11) [p(10),p(20),p(50)],numer;
(%o11) [6.11173222783138, 6.12222997731457, 6.12516723429138]
```

Тут помітно, що при подрібненні ланок ламаної збільшується точність наближення до довжини дуги.

Поставимо додаткове питання: яким повинен бути найменший номер n , при якому довжина s заданої дуги відрізняється від довжини $p(n)$ вписаної в неї ламаної менше, ніж на 10^{-3} ?

Для відповіді на це запитання виконаємо таку програмку:

```
(%i12) block([n],n:1,for i:1 step 1 unless s-p(i)<10^(-3) do n:n+1,n);
(%o12) 38
```

Ця програмка придатна для використання у випадку, коли точність наближення, що задається, не перевищує 10^{-5} . ■

Зауважимо, що обчислити границю побудованої послідовності $p(n)$, коли $n \rightarrow \infty$, за допомогою Махіта не вдається (хоча вихідна функція була досить простою). Це пов'язано з труднощами при спрощуванні сум.

Задача 2. Обчислити довжину однієї арки циклоїди $x = R(t - \sin t)$, $y = R(1 - \cos t)$, $t \in [0; 2\pi]$, і зобразити цю арку при $R = 1$.

□ Вводимо параметричні рівняння кривої та відрізок:

```
(%i1) x:R*(t-sin(t))$ y:R*(1-cos(t))$ a:0$ b:2*%pi$
```

Обчислюємо довжину кривої за формулою (5):

```
(%i5) integrate(sqrt(diff(x,t)^2+diff(y,t)^2),t,a,b);
```

Is R positive or negative? p;

```
(%o5) 8R
```

Зображуємо арку циклоїди у випадку $R = 1$ і коло, що її породжує (рис. 3.1.17):

```
(%i6) load(draw)$ R:1$
draw2d(proportional_axes=xy,
ytics=[0,1,2],nticks=200,transparent=true,
line_width=2,color=green,ellipse(0,1,1,1,0,360),
line_width=3,color=red,parametric(x,y,t,a,b))$
```

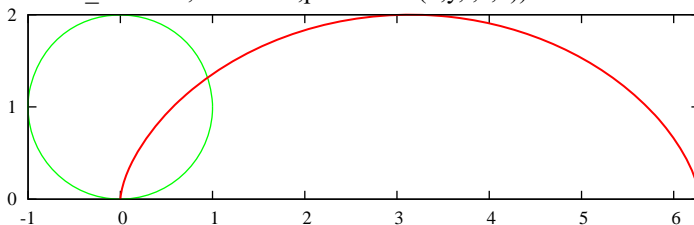


Рис. 3.1.17.

У цій задачі, як і в попередній, можна було б теж визначити довжини вписаних у криву ламаних і знаходити наближене значення довжини дуги за допомогою довжин цих ламаних. ■

Задача 3. Обчислити довжину кривої $\rho = c \sin^3 \frac{t}{3}$, $t \in [0; 3\pi]$, і зобразити цю криву при $c = 1$.

□ Вводимо полярне рівняння кривої та відрізок:

```
(%i1) r:c*sin(t/3)^3$ a:0$ b:3*%pi$
```

Обчислюємо довжину кривої за формулою (6):

```
(%i4) 'integrate(sqrt(r^2+diff(r,t)^2),t,a,b);
```

Поставивши апостроф біля інтеграла, дістаємо можливість не відразу отримати відповідь, а подивитися на підінтегральну функцію і поетапно її спростити:

```
(%o4) ∫03π √(c2 sin(t/3)6 + c2 cos(t/3)2 sin(t/3)4) dt
```

```
(%i5) factor(%);
```

$$|c| \int_0^{3\pi} \sin\left(\frac{t}{3}\right)^2 \sqrt{\sin\left(\frac{t}{3}\right)^2 + \cos\left(\frac{t}{3}\right)^2} dt$$

```
(%i6) assume(c>0)$
(%i7) trigsimp(%o5);
(%o7) c \int_0^{3\pi} \sin\left(\frac{t}{3}\right)^2 dt
(%i8) %, nouns;
(%o8) \frac{3\pi c}{2}
```

Довжину кривої обчислено. Зобразимо цю криву (при $c = 1$), склавши її з трьох частин, щоб краще уявити, яким чином рухається по ній біжуча точка при зміні параметра t (рис. 3.1.18).

```
(%i9) load(draw)$ c:1$
(%i10) draw2d(proportional_axes=xy, nticks=1000, line_width=5,
color=forest-green, polar(r,t,0,2*%pi),
color=red, polar(r,t,2*%pi,2.5*%pi),
color=gold, polar(r,t,2.5*%pi,3*%pi) )$ ■
```

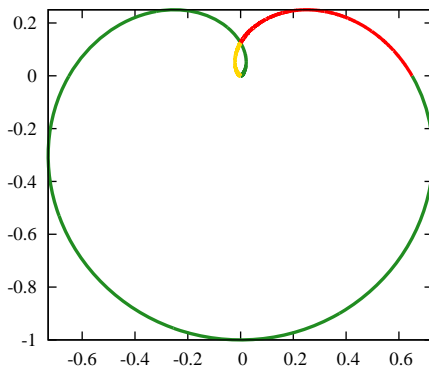


Рис. 3.1.18.

Система Maxima, як і Gran1, налаштована таким чином, що при побудові кривої Γ : $\rho = \rho(t)$, $t \in [a; b]$, у полярній системі координат допускаються не тільки невід’ємні значення $\rho(t)$, а й від’ємні. Якщо притримуватися умови, що координата ρ обов’язково має бути додатною, то потрібно відкидати ті частини кривої Γ , для яких $\rho(t) < 0$. Це можна зробити, задаючи лише такі проміжки $[a; b] \ni t$, для яких $\rho(t) \geq 0$. Але це потребує додаткових досліджень функції $\rho(t)$ і часто призводить до того, що для побудови однієї кривої потрібно задавати кілька команд polar.

Подання функції $\rho(t)$ у вигляді $(\sqrt{\rho(t)})^2$ не приводить до відкидання від’ємних значень, оскільки воно автоматично спрощується до початкового вигляду.

У випадку, коли “додатні” і “від’ємні” петлі кривої починаються і закінчуються в початку координат, “від’ємні” петлі можна відкинути, ввівши допоміжну функцію

$$\rho_1(t) := \begin{cases} \rho(t), & \text{коли } \rho(t) \geq 0, \\ 0, & \text{коли } \rho(t) < 0. \end{cases}$$

Полярний графік функції $\rho_1(t)$, побудований за допомогою Maxima, буде правильним полярним графіком функції $\rho(t)$.

Продемонструємо побудову 4-пелюсткової троянди $\rho = \sin 4t$, $t \in [0; 2\pi]$, коли на ρ не накладається ніяких обмежень (рис. 3.1.19), і коли виконана умова $\rho \geq 0$ (рис. 3.1.20).

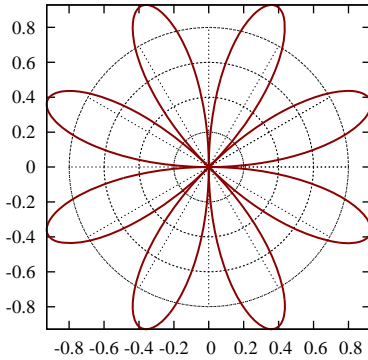


Рис. 3.1.19.

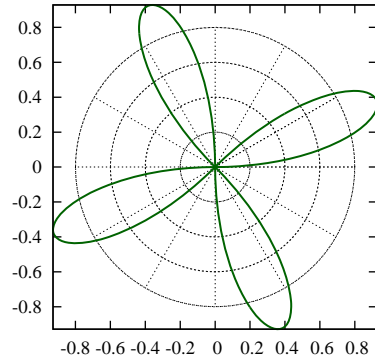


Рис. 3.1.20.

Наведемо команди, за допомогою яких одержано ці побудови:

```
(%i11) r(t):=sin(4*t)$
(%i12) r1(t):=if sin(4*t)>=0 then sin(4*t) else sqrt(sin(4*t))$
(%i13) draw2d(user_preamble="set grid polar",proportional_axes=xy,
nticks=1000,line_width=3,color=dark-red,polar(r(t),t,0,2*%pi))$
(%i14) draw2d(user_preamble="set grid polar",proportional_axes=xy,
nticks=1000,line_width=3,color=dark-green,polar(r1(t),t,0,2*%pi))$
```

При використанні пакету draw досить зручно налаштувати вигляд графіка. Разом з тим у цього пакету є *дві особливості*, через які не завжди отримуються бажані результати побудов: 1) яка б не була функція $f(x)$, замість неї береться $\text{Re } f(x)$ і цю опцію неможливо відключити; 2) при зверненні до команди implicit, parametric і polar вимагається, щоб функції, до яких вони застосовуються, були визначені на суцільних проміжках; а команда explicit хоч і застосовна до функцій, які визначені на розрізнених частинах проміжку, але сусідні частини графіка з'єднуються відрізками. На рисунках 3.1.21 і 3.1.22 показано ці особливості:

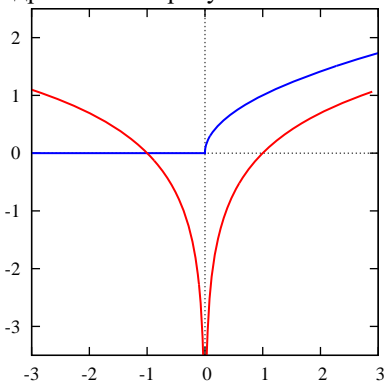


Рис. 3.1.21.

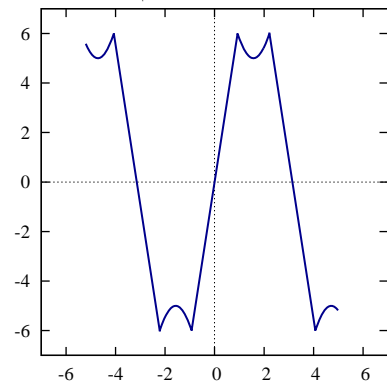


Рис. 3.1.22.

Ці графіки одержані за допомогою таких команд:

```
(%i15) draw2d(proportional_axes=xy,xaxis=true,yaxis=true,nticks=1000,
  line_width=3,color=blue,explicit(sqrt(x),x,-3,3),
  color=red,explicit(log(x),x,-3,3),yrange=[-3.5,2.5])$
```

```
(%i16) draw2d(proportional_axes=xy,xaxis=true,yaxis=true,nticks=1000,
  line_width=3,color=dark-blue,xrange=[-7,7],yrange=[-7,7],
  explicit(if abs(5*sin(x))>4
    then 10*signum(sin(x))-5*sin(x),x,-2*%pi,2*%pi))$
```

У таких випадках доцільніше замість пакету draw скористатися вбудованою командою побудови графіків plot2d. Шляхом задання додаткових параметрів у цій команді можна одержувати майже такі самі графічні побудови, як і при використанні пакету draw. При цьому використання команди plot2d не приводить до вказаних вище двох недоліків.

Перемалюємо, наприклад, наведені вище два графіки, використовуючи такі команди:

```
(%i17) plot2d([sqrt(x),log(x)],[x,-3,3],[y,-3.5,2.5],[legend,false],
  [gnuplot_preamble,"set size ratio 1"],[nticks,1000],
  [style,[lines,3]],[xlabel,""],[ylabel,""]);
```

```
(%i18) plot2d(if abs(5*sin(t))>4 then 10*signum(sin(t))-5*sin(t),
  [t,-2*%pi,2*%pi],[x,-7,7],[y,-7,7],[legend,false],[xlabel,""],
  [ylabel,""],[gnuplot_preamble,"set size ratio 1;set grid"],
  [nticks,1000],[color,dark-blue],[style,[lines,3]]);
```

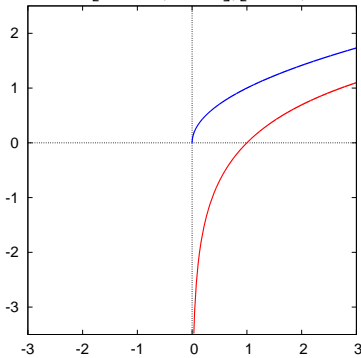


Рис. 3.1.23.

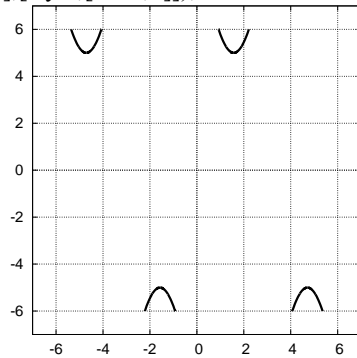


Рис. 3.1.24.

Графіки, наведені на рисунках 3.1.23 і 3.1.24, побудовані коректно.

Наведемо ще один малюнок, на якому зображено три криві у полярній системі координат за допомогою команди plot2d. При цьому застосуємо цілу низку додаткових параметрів, від яких залежить кінцевий вигляд графіка. Незважаючи на те, що дві криві задані розривними функціями,

отримане зображення є правильним і красивим (рис. 3.1.25).

```
(%19) r1(t):=if sin(16*t)>=0.5
      then sin(16*t)$
r2(t):=if -sin(16*t)>=0.5
      then 0.25-sin(16*t)/2$
r3(t):=(sin(16*t)+1.235)^(1/8)*0.915$
plot2d([r1(t),r2(t),r3(t)],[t,0,2*%pi],
[x,-1.1,1.1],[y,-1.1,1.1],[nticks,1000],
[color,red,blue,magenta],
[style,[lines,4],[lines,4],[lines,6]],
[legend,false],[xlabel,""],[ylabel,""],
[gnuplot_preamble,"set size ratio 1;
set polar;set grid polar"])$
```

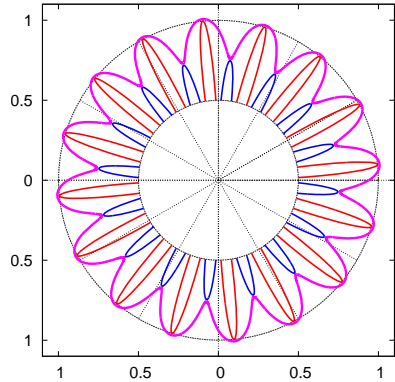


Рис. 3.1.25.

3.1.8. Завдання для виконання за допомогою комп'ютера.

1. Знайти кривину та радіус кривини: 1) кола; 2) гіперболи $y^2 - x^2 = 1$; 3) відрізка прямої; 4) параболи $y = x^2$.
2. За допомогою дуг відомих кривих зобразити цікаві малюнки та орнаменти.
3. Самостійно задати неспрямлювану дугу і з'ясувати, яка відповідь отримується при застосуванні комп'ютерного засобу математики до обчислення довжини цієї дуги.

3.2. Обчислення площ плоских фігур

3.2.1. Поняття плоскої фігури та її площі. Якщо плоска фігура є прямокутником P , то *площею* $S(P)$ цього *прямокутника* називають добуток його вимірів, тобто довжин його двох взаємно перпендикулярних сторін. Зокрема, якщо прямокутник P лежить у площині OXY і $P = \{(x; y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, то P називають *елементарною фігурою* і $S(P) = (b - a) \cdot (d - c)$.

У випадку $a = b$ або $c = d$ елементарна фігура перетворюється на відрізок, площа якого за означенням дорівнює нулю.

Якщо з елементарної фігури P вилучити довільну множину E , що лежить на межі P , то утворену фігуру також називають *елементарною* і вона за означенням має ту саму площу, що й елементарна фігура P .

Нехай Φ – довільна плоска фігура. *Що розуміти під площею цієї фігури і як цю площу можна обчислити?*

Щоб відповісти на це питання, вважатимемо фігуру Φ обмеженою, тобто $\Phi \subset P = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ для деякого прямокутника P (рис. 3.2.1).

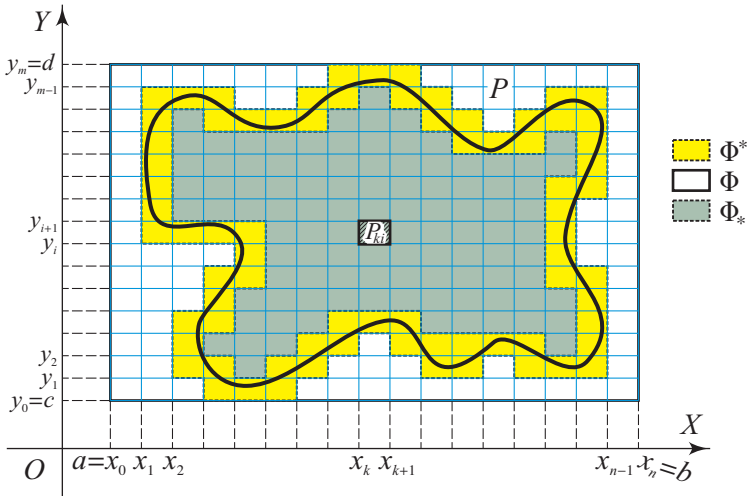


Рис. 3.2.1.

Розглянемо розбиття T_x відрізка $[a; b]$ точками $x_k, k \in \overline{0, n}$, і розбиття T_y відрізка $[c; d]$ точками $y_i, i \in \overline{0, m}$. Прямими $x = x_k$ і $y = y_i$ прямокутник P поділиться на прямокутники $P_{ki} = \{(x, y): x_k \leq x \leq x_{k+1}, y_i \leq y \leq y_{i+1}\}, k \in \overline{0, n-1}, i \in \overline{0, m-1}$. Сукупність усіх цих прямих назовемо *розбиттям T прямокутника P* . Утворимо фігури $\Phi_*(T)$ і $\Phi^*(T)$ так: Φ_* складемо з усіх прямокутників P_{ki} , які цілком лежать у фігурі Φ , а Φ^* складемо з усіх прямокутників, які містять принаймні одну точку з фігури Φ . Отже, $\Phi_*(T) = \bigcup_{P_{ki} \subset \Phi} P_{ki}$, а $\Phi^*(T) = \bigcup_{P_{ki} \cap \Phi \neq \emptyset} P_{ki}$.

Фігури $\Phi_*(T)$ та $\Phi^*(T)$ (що є об'єднаннями елементарних фігур) називають *простими*. При цьому можливо, що $\Phi_*(T) = \emptyset$, але $\Phi^*(T) = \emptyset \Leftrightarrow \Phi = \emptyset$. Шляхом вилучення з елементарних фігур деяких частин їх меж можна досягти того, щоб *кожна проста фігура була об'єднанням скінченної кількості елементарних фігур, що попарно не перетинаються*.

Легко бачити, що різниця двох простих фігур, об'єднання і переріз довільної скінченної кількості простих фігур також є простою фігурою.

Природно вважати також, що *площа простих фігур $\Phi_*(T)$ і $\Phi^*(T)$ за означенням дорівнює сумі площ тих прямокутників P_{ki} , з яких утворено цю фігуру*. Позначимо ці площі відповідно $S(\Phi_*(T)) = S_*(T)$ і $S(\Phi^*(T)) = S^*(T)$, тобто

$$S_*(T) = \sum_{P_{ki} \subset \Phi} S(P_{ki}), \quad \text{а} \quad S^*(T) = \sum_{P_{ki} \cap \Phi \neq \emptyset} S(P_{ki}).$$

Якщо $\Phi_*(T) = \emptyset$ або $\Phi^*(T) = \emptyset$, то вважають $S_*(T) = 0$ або $S^*(T) = 0$.

Неважко показати, що які б не були розбиття T і T' прямокутника P , завжди матимемо $\Phi_*(T) \subset \Phi^*(T)$ і $S_*(T) \leq S^*(T')$. Тому існують числа

$$S_*(\Phi) = \sup_T S_*(T) \text{ і } S^*(\Phi) = \inf_T S^*(T),$$

які називають відповідно *внутрішньою* і *зовнішньою* площами фігури Φ . При цьому

$$S_*(T) \leq S_*(\Phi) \leq S^*(\Phi) \leq S^*(T') \quad \forall T \text{ і } T'.$$

Фігуру Φ називають *квадровною* або *вимірною за Жорданом*, якщо $S_*(\Phi) = S^*(\Phi)$. При цьому число $S(\Phi) := S(\Phi_*) = S(\Phi^*)$ називають *площею* або *мірою Жордана* фігури Φ . Якщо $S_*(\Phi) < S^*(\Phi)$, то фігуру Φ називають *неквадровною* або *невимірною за Жорданом* і вона площі не має.

Приклади. 1. Зрозуміло, що фігура Φ , яка є порожньою множиною, квадратна і $S(\Phi) = 0$.

2. Кожна скінченна плоска множина $\Phi = \{(x_k, y_k): k \in \overline{1, n}\}$ є квадратною множиною і $S(\Phi) = 0$.

3. Нехай $\Phi = \{(x, y): x \text{ та } y \in \mathbb{Q} \cap [0; 1]\}$. Тоді $\Phi \subset K = \{(x, y): x, y \in [0; 1]\}$ і для будь-якого розбиття T квадрата K маємо $\Phi_*(T) = \emptyset$, $\Phi^*(T) = K \Rightarrow S_*(\Phi) = 0$ і $S^*(\Phi) = 1$, тобто Φ не є квадратною фігурою.

3.2.2. Критерії квадратності.

Теорема 1 (перший критерій квадратності). *Для того щоб обмежена плоска фігура Φ була квадратною, необхідно й досить, щоб $\forall \varepsilon > 0$ існували прості фігури Φ_* і Φ^* такі, що $\Phi_* \subset \Phi \subset \Phi^*$ і $0 \leq S(\Phi^*) - S(\Phi_*) < \varepsilon$. При цьому $S(\Phi_*) \leq S(\Phi) \leq S(\Phi^*)$.*

Приклад 4. Нехай $\Gamma_f = \{(x, y): x \in [a; b], y = f(x)\}$, де функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, тобто Γ_f є графіком функції, неперервної на відрізку, або, іншими словами, Γ_f є неперервною дугою, заданою явно. Використовуючи теорему 1, можна довести, що Γ_f є квадратною множиною і $S(\Gamma_f) = 0$.

Теорема 2 (другий критерій квадратності). *Обмежена плоска фігура Φ є квадратною тоді й тільки тоді, коли квадратною є її межа Γ_Φ і $S(\Gamma_\Phi) = 0$.*

Виявляється, що в теоремі 1 прості фігури Φ_* і Φ^* можна замінити довільними квадратними фігурами Φ_1 та Φ_2 .

Теорема 3 (третій критерій квадратності). *Обмежена плоска фігура Φ є квадратною тоді й тільки тоді, коли для довільного $\varepsilon > 0$ існують квадратні фігури Φ_1 і Φ_2 такі, що $\Phi_1 \subset \Phi \subset \Phi_2$ і $0 \leq S(\Phi_2) - S(\Phi_1) < \varepsilon$. При цьому $S(\Phi_1) \leq S(\Phi) \leq S(\Phi_2)$.*

З теореми 3 з очевидністю випливає досить важливий наслідок.

Наслідок 1 (про повноту площі). *Якщо множина $E \subset \mathbb{R}^2$ квадратна і $S(E) = 0$, то будь-яка її підмножина $A \subset E$ також квадратна і має*

площу $S(A) = 0$.

Приклад 5. Множину $M \subset \mathbb{R}^2$ називають *одновимірною*, якщо вона є підмножиною деякої прямої l . Завдяки наслідку 1 буде правильним таке твердження: *довільна обмежена одновимірна множина M є квадратною, а її площа $S(M) = 0$.*

3.2.3. Основні та вивідні властивості квадратних фігур і площі.

Безпосередньо з означення квадратної фігури та її площі або з критеріїв квадратності впливають властивості квадратних фігур і площі. Позначимо через \mathfrak{S}_S сукупність квадратних фігур.

Властивість 1 (про непорожність \mathfrak{S}_S і невід’ємність площі). *Сукупність $\mathfrak{S}_S \neq \emptyset$ і $S(\Phi) \geq 0$ для будь-якої фігури $\Phi \in \mathfrak{S}_S$.*

Властивість 2 (про квадратність доповнення). *Якщо Φ_1 – квадратна фігура, причому $\Phi_1 \subset P$, де P – елементарний прямокутник, то $P \setminus \Phi_1 = C_P \Phi_1 = \Phi_2$ – квадратна фігура і*

$$S(\Phi_2) = S(P) - S(\Phi_1).$$

Властивість 3 (про адитивність площі). *Якщо фігури Φ_1 і Φ_2 квадратні, то і фігура $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ є квадратною, причому коли Φ_1 і Φ_2 не мають спільних точок, то $S(\Phi) = S(\Phi_1) + S(\Phi_2)$.*

За методом математичної індукції властивість адитивності площі узагальнюється на випадок довільної скінченної кількості квадратних фігур $\Phi_i, i \in \overline{1, n}$, що попарно не мають спільних точок:

$$S\left(\bigcup_{i=1}^n \Phi_i\right) = \sum_{i=1}^n S(\Phi_i).$$

Властивості 1 – 3 називають *основними*, тому що з них випливають усі інші властивості площі. Наведемо деякі з них.

Властивість 4 (про квадратність перерізу). *Переріз двох квадратних фігур є квадратною фігурою.*

Властивість 5 (про площу об’єднання). *Якщо фігури Φ_1 і Φ_2 квадратні, то $S(\Phi_1 \cup \Phi_2) = S(\Phi_1) + S(\Phi_2) - S(\Phi_1 \cap \Phi_2)$.*

Властивість 6 (про площу різниці). *Якщо фігури Φ_1 і Φ_2 квадратні, то й різниця $\Phi_1 \setminus \Phi_2$ є квадратною множиною і $S(\Phi_1 \setminus \Phi_2) = S(\Phi_1) - S(\Phi_1 \cap \Phi_2)$.*

Властивість 7 (про монотонність площі). *Якщо фігури Φ_1 і Φ_2 квадратні і $\Phi_1 \subset \Phi_2$, то $S(\Phi_2 \setminus \Phi_1) = S(\Phi_2) - S(\Phi_1) \geq 0$ і тому $S(\Phi_1) \leq S(\Phi_2)$.*

3.2.4. Площа узагальненої криволінійної трапеції. Нехай функції f_1 і f_2 інтегровні за Ріманом на відрізку $[a; b]$ і $f_1(x) \leq f_2(x) \forall x \in [a; b]$. Розглянемо фігуру (рис. 3.2.2)

$$\Phi = \{(x, y): x \in [a; b], f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}. \quad (1)$$

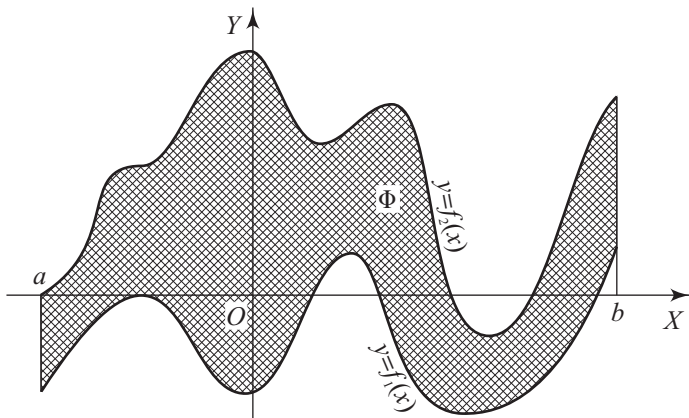


Рис. 3.2.2.

Цю фігуру називають *узагальненою криволінійною трапецією*, оскільки вона перетворюється на криволінійну трапецію, коли $f_1 = 0$, а f_2 невід'ємна і неперервна на $[a; b]$.

Будь-яка узагальнена криволінійна трапеція (1) є кватральною фігурою, а її площу можна обчислити за формулою

$$S(\Phi) = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (2)$$

Зокрема, якщо $\Phi = \{(x, y): x \in [a; b], 0 \leq y \leq f(x)\}$ – криволінійна трапеція, то вона є кватральною, а її площа $S(\Phi) = \int_a^b f(x) dx$.

Приклад 6. Застосуємо формулу (2) для обчислення площі трикутника з основою a і висотою h . Виберемо систему координат так, як це показано на рис. 3.2.3.

Тоді за формулою (5)

$$S(\triangle OAB) = \int_0^h \left(\frac{a-b}{h}x + \frac{b}{h}x \right) dx = \frac{a}{h} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^h = \frac{1}{2} a \cdot h$$

– це відома зі школи формула площі трикутника.

Оскільки $h = |OA| \cdot \sin \alpha$, то $S(\triangle OAB) = \frac{1}{2} |AB| \cdot |OA| \cdot \sin \alpha$.

Зауваження. 1. Якщо з даного трикутника вилучити будь-яку множину його межових точок, то дістанемо фігуру, яку називають *трикутною* і яка має ту саму площу, що й даний трикутник.

2. При введенні поняття кватральної фігури можна вважати елементарними фігурами довільні трикутники. При цьому площа трикутника дорівнює половині добутку основи на висоту за означенням. Тоді кожен

прямокутник буде простою фігурою, а його площа дорівнюватиме добутку його вимірів.

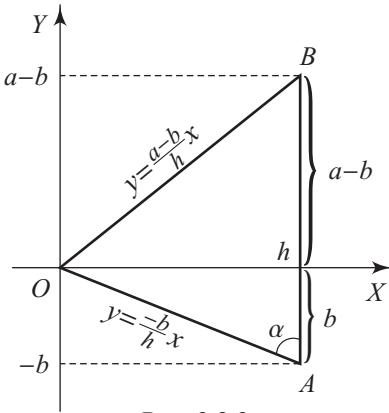


Рис. 3.2.3.

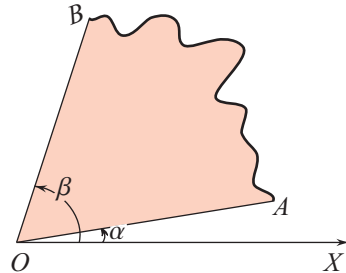


Рис. 3.2.4.

3.2.5. Площа криволінійного сектора. Нехай проста дуга \widehat{AB} задана рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$. Тоді фігуру $\Phi = \{(t, \rho): \alpha \leq t \leq \beta, 0 \leq \rho \leq \rho(t)\}$ називають *криволінійним сектором* (рис. 3.2.4). Зокрема, коли \widehat{AB} – дуга кола: $\rho = r$, $t \in [\alpha; \beta]$, то фігура Φ – звичайний круговий сектор.

Будь-який криволінійний сектор є квадратною фігурою і його площу можна обчислити за формулою

$$S(\Phi) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(t) dt. \quad (3)$$

Приклад 7. Застосуємо формулу (3) до обчислення площі кругового сектора: $\rho = r$, $t \in [\alpha; \beta]$. Маємо: $S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 dt = \frac{r^2}{2} (\beta - \alpha) = \frac{r^2}{2} \varphi$, де $\varphi = \beta - \alpha$ – величина центрального кута, за яким визначається даний сектор. Зокрема, площа круга $S = \frac{r^2}{2} \cdot 2\pi = \pi r^2$.

3.2.6. Використання комп'ютерних засобів математики. Для практичного обчислення площ фігур потрібно ці фігури певним чином задавати. Основним способом аналітичного задання плоских фігур є подання їх або їхніх частин у вигляді узагальнених криволінійних трапецій. Обчислення ж площі узагальненої криволінійної трапеції по суті нічим не відрізняється від обчислення площі звичайної криволінійної трапеції. Тому використовувати комп'ютер при вивченні даної теми можна аналогічно до того, як це описано в пункті 2.1.11.

3.2.7. Завдання для виконання за допомогою комп'ютера.

1. Зобразити обмежену плоску фігуру Φ та відповідні прості фігури Φ_* та Φ^* і знайти їх площі. Дослідити поведінку цих площ, коли дрібність розбиття T зменшується.
2. Зобразити задану самостійно узагальнену криволінійну трапецію і обчислити її площу.
3. Зобразити заданий самостійно криволінійний сектор і обчислити його площу.

3.3. Обчислення об'єму просторової фігури

3.3.1. Поняття просторової фігури та її об'єму. *Просторовою фігурою* або просто *фігурою* називатимемо довільну множину точок тривимірного простору. Якщо фігура Φ є прямокутним паралелепіпедом, то її *об'ємом* $V(\Phi)$ називають добуток його вимірів. Зокрема, якщо $\Phi = P = \{(x, y, z): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$, то $V(P) := (b - a)(d - c)(f - e)$ і такі прямокутні паралелепіпеди P називатимемо *елементарними фігурами* або *елементарними паралелепіпедами*.

Якщо з елементарної фігури вилучити довільну множину її межових точок, то отриману фігуру також називають *елементарною* і за означенням приймають, що вона має той самий об'єм, що й вихідна елементарна фігура.

Нехай Φ – довільна просторова фігура. *Що розуміти під об'ємом цієї фігури та як обчислити її об'єм?*

Щоб відповісти на поставлене питання вважатимемо, що фігура Φ обмежена, тобто $\Phi \subset P = \{(x, y, z): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$.

Візьмемо розбиття T_x відрізка $[a; b]$ точками $x_k, k \in \overline{0, n}$, розбиття T_y відрізка $[c; d]$ точками $y_i, i \in \overline{0, m}$, і розбиття T_z відрізка $[e; f]$ точками $z_j, j \in \overline{0, l}$. Сукупність усіх площин $x = x_k, y = y_i, z = z_j$ назвемо *розбиттям прямокутного паралелепіпеда P на елементарні паралелепіпеди* $P_{kij} = \{(x, y, z): x_k \leq x \leq x_{k+1}, y_i \leq y \leq y_{i+1}, z_j \leq z \leq z_{j+1}\}$, $k \in \overline{0, n-1}, i \in \overline{0, m-1}, j \in \overline{0, l-1}$, і позначимо це розбиття через T .

Утворимо так звані *прості фігури* $\Phi_* = \Phi_*(T)$, що складаються з усіх елементарних фігур P_{kij} , які повністю містяться у фігурі Φ , та $\Phi^* = \Phi^*(T)$, що складається з усіх елементарних фігур P_{kij} , які містять принаймні одну точку з фігури Φ . При цьому можливо, що $\Phi_*(T) = \emptyset$, але $\Phi^*(T) = \emptyset \Leftrightarrow \Phi = \emptyset$.

За означенням вважають, що *об'єм кожної простої фігури* – це сума об'ємів тих P_{kij} , які утворюють цю просту фігуру. Тоді об'єми фігур Φ_*

і Φ^* дорівнюватимуть

$$V(\Phi_*) = V_*(T) = \sum_{P_{kij} \subset \Phi} V(P_{kij})$$

та

$$V(\Phi^*) = V^*(T) = \sum_{P_{kij} \cap \Phi \neq \emptyset} V(P_{kij}).$$

Коли $\Phi_* = \emptyset$ ($\Phi^* = \emptyset$), то вважають $V(\Phi_*) = 0$ ($V(\Phi^*) = 0$).

Якщо T і T' – довільні розбиття елементарного паралелепіпеда $P \supset \Phi$, то $\Phi_*(T) \subset \Phi_*(T')$. Тому існують числа $V_*(\Phi) = \sup_T V_*(T)$ і $V^*(\Phi) = \inf_T V^*(T')$, які називають відповідно *внутрішнім* та *зовнішнім об'ємами фігури* Φ . При цьому

$$V_*(T) \leq V_*(\Phi) \leq V^*(\Phi) \leq V^*(T') \quad \forall T \text{ і } T'.$$

Просторову фігуру Φ називають *кубовною* або *вимірною за Жорданом*, якщо $V_*(\Phi) = V^*(\Phi)$. При цьому число

$$V(\Phi) = V_*(\Phi) = V^*(\Phi)$$

називають *об'ємом* або *мірою Жордана фігури* Φ .

Якщо $V_*(\Phi) < V^*(\Phi)$, то фігуру Φ називають *некубовною* або *невимірною за Жорданом* і вона об'єму не має.

3.3.2. Властивості кубовних фігур та об'ємів. Наведені у попередньому пункті міркування аналогічні до міркувань пункту 3.2.1, де визначалося поняття площі плоскої фігури. Тому природно чекати, що властивості об'єму такі самі, як і властивості площі.

Якщо у теоремах 1 – 3 з пункту 3.2.2 та у властивостях 1 – 7 з пункту 3.2.3 замінити слова “прямокутник”, “квадровність” і “площа” відповідно на слова “паралелепіпед”, “кубовність” і “об'єм”, то дістанемо критерії кубовності і властивості кубовних фігур та об'ємів. При цьому доведення одержаних тверджень по суті не зміняться.

Зауваження. Порівнюючи властивості спрямлюваних кривих і довжин, квадратних фігур і площ, кубовних фігур і об'ємів, бачимо, що вони є аналогічними. Це дає підстави ввести узагальнене поняття вимірної множини та її міри за допомогою основних (характеристичних) властивостей.

Нехай виділено систему \mathfrak{S} певних множин і задано функцію множин $\mu(\Phi)$, $\Phi \in \mathfrak{S}$. Тоді кожна множину $\Phi \in \mathfrak{S}$ називають *вимірною*, а число $\mu(\Phi)$ – *мірою множини* Φ , якщо виконуються такі три *основні (характеристичні) властивості*:

- 1_μ. Система \mathfrak{S} непорожня і $\mu(\Phi) \geq 0 \quad \forall \Phi \in \mathfrak{S}$.
- 2_μ. Якщо $\Phi \in \mathfrak{S}$ і $\Phi_1 \in \mathfrak{S}$, причому $\Phi_1 \subset \Phi$, то $\Phi_2 = \Phi \setminus \Phi_1 \in \mathfrak{S}$ і $\mu(\Phi_2) = \mu(\Phi) - \mu(\Phi_1)$.

3_μ. Якщо $\Phi_1 \in \mathfrak{S}$ і $\Phi_2 \in \mathfrak{S}$, то $\Phi_1 \cup \Phi_2 \in \mathfrak{S}$, причому

$$\mu(\Phi_1 \cup \Phi_2) = \mu(\Phi_1) + \mu(\Phi_2),$$

коли $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$.

3.3.3. Приклади кубовних та некубовних просторових фігур. 1.

Якщо фігура Φ – порожня множина, або довільна скінченна множина, або обмежена плоска фігура, то Φ – кубовна фігура і $V(\Phi) = 0$.

2. Якщо $\Phi = \{(x, y, z): x, y \text{ і } z \in \mathbb{Q} \cap [0; 1]\}$, то $V_*(\Phi) = 0$, а $V^*(\Phi) = 1$ і тому фігура Φ не є кубовною.

3. Нехай E – квадратна фігура, що лежить у площині OXY , $h > 0$, а $\Phi = \{(x, y, z): (x, y) \in E, 0 \leq z \leq h\}$ (рис. 3.3.1). Тоді фігуру Φ називають *прямим циліндром з основою E і висотою h* . Зокрема, якщо E – круг, то Φ – *прямий круговий циліндр*, або просто *циліндр*.

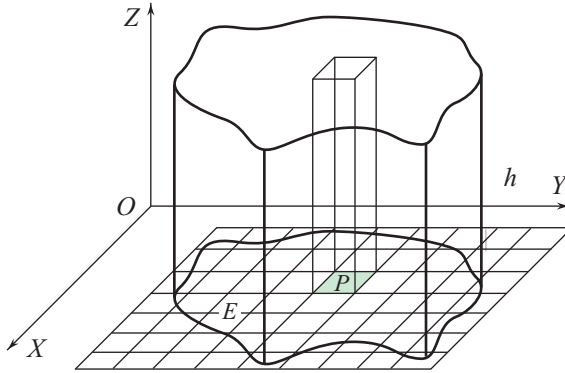


Рис. 3.3.1.

Кожен прямий циліндр Φ з основою E і висотою h є кубовною фігурою, причому $V(\Phi) = S(E) \cdot h$.

3.3.4. Принцип Кавальєрі. Припустимо, що фігура Φ лежить між площинами $x = a$ та $x = b$ і кожна площина $x = t$, де $t \in [a; b]$, в перетині з Φ дає квадратну фігуру E_t , площа якої $S(t)$ є неперервною функцією на $[a; b]$. Вважатимемо також, що проєкції різних перерізів E_t на площину $x = a$ обов'язково лежать одна в одній (рис. 3.3.2).

Використовуючи критерій кубовності, можна показати, що Φ є кубовним тілом, причому

$$V(\Phi) = \int_a^b S(x) dx. \quad (1)$$

З цієї формули випливає так званий **принцип Кавальєрі**: якщо перерізи двох кубовних фігур будь-якою площиною, що паралельна заданій площині, мають однакову площу, то і об'єми цих фігур однакові.

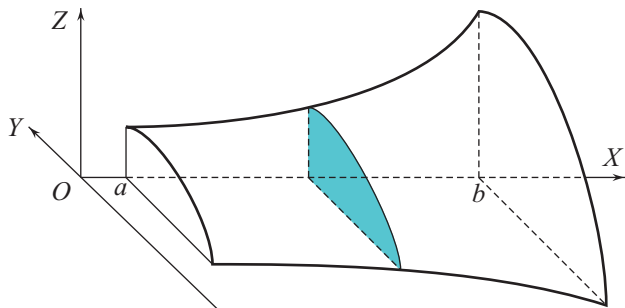


Рис. 3.3.2.

3.3.5. Об'єм тіла обертання. Застосуємо формулу (1) до тіла обертання, тобто фігури Φ , яку можна дістати шляхом обертання навколо осі OX криволінійної трапеції, що визначається неперервною невід'ємною функцією $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ (рис. 3.3.3).

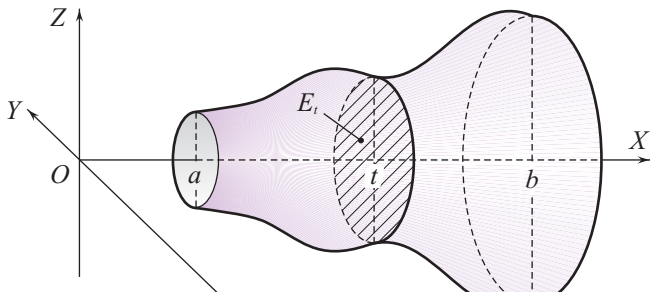


Рис. 3.3.3.

Тіло обертання Φ можна задати також наступним чином:

$$\Phi = \{(x, y, z): x \in [a; b], -f(x) \leq y \leq f(x), y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}.$$

Переріз тіла обертання площиною $x = t \in [a; b]$ є кругом радіуса $r_t = f(t)$. Тому $S(t) = \pi f^2(t)$ – неперервна функція на $[a; b]$, внаслідок чого об'єм тіла обертання можна обчислити за формулою

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (2)$$

Приклад 1. Обертаючи навколо осі OX плоску фігуру, обмежену еліпсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, дістанемо еліпсоїд обертання, який перетворюється на кулю, коли $a = b = r$.

За формулою (2) об'єм цього еліпсоїда дорівнює

$$V = \pi \int_{-a}^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Big|_{-a}^a =$$

$$= \pi b^2 \left(2a - \frac{2}{3}a \right) = \frac{4}{3} \pi a b^2.$$

Зокрема, коли $a = b = r$, то $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ – відома формула для обчислення об'єму кулі.

3.3.6. Використання комп'ютерних засобів математики. Окрім обчислення об'ємів за допомогою певних інтегралів, комп'ютерні засоби математики можна використати для графічного зображення фігур, що розглядаються.

3.3.6.1. Використання Gran1. У програмі Gran1 передбачена функція для обчислення об'єму (і площі поверхні) тіла обертання навколо осі OX або осі OY . Знаходиться вона в пункті меню Операції > Інтеграли > Об'єм та площа поверхні обертання, вісь Ox..., а в наступному рядочку те саме, тільки для осі Oy . Крива повинна бути заданою явним рівнянням $y = y(x)$, $x \in [a; b]$. Об'єм тіла обертання обчислюється за чисельними методами. При цьому, якщо попередньо було побудовано графік відповідної функції, то на екрані зображається тіло, обмежене поверхнею, яка утворюється при обертанні цього графіка навколо осі OX чи OY , та двома площинами, які передбачаються у програмі Gran1 за умовчанням. Зауважимо, що при обертанні навколо осі Oy графіка функції $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, у програмі Gran1 за умовчанням передбачено, що функція $f \in$ неперервної і строго монотонною на $[a; b]$.

Перевіримо роботу програми Gran1 з обчислення об'ємів тіл обертання на кількох прикладах і проаналізуємо отримані результати.

$$\Gamma_1: y = \sin x, x \in [0; \pi/2] \text{ (рис. 3.3.4)} \Rightarrow V_{1x} = 2.4674.$$

$$\Gamma_2: y = \arcsin x, x \in [0; 1] \text{ (рис. 3.3.5)} \Rightarrow V_{2y} = 2.37308.$$

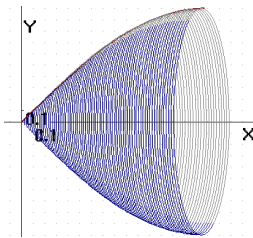


Рис. 3.3.4.

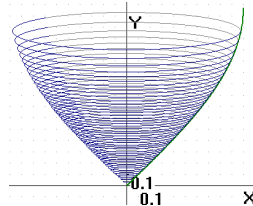


Рис. 3.3.5.

За формулою (2) п. 3.3.5 можна перевірити, що значення V_{1x} обчислено досить коректно. Проте об'єм V_{2y} обчислено з недостаткою $\approx 4\%$. Крім того, на малюнку 3.3.5, з естетичного погляду, не вистачає ще одногодвох верхніх кілець обертання (можливо, це якось пов'язано і з обчисленням об'ємів).

$$\Gamma_3: y = \sin x, x \in [\pi/2; \pi] \text{ (рис. 3.3.6)} \Rightarrow V_{3x} = 2.4674.$$

$$\Gamma_4: y = \pi - \arcsin x, x \in [0; 1] \text{ (рис. 3.3.7)} \Rightarrow V_{4y} = -2.37308.$$

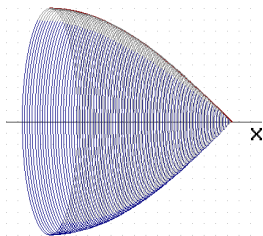


Рис. 3.3.6.

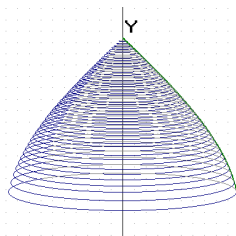


Рис. 3.3.7.

При обчисленні об'єму V_{4y} робиться така сама похибка, що й при обчисленні V_{2y} , а також з'являється від'ємний знак, що некоректно.

Так само, якщо взяти чверть кола $\Gamma_5 = \Gamma_6: y = \sqrt{1 - x^2}, x \in [0; 1]$ (рис. 3.3.8, 3.3.9), і обертати цю криву навколо осей Ox та Oy , то за програмою Gran1 дістанемо: $V_{5x} = 2.0944, V_{6y} = -2.00124$.

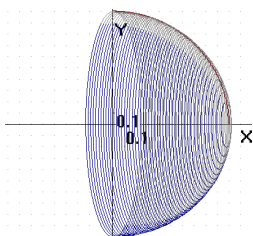


Рис. 3.3.8.

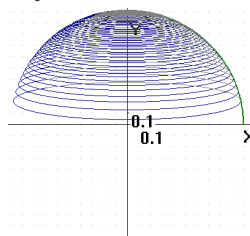


Рис. 3.3.9.

Як відомо, об'єм півкулі одиничного радіуса дорівнює $\frac{2\pi}{3} \approx 2,0944$, тобто правильно обчислено лише об'єм V_{5x} , а при обчисленні V_{6y} допущено похибку і за абсолютною величиною, і за знаком.

3.3.6.2. Використання Maxima. У даній програмі немає вбудованої команди обчислення об'єму тіла обертання, як немає і команди побудови його графічного зображення. Разом з цим є багато можливостей використання цієї програми для обчислення об'ємів таких тіл. По-перше, для обчислення об'єму тіла обертання достатньо скористатися формулою (2) і в багатьох випадках буде отримано не наближене, а точне значення шуканого об'єму (якщо навіть при цьому в заданні фігури наявні деякі буквені параметри). По-друге, за допомогою програми Maxima неважко побудувати графічне подання тіла обертання, схоже на те, що будується за програмою Gran1.

Ідея полягає у тому, щоб до графіка функції додати кільця обертання, тобто фактично еліпси. При цьому можна скористатися аналогією з пп. 2.1.11.2, де зображувався геометричний зміст інтегральних сум.

Приклад 1. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнею, що утворюється при обертанні кривої $y = \sin x + x + \cos x, x \in [-\pi; \pi]$, і прямих $x = \pm\pi$ навколо осі Ox . Навести графічну ілюстрацію.

□ Розв'язання цього прикладу реалізується за допомогою наступної послідовності команд.

```
(%i1) load(draw)$
(%i2) f(x):=sin(x)+x+cos(x)$
a:-%pi$ b:%pi$ N:100$
x(k,n):=a+k*(b-a)/n$
pp(n):=makelist(ellipse(x(k-1,n),0,
max(abs(f(x(k-1,n)))/10),1/1000),
max(abs(f(x(k-1,n))),1/1000),2,360),
k,1,n+1)$
graph:[line_width=3,color=black,
explicit(f(x),x,a-0.1,b+0.1),
explicit(-f(x),x,a-0.1,b+0.1)]$
options:[xtics=none,ytics=none,
xrange=[a-0.5,b+0.5],yrange=auto,
xaxis=true,yaxis=true,nticks=100,
axis_bottom=false,axis_top=false,axis_right=false,axis_left=false,
proportional_axes=xy,transparent=true,color=magenta]$
mal(n):=append(options,pp(n),graph)$
apply(draw2d,mal(N))$
```

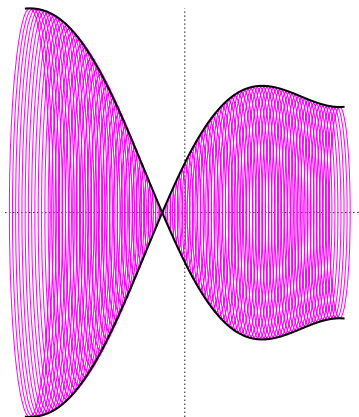


Рис. 3.3.10.

Тіло обертання побудовано (рис. 3.3.10). Тепер обчислимо його об'єм.

```
(%i12) V:ratsimp(%pi*integrate(f(x)^2,x,a,b))$
print("V=",V,"=",float(V))$
```

$$V = \frac{2\pi^4 + 18\pi^2}{3} = 124.1570204292044$$

Зауважимо, що у наведену вище програму зображення тіла обертання легко внести потрібні зміни так, щоб еліпси обертання йшли густіше чи рідше, були більші чи менші видовженими, зафарбованими, мали інший колір, були товщими і т. п. ■

Враховуючи твердження, наведене після рис. 3.3.3 пункту 3.3.5, для побудови тіл обертання можна скористатися також командами plot3d або draw3d побудови тривимірних зображень.

Так, ілюстрацію до прикладу 1 можна виконати іншим способом.

```
(%i14) draw3d(xaxis=true,yaxis=true,zaxis=true,
label(["X",5,0,0]),label(["Y",0,10,0]),label(["Z",0,0,5]),grid=true,
xtics=false,ytics=false,ztics=false,xyplane=0,axis_3d=false,
xaxis_width=2,xaxis_color=forest-green,xaxis_type=solid,
yaxis_width=2,yaxis_color=forest-green,yaxis_type=solid,
zaxis_width=2,zaxis_color=forest-green,zaxis_type=solid,
xu_grid=50,yv_grid=50,surface_hide=false,color=orange,
explicit(-sqrt(f(x)^2-y^2),x,-%pi,%pi,y,-5,5),
explicit(sqrt(f(x)^2-y^2),x,-%pi,%pi,y,-5,5),
```

xrange=[-7,7],yrange=[-10,10],zrange=[-4.2,4.2]);

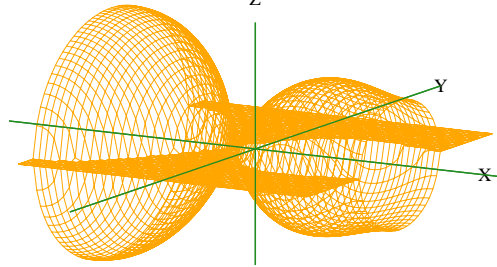


Рис. 3.3.11.

Розв'яжемо за допомогою програми Махіта ще один приклад.

Приклад 2. Знайти об'єм просторової фігури, обмеженої еліпсоїдом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Зобразити цей еліпсоїд при $a = 1, b = 2, c = 3$.

□ Розв'язування цього прикладу буде базуватися на формулі (1) пункту 3.3.4. Спочатку знайдемо, яка лінія утворюється при перетині еліпсоїда площиною $x = t$:

(%i1) eliminate([x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1,x=t],[x]);

(%o1) $[a^2b^2z^2 + a^2c^2y^2 + b^2c^2(t^2 - a^2)]$

При виключенні змінної x з рівняння еліпсоїда отримали вираз, який потрібно прирівняти до нуля. Перепишемо це рівняння у вигляді

(%i2) $a^2b^2z^2 + a^2c^2y^2 = b^2c^2(a^2 - t^2)$;

(%o2) $a^2b^2z^2 + a^2c^2y^2 = b^2c^2(a^2 - t^2)$

Звідси видно, що перетин еліпсоїда площиною $x = t$ буде непорожнім за умови $a^2 - t^2 \geq 0$, тобто $t \in [-a; a]$. При $t = \pm a$ отримується одна точка. Припустимо, що $t \in (-a; a)$ і скоротимо рівняння (%o2) на його праву частину:

(%i3) $\%o2/(b^2c^2(a^2-t^2))$;

(%o3) $\frac{a^2b^2z^2 + a^2c^2y^2}{b^2c^2(a^2-t^2)} = 1$

Враховуючи, що a, b, c і t у цьому рівнянні – параметри, прийдемо до висновку, що дане рівняння відносно змінних y та z є рівнянням еліпса з півосьми

(%i4) $[A:b*\sqrt{a^2-t^2}/a, B:c*\sqrt{a^2-t^2}/a]$;

(%o4) $[\frac{b\sqrt{a^2-t^2}}{a}, \frac{c\sqrt{a^2-t^2}}{a}]$

Обчислимо площу фігури, обмеженої цим еліпсом, за відомою формулою $S = \pi AB$, де A, B – півосі еліпса:

(%i5) $S:\%pi*A*B$;

(%o5) $\frac{\pi b c (a^2 - t^2)}{a^2}$

Отже, знайдено площу поперечного перерізу площиною $x = t$ тіла, обмеженого еліпсоїдом, коли $t \in [-a; a]$, і можна знайти об'єм цього тіла за

формулою (1) пункту 3.3.4:

```
(%i6) integrate(S,t,-a,a);
(%o6)  $\frac{4\pi abc}{3}$ 
```

Перейдемо до зображення заданого еліпсоїда за умови $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$. Хоча у пакеті draw є команда implicit, за якою будуються графіки неявно заданих функцій 2-х змінних, але вона виконується не так швидко і якісно, як команда explicit, за якою будуються графіки явно заданих функцій. Тому виразимо з рівняння еліпсоїда змінну z :

```
(%i7) solve(x^2+y^2/4+z^2/9=1,z);
(%o7)  $[z = -\frac{3\sqrt{-y^2-4x^2+4}}{2}, z = \frac{3\sqrt{-y^2-4x^2+4}}{2}]$ 
```

Тепер побудуємо графіки обох цих явно заданих функцій (нижню й верхню частини еліпсоїда) на одному малюнку.

```
(%i8) load(draw)$
(%i9) draw3d(xaxis=true,yaxis=true,zaxis=true,
label(["X",1.5,0,0]),label(["Y",0,2.5,0]),label(["Z",0,0,4]),
xtics=false,ytics=false,ztics=false,
xtics_axis=true,ytics_axis=true,xyplane=0,axis_3d=false,
xaxis_width=2,xaxis_color=forest-green,xaxis_type=solid,
yaxis_width=2,yaxis_color=forest-green,yaxis_type=solid,
zaxis_width=2,zaxis_color=forest-green,zaxis_type=solid,
xu_grid=50,yv_grid=50,surface_hide=false,color=orange,
explicit((-3*sqrt(-y^2-4*x^2+4))/2,x,-1,1,y,-2,2),
explicit((3*sqrt(-y^2-4*x^2+4))/2,x,-1,1,y,-2,2),
xrange=[-1.5,1.5],yrange=[-2.5,2.5],zrange=[-3.5,3.5]); ■
```

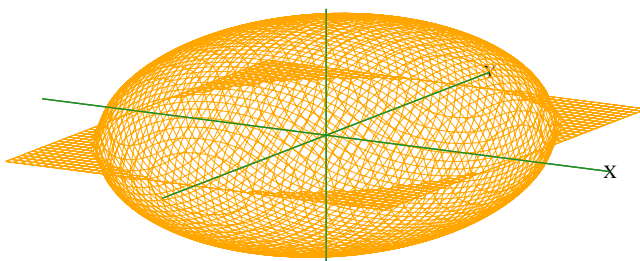


Рис. 3.3.12.

На рис. 3.3.12, як і на рис. 3.3.11, помітно зайву частину побудованої поверхні, яка лежить на площині XOY . Вона з'являється тому, що за командою draw3d (як і за командою plot3d) замість кожної функції f розглядається її дійсна частина $\text{Re } f$.

3.3.7. Завдання для виконання за допомогою комп'ютера.

1. Зобразити просторову фігуру Φ та елементарний паралелепіпед $P \supset \Phi$; утворити розбиття T фігури Φ на елементарні паралеле-

піпеди; виділити прості фігури Φ_* та Φ^* та знайти їх об'єми; дослідити поведінку об'ємів $V(\Phi_*)$ і $V(\Phi^*)$, коли дрібність розбиття T зменшується.

2. Утворити тіло обертання шляхом обертання навколо осі OX певної узагальненої криволінійної трапеції та знайти об'єм цього тіла.
3. Утворити тіло обертання шляхом обертання навколо осі OY певної узагальненої криволінійної трапеції та знайти об'єм цього тіла.

Література

1. *Давидов М. О.* Курс математического анализа. Ч. 1. – К.: Вища школа, 1990. – 384 с.
2. *Давыдов Н. А., Коровкин П. П., Никольский В. Н.* Сборник задач по математическому анализу. – М.: Просвещение, 1973. – 256 с.
3. *Коровкин П. П.* Математический анализ. Т. 1. – М.: Учпедгиз, 1963. – 400 с.
4. *Жалдак М. І., Горошко Ю. В., Вінниченко Є. Ф.* Математика з комп'ютером. – Київ: РННЦ “ДІНІТ”, 2009. – 282 с.
5. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ. Т. 1. – М.: Высшая школа, 1988. – 712 с.
6. *Ляшко И. И., Емельянов В. Ф., Боярчук А. К.* Основы классического и современного анализа. – К.: Вища школа, 1988. – 592 с.
7. *Маркушевич А. И., Маркушевич Л. А.* Введение в теорию аналитических функций. – М.: Просвещение, 1977. – 320 с.
8. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2-х ч. Навч. посіб. / *Л. І. Дюженкова, Т. В. Колесник, М. Я. Лященко та ін.* – К.: ВШ, 2002. – Ч. 1. – 462 с.
9. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
10. *Немыцкий В., Слудская М., Черкасов А.* Курс математического анализа. Т. 1. – Москва – Ленинград: Гос. изд.-во тех.-теор. лит., 1940. – 460 с.
11. *Погорелов О. В.* Геометрія. 7–9 клас. – К.: Школяр, 2004. – 240 с.
12. *Погорелов О. В.* Геометрія. 10–11 клас. – К.: Школяр, 2006. – 128 с.
13. *Прасолов В. В.* Неэлементарность некоторых интегралов элементарных функций // Математическое просвещение, сер. 3, вып. 7, 2003. – С. 126 – 135.
14. *Райков Д. А.* Одномерный математический анализ. – М.: Вища школа, 1982. – 415 с.
15. *Рудин У.* Основы математического анализа. – М.: Мир, 1976. – 320 с.
16. *Соколов Ю. Д.* Элементы теории функций комплексной переменной. – К.: Рад. школа, 1954. – 203 с.
17. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. – М.: Наука, 1966. – 800 с.

18. *Чебышев П. Л.* Избранные труды. – М.: Изд.-во АН СССР, 1955. – 928 с.
19. *Шиманський І. Є.* Математичний аналіз. – К.: Вища школа, 1972. – 631 с.
20. *Шкіль М. І.* Математичний аналіз. Ч. 1. – К.: Вища школа, 2005. – 448 с.

Науково-виробниче видання

Бібліотека «Шкільного світу»

Жалдак Мирослав Іванович
Михалін Геннадій Олександрович
Деканов Станіслав Якович

**МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ З ЕЛЕМЕНТАМИ
ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ**

Навчальний посібник

На обкладинці використано фрагмент картини
Роже де ла Френе

Формат 60×84/16.

Умовн. друк. арк. 7,44. Тираж 300 пр.
Зам. 2386.

ТОВ «Редакції газет природничо-математичного циклу»
01014, м. Київ, вул. Тимірязєвська, 2

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного
реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
Серія ДК № 777 від 21.01.2002

Видруковано з готових діапозитивів в ПП «Житомирська облдрукарня»
10014, м. Житомир, вул. Мала Бердичівська, 17

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного
реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
Серія ЖТ № 1 від 06.04.2001