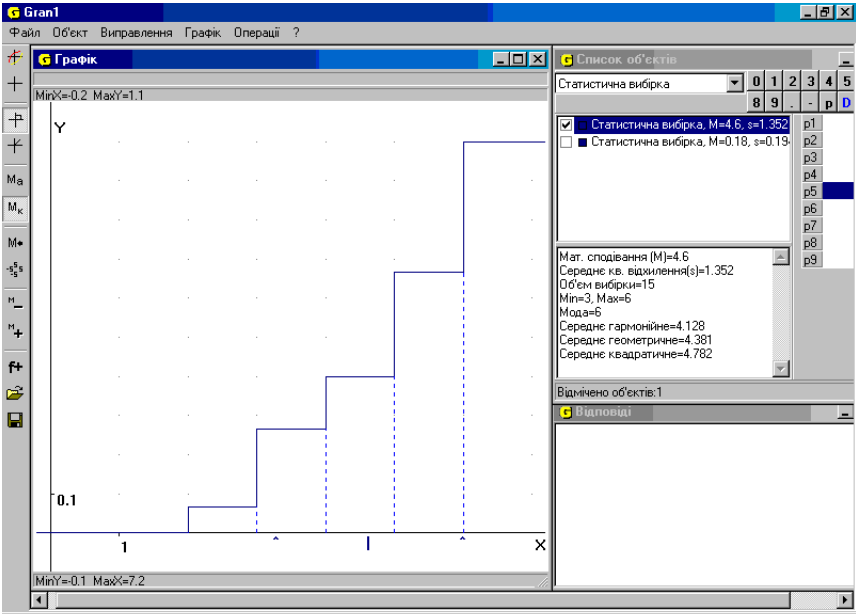

Рис. 11.1

На Рис. 11.1 зображено графік функції розподілу статистичних ймовірностей, що визначається таблицею 11.2.

Основні властивості функції дискретного розподілу статистичних ймовірностей на множині $\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k\}$:

1. $F_n^*(x) \geq 0$, як статистична ймовірність події $A = (-\infty; x) \subset \Omega$.

2. $F_n^*(-\infty) = 0$, як статистична ймовірність неможливої події $\varnothing = \{x :\ x < -\infty\}$.

3. $F_n^*(+\infty) = 1$, як статистична ймовірність вірогідної події $\Omega = (-\infty;\ \infty)$.

4. Якщо $u < v$, то $F_n^*(u) \leq F_n^*(v)$.

5. На кожному проміжку $(\alpha; x_i]$, що не містить інших точок множини $\{x_1,\ x_2,\ \ldots\}$, функція розподілу статистичних ймовірностей стала, причому $F_n^*(x) = F_n^*(x_i)$ при $x \in (\alpha; x_i]$.

Будь-яку функцію, що задовольняє умови 1–5, називають *функцією розподілу статистичних ймовірностей на дискретній множині* $\{x_1,\ x_2,\ \ldots\}$ або *функцією дискретного розподілу статистичних ймовірностей*.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Довести, що $F_n^*(-\infty) = 0$, а $F_n^*(+\infty) = 1$.

Оскільки $-\infty < x_i$ для всіх i, то в сумі $\sum\limits_{x_i < -\infty} P_n^*(x_i)$ немає жодного доданку і така сума дорівнює 0, тобто $F_n^*(-\infty) = P_n^*(\varnothing) = 0$ як статистична ймовірність неможливої події, яка полягає у появі значення $x_{\text{сп}\, i}$, меншого за $-\infty$.

Так само, оскільки $x_i < +\infty$ для всіх i, то

$$F_n^*(+\infty) = \sum_{x_i \in (-\infty, \infty)} P_n^*(x_i) = P_n^*((-\infty; +\infty)) = P_n^*(\Omega) = 1$$

як статистична ймовірність вірогідної події, яка полягає у попаданні точки $x_{\text{сп}\, i}$ на проміжок $(-\infty; +\infty)$.

Вправа 2. Довести, що

$$P_n^*([u;\ v)) = \sum_{x_i \in [u, v)} P_n^*(x_i) = F_n^*(v) - F_n^*(u),$$

тобто статистична ймовірність попадання точок $x_{\text{сп}\, i}$ на проміжок $[u; v)$ дорівнює приростові функції розподілу статистичних ймовірностей на цьому проміжку.

Нехай $u < v$. Тоді

$$F_n^*(v) = P_n^*((-\infty, v)) = P_n^*((-\infty, u) \cup [u, v)) =$$
$$= P_n^*((-\infty, u)) + P_n^*([u, v)) = F_n^*(u) + P_n^*([u, v)),$$

звідки

$$P_n^*([u, v)) = F_n^*(v) - F_n^*(u).$$

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо задано ряд розподілу статистичних ймовірностей, то можна побудувати відповідну функцію розподілу.

2. Якщо задано функцію розподілу статистичних ймовірностей на дискретній множині $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, то можна підрахувати статистичні ймовірності появи кожного значення $x_i \in \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$.

3. Якщо подія A полягає у попаданні точок в проміжок $(-\infty; \alpha]$, тобто $A = (-\infty; \alpha]$, то статистична ймовірність цієї події дорівнює значенню відповідної функції розподілу в точці α.

4. Функція розподілу статистичних ймовірностей є зростаючою.

5. Функція розподілу статистичних ймовірностей є невід'ємною неспадною функцією.

6. Кожна невід'ємна неспадна функція є функцією деякого дискретного розподілу статистичних ймовірностей.

7. Функція розподілу статистичних ймовірностей може набувати лише двох значень.

8. Множина значень функції дискретного розподілу статистичних ймовірностей скінченна.

2. Побудувати функцію $F_n^*(x)$ дискретного розподілу статистичних ймовірностей та її графік, якщо задано:

1) ряд розподілу статистичних ймовірностей

x_i	-1	0	1
$P_n^*(x_i)$	0.25	0.50	0.25

2) можливі значення x_i відхилення снаряда від цілі – -50, -40, -30, -20, -10, 0, 10, 20, 30, 40, 50, $P_n^*(x_i)$ – визначаються за серією спостережених значень: 10, 0, -20, -10, 20, 0, -10, 20, -30, 10, -20, 0, 0, 10, -10, 30, 0, 10, 0, -20, 10, 10, -20, -10, 0, -10, -10, 0, -10, 20, 0, 0, 10, 10, 20, -30, 20, -20, -10, 10, 0,10, -10, 0, 10, -10, 0, 0, 0, 20.

3. Довести властивості 1-4 функції розподілу статистичних ймовірностей.

4. Довести, що функція $F_n^*(x)$ дискретного розподілу статистичних ймовірностей: 1) неперервна зліва в будь-якій точці $x \in R$; 2) скрізь, крім точок x_i, диференційовна і $\frac{d}{dx} F_n^*(x) = 0$, $x \neq x_i$, $i \in \overline{1,\ k}$.

5. Для заданих спостережених значень, побудувати функцію дискретного розподілу статистичних ймовірностей та зобразити її графік і визначити, де вона розривна і якого роду точки розриву:

1. Відомо, що 50 абітурієнтів отримали на вступних іспитах такі оцінки:

10, 1, 3, 5, 11, 7, 8, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 6, 7, 3, 2, 11, 0, 5, 8, 7, 8, 5, 4,
3, 2, 1, 10, 9, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 2, 4, 3, 5, 7, 9, 8, 10, 9, 1.

2. За результатами контрольної роботи, написаної 30-ма студентами першокурсниками, складено таблицю

Оцінки	2	3	4	5
Кількість студентів	3	9	15	3

3. Досліджуючи, скільки разів на тиждень студенти даної групи із 30 чоловік працюють у бібліотеці, дістали такі дані:

5, 6, 5, 6, 6, 4, 6, 4, 3, 6, 3, 6, 5, 2, 5, 2, 4, 5, 6, 6, 3, 6, 3, 3, 5, 3, 5, 4, 5, 6.

4. В одному універмазі продано за зміну 100 пар взуття, розміри яких розподілилися таким чином:

Розмір взуття	37	38	39	40	41	42	43	44
Кількість пар взуття	5	5	10	15	25	20	15	5

5. Медична комісія подала дані про зріст 320 призовників:

Зріст у см	165	170	175	180	185	190	195
Кількість призовників	10	28	72	98	69	31	12

6. Навмання вибрано 50 колосків ячменю і підраховано кількість зерен у кожному з них. Дістали такі результати:

21, 17, 27, 20, 22, 12, 24, 13, 20, 19, 22, 16, 22, 9, 21, 16, 23,
16, 21, 24, 18, 11, 22, 15, 23, 21, 10, 15, 18, 15, 21, 14, 15,
18, 22, 15, 17, 19, 17, 18, 17, 24, 18, 19, 16, 17, 15, 17, 25, 16.

6. За даним полігомом відносних частот (Рис. 11.2 а, б):

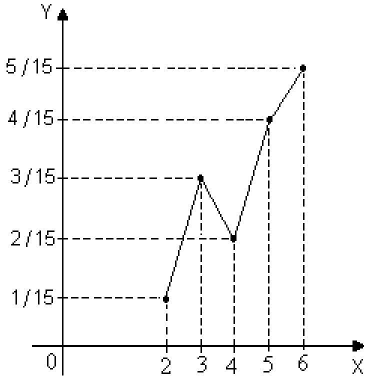

Рис. 11.2 а)

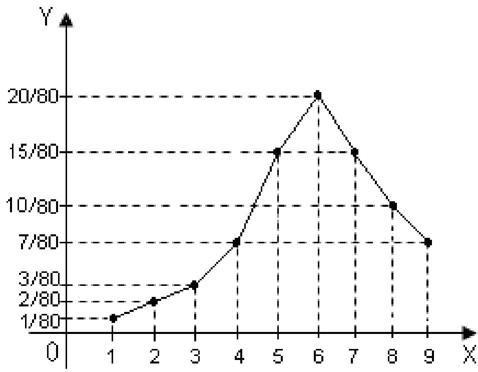

Рис. 11.2 б)

1. Побудувати функцію $F_n^*(x)$ дискретного розподілу статистичних ймовірностей.

2. Зобразити графік функції $F_n^*(x)$.

3. Визначити, де функція $F_n^*(x)$: неперервна і де розривна та який характер точок розриву.

7. Функція дискретного розподілу статистичних ймовірностей має вигляд:

а)

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 0, \\ \dfrac{1}{15}, & \text{коли } 0 < x \le 1, \\ \dfrac{4}{15}, & \text{коли } 1 < x \le 2, \\ \dfrac{6}{15}, & \text{коли } 2 < x \le 3, \\ \dfrac{10}{15}, & \text{коли } 3 < x \le 4, \\ 1, & \text{коли } x > 4. \end{cases}$$

б)

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le -1, \\ 0{,}1, & \text{коли } -1 < x \le 1, \\ 0{,}3, & \text{коли } 1 < x \le 3, \\ 0{,}5, & \text{коли } 3 < x \le 5, \\ 0{,}7, & \text{коли } 5 < x \le 7, \\ 1, & \text{коли } x > 7. \end{cases}$$

1. Побудувати графік функції $F_n^*(x)$;

2. Відновити відповідні спостережені значення та ряд розподілу статистичних ймовірностей.

3. Вважаючи, що кількість спостережених значень $n = 30$, відновити ряд розподілу абсолютних частот.

8. Дискретний розподіл статистичних ймовірностей заданий таблицею:

x_i	1	2	3	4
$P_n^*(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	C	$\frac{1}{6}$

1. Визначити число C.

2. Побудувати відповідну функцію $F_n^*(x)$ дискретного розподілу статистичних ймовірностей та зобразити її графік.

3. Визначити, де ця функція: 1) неперервна; 2) розривна і який характер точок розриву; 3) диференційовна і чому дорівнює її похідна.

9. Дискретний розподіл статистичних ймовірностей заданий таблицею:

x_i	1	2	3	4
$P_n^*(x_i)$	$\frac{1}{3}$	C_1	C_2	$\frac{1}{9}$

1. Визначити, якими можуть бути числа C_1 та C_2.

2. Побудувати відповідну функцію $F_n^*(x)$ дискретного розподілу статистичних ймовірностей та зобразити її графік для конкретних значень C_1 та C_2.

3. Визначити, де ця функція неперервна та де розривна і який характер точок розриву, та перевірити, чи можна позбавитися деяких точок розриву за рахунок вибору сталих C_1 та C_2; 2) визначити, де функція $F_n^*(x)$ диференційовна і чому дорівнює її похідна.

10. Функція розподілу статистичних ймовірностей задана графічно:

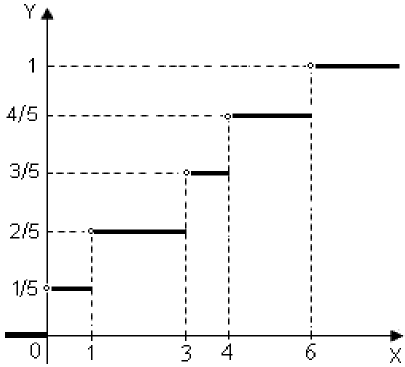

Рис. 11.4

1. Записати аналітичний вираз цієї функції.

2. Відновити відповідні спостережені значення та ряд розподілу статистичних ймовірностей.

3. Вважаючи, що кількість спостережених значень $n = 30$, відновити ряд розподілу абсолютних частот.

11. Побудувати варіаційний ряд для спостережених значень 5, 6, 6, 6, 4, 3, 5, 2, 6, 4, 5, 6, 3, 3, 5. Знайти ряди розподілу абсолютних та відносних частот. Побудувати полігон відносних частот та графік функції розподілу статистичних ймовірностей.

15. При зважуванні 35 кроликів отримано результати:
3,0; 2,7; 1,6; 1,2; 1,6; 2,2; 2,1; 2,3; 1,5; 1,3; 2,2; 2,5; 2,4; 1,9; 2,3; 2,1; 1,0; 1,8; 1,9; 1,8; 3,2; 2,1; 2,9; 3,0; 1,3; 1,9; 2,6; 2,5; 1,9; 2,7; 2,4; 2,0; 1,1; 2,6.

Побудувати полігон відносних частот та графік функції розподілу статистичних ймовірностей.

12. Функція неперервного розподілу статистичних ймовірностей

Нехай неперервний розподіл статистичних ймовірностей визначається таблицею 12.1:

Табл. 12.1

$[a_{i-1}; a_i)$	$[a_0; a_1)$	$[a_1; a_2)$	**...**	$[a_{k-1}; a_k)$
$P_n^*([a_{i-1}; a_i))$	$P_n^*([a_0; a_1))$	$P_n^*([a_1; a_2))$	**...**	$P_n^*([a_{k-1}; a_k))$

а $f_n^*(x)$ – щільність розподілу статистичних ймовірностей.

Функцію $F_n^*(x)$, що визначається рівністю

$$F_n^*(x) = P_n^*((-\infty; x)) = \int_{-\infty}^{x} f_n^*(t)\,dt, \quad x \in \overline{R},$$

називають *функцією неперервного розподілу статистичних ймовірностей*.

Приклад 12.1. Якщо неперервний розподіл статистичних ймовірностей визначається таблицею 12.2:

Табл. 12.2

$[a_{i-1};a_i)$	$\left[0;\frac{1}{10}\right)$	$\left[\frac{1}{10};\frac{2}{10}\right)$	$\left[\frac{2}{10};\frac{3}{10}\right)$	$\left[\frac{3}{10};\frac{4}{10}\right)$	$\left[\frac{4}{10};\frac{5}{10}\right)$	$\left[\frac{5}{10};\frac{6}{10}\right)$	$\left[\frac{6}{10};\frac{7}{10}\right)$	$\left[\frac{7}{10};\frac{8}{10}\right)$	$\left[\frac{8}{10};\frac{9}{10}\right)$	$\left[\frac{9}{10};1\right)$
$P_{100}^*([a_{i-1};a_i))$	0.5	0.2	0.1	0.1	0.04	0	0.02	0.01	0.02	0.01

то

$$F_n^*(x)=\int_{-\infty}^{x} f_n^*(t)\,dt=\begin{cases} 0, & \text{коли } x\le 0,\\ 5x, & \text{коли } 0<x\le 0.1,\\ 0.5+2(x-0.1), & \text{коли } 0.1<x\le 0.2,\\ 0.7+(x-0.2), & \text{коли } 0.2<x\le 0.3,\\ 0.8+(x-0.3), & \text{коли } 0.3<x\le 0.4,\\ 0.9+0.4(x-0.4), & \text{коли } 0.4<x\le 0.5,\\ 0.94+0\cdot(x-0.5), & \text{коли } 0.5<x\le 0.6,\\ 0.94+0.2(x-0.6), & \text{коли } 0.6<x\le 0.7,\\ 0.96+0.1(x-0.7), & \text{коли } 0.7<x\le 0.8,\\ 0.97+0.2(x-0.8), & \text{коли } 0.8<x\le 0.9,\\ 0.99+0.1(x-0.9), & \text{коли } 0.9<x\le 1,\\ 1, & \text{коли } x>1. \end{cases}$$

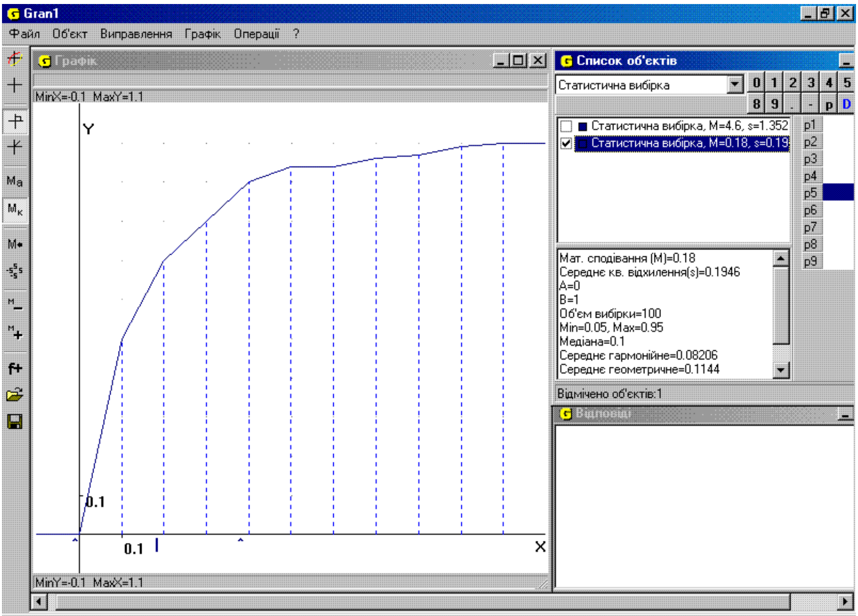

Рис. 12.1

На Рис. 12.1 подано графік функції розподілу статистичних ймовірностей для неперервного розподілу статистичних ймовірностей, що визначається таблицею 12.2.

Основні властивості функції $F_n^*(x)$ неперервного розподілу статистичних ймовірностей:

1. $F_n^*(x) \ge 0$, як статистична ймовірність події $A = (-\infty;\ x)$.

2. $F_n^*(-\infty) = P_n^*(\varnothing) = 0$, як статистична ймовірність неможливої події.

3. $F_n^*(+\infty) = P_n^*((-\infty;+\infty)) = 1$, як статистична ймовірність вірогідної події.

4. Якщо $u < v$, то $F_n^*(u) \le F_n^*(v)$.

5. На кожному проміжку $[\,a_{i-1};\ a_i\,]$ функція $F_n^*(x)$ лінійно змінюється від значення $F_n^*(a_{i-1})$ до значення $F_n^*(a_i)$.

Будь яку функцію, яка задовольняє властивості 1 – 5, називають функцією неперервного розподілу статистичних ймовірностей.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Оскільки

$$F_n^*(a_i) = \int_{-\infty}^{a_i} f_n^*(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a_{i-1}} f_n^*(x)\,dx + \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x)\,dx =$$

$$= F_n^*(a_{i-1}) + P_n^*([\,a_{i-1}; a_i)),$$

то

$$P_n^*([\,a_{i-1}; a_i)) = F_n^*(a_i) - F_n^*(a_{i-1}).$$

Таким чином, при заданій функції $F_n^*(x)$ можна визначити статистичні ймовірності $P_n^*([\,a_{i-1}; a_i))$ (відносні частоти попадання спостережуваних значень у проміжки $[\,a_{i-1}; a_i))$ для будь-яких проміжків $[\,a_{i-1}; a_i)$. А тому функція розподілу статистичних ймовірностей $F_n^*(x)$ цілком визначає статистичну ймовірність будь-якої події (вимірної множини) $A \subset \Omega$, $A = \bigcup_{i \in I} [a_{i-1}, a_i)$, $I \subset \{1,2,\ldots,k\}$.

Вправа 2. Довести, що функція неперервного розподілу, відносних частот визначена таблицею 12.1, є:

а) неперервною на R;

б) диференційовною на кожному інтервалі $(a_{i-1};\ a_i)$.

Враховуючи, що при $x \in [a_{i-1}; a_i)$ $f_n^*(x)$ стала і

$$F_n^*(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{a_{i-1}} f_n^*(t)\,dt + \int_{a_{i-1}}^{x} f_n^*(t)\,dt = F_n^*(a_{i-1}) + f_n^*(x)\cdot(x - a_{i-1}),$$

коли $x \in [a_{i-1}; a_i)$, легко бачити, що $F_n^*(x)$ неперервна і що в точках будь якого з проміжків $(a_{i-1}; a_i)$ правильна рівність

$$\frac{d}{dx} F_n^*(x) = f_n^*(x).$$

У точках $x = a_i$ ця похідна може не існувати.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Для кожного неперервного розподілу статистичних ймовірностей існує відповідна функція розподілу.

2. Функція $F_n^*(x)$, що визначається рівністю $F_n^*(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n^*(x)\,dx$, є функцією розподілу статистичних ймовірностей.

3. Щоб задати неперервний розподіл статистичних ймовірностей, досить задати або таблицю виду 12.1, або щільність розподілу $f_n^*(x)$, або функцію розподілу $F_n^*(x)$.

4. Функція $F_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей при неперевному розподілі є зростаючою.

5. Функція $F_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей при неперервному розподілі є зростаючою на кожному проміжку $[a_{i-1}; a_i)$.

6. Множина значень функції $F_n^*(x)$ неперервного розподілу статистичних ймовірностей скінченна.

7. Функція $F_n^*(x)$ неперервного розподілу статистичних ймовірностей є неперервною в кожній точці x_0, тобто $F_n^*(x) \approx F_n^*(x_0)$, коли $x \approx x_0$.

2. Побудувати графік функції $F_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей для неперервного розподілу:

1) визначеного таблицею:

$[a_{i-1}, a_i)$	[-35, -25)	[-25, -15)	[-15, -5)	[-5, 5)	[5, 15)	[15, 25)	[25, 35)
$P_n^*([a_{i-1}, a_i))$	0.04	0.06	0.20	0.40	0.20	0.06	0.04

2) визначеного таблицею:

x_i	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$P_n^*([a_{i-1}, a_i))$	0.02	0.03	0.05	0.15	0.50	0.15	0.05	0.03	0.02

де x_i – центри інтервалів $[a_{i-1}, a_i)$, $a_i = a_{i-1} + h$, $i = \overline{1,9}$.

3. Довести, що функція $F_n^*(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_n^*(t)\,dt$ є неперервною у довільній точці $x_0 \in R$.

4. Довести, що похідна функції неперервного розподілу статистичних ймовірностей може не існувати в окремих точках. Визначити, в яких саме.

5. Для заданих спостережених значень знайти функцію неперервного розподілу статистичних ймовірностей та зобразити її графік; визначити, чи має ця функція точки розриву; визначити, в яких точках ця функція диференційовна і як пов'язана її похідна з щільністю розподілу статистичних ймовірностей:

6. Щільність розподілу статистичних ймовірностей має вигляд:

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{коли} \quad 0 \le x < \dfrac{1}{3}, \\ C, & \text{коли} \quad \dfrac{1}{3} \le x < \dfrac{8}{9}, \\ 2, & \text{коли} \quad \dfrac{8}{9} \le x < 1. \end{cases}$$

1. Визначити сталу C.

2. Знайти відповідну функцію $F_n^*(x)$ неперервного розподілу статистичних ймовірностей.

3. Зобразити графіки функцій $f_n^*(x)$ та $F_n^*(x)$.

4. Визначити, у яких точках $f_n^*(x) = (F_n^*(x))'$.

7. Функція неперервного розподілу статистичних ймовірностей має вигляд:

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 2x, & \text{коли} \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{2}{3}x + C_1, & \text{коли} \quad \dfrac{1}{4} \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ C_2 x, & \text{коли} \quad \dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{3}{4}, \\ 1, & \text{коли} \quad x > \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

1. Визначити сталі C_1 та C_2.

2. Для знайдених значень C_1 та C_2 побудувати графік даної функції.

3. Визначити, де ця функція неперервна і де диференційовна та знайти відповідну щільність $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей.

8. Функція $F_n^*(x)$ неперервного розподілу статистичних ймовірностей задана графічно (Рис. 12.2):

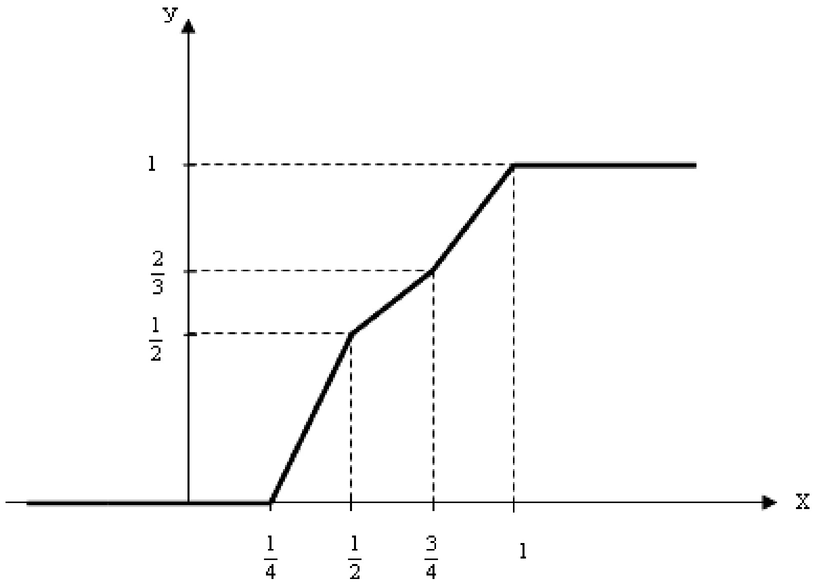

Рис. 12.2

1. Чи можна за графіком даної функції відновити графік щільності $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей?

2. Знайти аналітичний вираз функції $F_n^*(x)$.

3. Знайти аналітичний вираз $f_n^*(x)$ та побудувати її графік.

4. Визначити, де неперервні та де диференційовні функції $F_n^*(x)$ та $f_n^*(x)$.

5. В яких точках $\dfrac{dF_n^*(x)}{dx} = f_n^*(x)$.

9. Експеримент полягає у тому, що фірма, яка ремонтує побутову електротехніку, фіксує причину виходу техніки з ладу (електрична, механічна або зовнішня), а також відбулося це під час дії гарантії чи після гарантійного терміну.

Процентний розподіл кількостей виходу техніки з ладу характеризується таблицею:

Час виходу техніки з ладу	Причина виходу техніки з ладу		
	електрична	механічна	зовнішня
Під час дії гарантії	10	25	17
Після гарантійного терміну	15	30	3

1. Побудувати відповідний простір елементарних подій.

2. Визначити, що є спостереженими даними і чи можна їх трактувати як числа.

3. Чи є відповідний розподіл статистичних ймовірностей спостережених даних: 1) дискретним; 2) неперервним?

4. Якщо розподіл дискретний, то побудувати відповідні: 1) многокутник розподілу статистичних ймовірностей (полігон відносних частот); 2) функцію розподілу статистичних ймовірностей та її графік.

5. Якщо розподіл неперервний, то побудувати відповідні: 1) щільність розподілу статистичних ймовірностей та гістограму; 2) функцію розподілу статистичних ймовірностей та її графік.

6. Знайти статистичні ймовірності події:

1) A – навмання вибраний електроприлад вийшов з ладу під час дії гарантії;

2) B – причина виходу з ладу електроприладу є механічною;

3) C – електроприлад вийшов з ладу після закінчення гарантійного терміну.

7. Вияснити, чи є серед подій A, B, і C пари незалежних подій.

8. Чи є події A, B, і C: 1) незалежними у сукупності; 2) попарно незалежними.

10. Функція розподілу статистичних ймовірностей спостережених значень має вигляд:

1) $$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le -1, \\ k(x+1), & \text{коли } -1 \le x \le 3, \\ 1, & \text{коли } x \ge 3. \end{cases}$$

2) $$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 0, \\ kx, & \text{коли } 0 \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ 1, & \text{коли } x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

1. Знайти значення параметра k і визначити, є відповідний розподіл дискретним чи неперервним.

2. Побудувати графік функції $F_n^*(x)$.

3. Знайти відповідну щільність розподілу статистичних ймовірностей.

4. Обчислити статистичну ймовірність того, що спостережені значення лежать у проміжку $[2;3]$.

11. Перевірити, чи може функція

$$F_n^*(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{коли } x \le 0, \\ x + \dfrac{1}{2}, & \text{коли } 0 \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ 1, & \text{коли } x \ge 1, \end{cases}$$

бути функцією розподілу статистичних ймовірностей спостережених значень.

12. Нехай випробування – це постріл в круглу мішень радіуса $r=1$, а кожна елементарна подія ототожнюється з відстанню точки влучення від центра мішені. При цьому попадання за межі мішені неможливе. Тоді $\Omega=[0;1]$ – неперервна множина елементарних подій, кожна з яких ототожнюється з певним числом (точкою) $x\in[0;1)$. Виконано $n=100$ пострілів, результати яких наведено у таблиці 12.3. Побудувати гістограму відносних частот та графік функції розподілу статистичних ймовірностей.

Табл. 12.3

$[a_{i-1};a_i)$	$[0;\ 0{,}1)$	$[0{,}1;\ 0{,}2)$	$[0{,}2;\ 0{,}3)$	$[0{,}3;\ 0{,}4)$	$[0{,}4;\ 0{,}5)$
n_i	50	20	10	10	4

	$[0{,}5;\ 0{,}6)$	$[0{,}6;\ 0{,}7)$	$[0{,}7;\ 0{,}8)$	$[0{,}8;\ 0{,}9)$	$[0{,}9;\ 1)$
	0	2	1	2	1

13. Результати пострілів в мішень: 10 – влучень у точки, відстань яких від центра мішені лежить в проміжку $[0;\ 0{,}25)$; 5 – влучень у точки, відстань яких від центра мішені лежить в проміжку $[0{,}25;\ 0{,}50)$; 3 – влучення у точки, відстань яких від центра мішені лежить в проміжку $[0{,}50;\ 0{,}75)$; 2 – влучення у точки, відстань яких від центра мішені лежить в проміжку $[0{,}75;\ 1)$.

1. Скласти таблицю розподілу абсолютних та відносних частот.
2. Побудувати гістограму відносних частот та графік функції розподілу статистичних ймовірностей.

14. За даним інтервальним розподілом абсолютних частот побудувати гістограму відносних частот і графік функції розподілу статистичних ймовірностей:

$[a_{i-1};a_i)$	$[0;\ 8)$	$[8;\ 16)$	$[16;\ 24)$	$[24;\ 32)$	$[32;\ 40)$	$[40;\ 48)$
n_i	10	15	20	25	20	10

13. Деякі числові характеристики дискретного розподілу статистичних ймовірностей

Нехай проведено n спостережень, в результаті яких дістали спостережені значення $x_{\text{сп }1}$, $x_{\text{сп }2}$, ..., $x_{\text{сп }n}$, що визначають дискретні розподіли абсолютних частот та відповідних статистичних ймовірностей, подані в таблицях 13.1. та 13.2.

Табл. 13.1

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Табл. 13.2

x_i	x_1	x_2	...	x_k
$P_n^*(x_i)$	$P_n^*(x_1)$	$P_n^*(x_2)$	...	$P_n^*(x_k)$

Точку, абсциса якої дорівнює середньому арифметичному спостережених значень:

$$m_n^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{\text{сп}i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \sum_{i=1}^{k} x_i P_n^*(x_i),$$

називають *центром розсіювання* статистичних ймовірностей. Очевидно, центр розсіювання буде знаходитися якомога ближче до точок, на які припадає основна маса статистичних ймовірностей. Часто m_n^* позначають також через $\bar{x}$.

Важливою характеристикою розподілу статистичних ймовірностей, окрім центра розсіювання, є також величина, що характеризує розсіювання (чи скупченість) статистичних ймовірностей навколо центра розсіювання. До таких характеристик відносяться *дисперсія* розподілу статистичних ймовірностей, а також *середнє квадратичне відхилення.*

Дисперсією дискретного розподілу статистичних ймовірностей називають число

$$D_n^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{\text{сп }i} - m_n^*)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - m_n^*)^2 = \sum_{i=1}^{k}(x_i - m_n^*)^2 P_n^*(x_i).$$

Середнім квадратичним відхиленням називають число $\sigma_n^* = \sqrt{D_n^*}$.

Розглянуті характеристики досить важливі при опрацюванні результатів спостережень. Чим менше розсіювання (дисперсія), тим точнішим, вірогіднішим і надійнішим є усереднений результат спостережень (m_n^*) при достатньо великій кількості спостережень.

В фізичній інтерпретації центр розсіювання є центром мас одиничної маси, розподіленої на множині точок $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ так, що на точку x_i припадає маса $P_n^*(x_i)$, а дисперсія – це момент інерції цієї одиничної маси відносно центра розсіювання.

Приклад 13.1. Якщо розподіл визначається таблицями 13.3 чи 13.4,

Табл. 13.3

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	0	1	3	2	4	5

Табл. 13.4

x_i	1	2	3	4	5	6
$P_n^*(x_i)$	0	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

то

$$m_n^* = 1\cdot 0 + 2\cdot\frac{1}{15} + 3\cdot\frac{3}{15} + 4\cdot\frac{2}{15} + 5\cdot\frac{4}{15} + 6\cdot\frac{5}{15} =$$

$$= \frac{1}{15}(1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot 3 + 4\cdot 2 + 5\cdot 4 + 6\cdot 5) = \frac{69}{15} = 4\frac{3}{5},$$

$$D_n^* = \frac{1}{15}\left[\left(1-4\frac{3}{5}\right)^2 \cdot 0 + \left(2-4\frac{3}{5}\right)^2 \cdot 1 + \left(3-4\frac{3}{5}\right)^2 \cdot 3 + \right.$$

$$\left. + \left(4-4\frac{3}{5}\right)^2 \cdot 2 + \left(5-4\frac{3}{5}\right)^2 \cdot 4 + \left(6-4\frac{3}{5}\right)^2 \cdot 5\right] \approx 1.7,$$

$$\sigma_n^* = \sqrt{D_n^*} \approx 1.35.$$

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Розглянемо два розподіли статистичних ймовірностей:

a)

x_i	0	1	2
$P_n^*(x_i)$	0.1	0.8	0.1

b)

$x_i^{/}$	100	101	102
$P_n^*(x_i^{/})$	0.1	0.8	0.1

Ці розподіли відрізняються тим, що кожне із значень $x_i^{/}$ в розподілі *b*) на 100 більше, ніж в розподілі *a*). В розподілі *a*) статистичні ймовірності розподілені на множині із трьох точок x_1=0, x_2=1, x_3=2, що розташовані не далі, ніж на відстані, рівній 1, від точки *x*=1, а в розподілі *b*) статистичні ймовірності розподілені так само на множині із трьох точок $x_1^{/}$=100, $x_2^{/}$=101, $x_3^{/}$=102, що віддалені не далі, ніж на відстані 1 від точки $x^{/}$=101. Точки $\bar{x}$=1 та $\bar{x}^{/}$=101 природно назвати центрами розсіювання статистичних ймовірностей відповідно для розподілів *a*) та *b*). Вони характеризують значення, навколо яких зосереджуються спостережені значення.

Вправа 2. Нехай є два розподіли:

c)

x_i	-1	0	1
$P_n^*(x_i)$	0.1	0.8	0.1

d)

$x_i^{/}$	-10	0	10
$P_n^*(x_i^{/})$	0.1	0.8	0.1

Очевидно для кожного з цих розподілів $m_n^* = 0$, але в розподілі d) розсіювання частот навколо центра розсіювання $m_n^* = 0$ помітно більше, ніж в розподілі с).

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Кожен дискретний розподіл статистичних ймовірностей має центр розсіювання.

2. Усі спостережені значення можуть бути натуральними числами.

3. Координата центра розсіювання статистичних ймовірностей є натуральним числом, коли усі спостережені значення – натуральні числа.

4. Для обчислення дисперсії треба спочатку обчислити координату центра розсіювання статистичних ймовірностей.

5. Для обчислення дисперсії треба спочатку обчислити середнє квадратичне відхилення.

2. Знайти центр розсіювання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретного розподілу статистичних ймовірностей:

1)

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P_n^*(x_i)$	0.10	0.20	0.40	0.10	0.10	0.07	0.03

2)

x_i	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$P_n^*(x_i)$	0.02	0.10	0.70	0.08	0.04	0.03	0.01	0.01	0.01

3)

x_i	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P_n^*(x_i)$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

4)

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P_n^*(x_i)$	0.30	0.10	0.08	0.04	0.08	0.10	0.30

5) заданого функцією розподілу:

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ 0.25 & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 0.75 & \text{при } 1 < x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

3. Знайти центр розсіювання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення для заданих дискретних розподілів статистичних ймовірностей:

1. Відомо, що 50 абітурієнтів отримали на вступних іспитах такі оцінки:

10, 1, 3, 5, 11, 7, 8, 1, 2, 3, 4, 5, 9, 6, 7, 3, 2, 11, 0, 5, 8, 7, 8, 5, 4,
3, 2, 1, 10, 9, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 2, 4, 3, 5, 7, 9, 8, 10, 9, 1.

2. За результатами контрольної роботи, написаної 30-ма студентами першокурсниками, складено таблицю

Оцінки	2	3	4	5
Кількість студентів	3	9	15	3

3. Досліджуючи, скільки разів на тиждень студенти даної групи із 30 чоловік працюють у бібліотеці, дістали такі дані:

5, 6, 5, 6, 6, 4, 6, 4, 3, 6, 3, 6, 5, 2, 5, 2, 4, 5, 6, 6, 3, 6, 3, 3, 5, 3, 5, 4, 5, 6.

4. В одному універмазі продано за зміну 100 пар взуття, розміри яких розподілилися таким чином:

Розмір взуття	37	38	39	40	41	42	43	44
Кількість пар взуття	5	5	10	15	25	20	15	5

5. Медична комісія подала дані про зріст 320 призовників:

Зріст у см	165	170	175	180	185	190	195
Кількість призовників	10	28	72	98	69	31	12

6. Навмання вибрано 50 колосків ячменю і підраховано кількість зерен у кожному з них. Дістали такі результати:

21, 17, 27, 20, 22, 12, 24, 13, 20, 19, 22, 16, 22, 9, 21, 16, 23,
16, 21, 24, 18, 11, 22, 15, 23, 21, 10, 15, 18, 15, 21, 14, 15,
18, 22, 15, 17, 19, 17, 18, 17, 24, 18, 19, 16, 17, 15, 17, 25, 16.

4. Для дискретного розподілу статистичних ймовірностей спостережених значень відома відповідна функція розподілу $F_n^*(x)$. Знайти формули для обчислення m_n^*, D_n^* та σ_n^* за допомогою значень функції $F_n^*(x)$.

5. Знайти центр розсіювання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення для дискретних розподілів, заданих за допомогою функції розподілу:

1)

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 0, \\ \dfrac{1}{15}, & \text{коли } 0 < x \le 1, \\ \dfrac{4}{15}, & \text{коли } 1 < x \le 2, \\ \dfrac{6}{15}, & \text{коли } 2 < x \le 3, \\ \dfrac{10}{15}, & \text{коли } 3 < x \le 4, \\ 1, & \text{коли } x > 4. \end{cases}$$

2)

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le -1, \\ 0{,}1, & \text{коли } -1 < x \le 1, \\ 0{,}3, & \text{коли } 1 < x \le 3, \\ 0{,}5, & \text{коли } 3 < x \le 5, \\ 0{,}7, & \text{коли } 5 < x \le 7, \\ 1, & \text{коли } x > 7. \end{cases}$$

3) функція розподілу статистичних ймовірностей задана графічно:

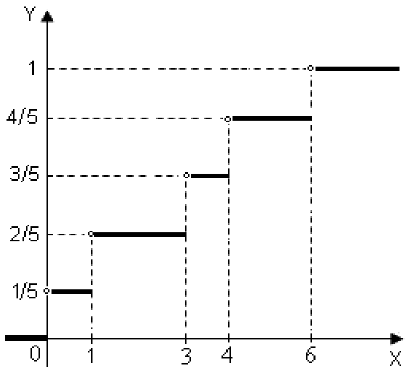

Рис. 13.1

6. Довести, що коли дискретний розподіл статистичних ймовірностей задано таблицею 13.2, то

$$D_n^* = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 P_n^*(x_i) - m_n^{*2}.$$

7. Експеримент полягає у підкиданні монети і фіксації числа 0, коли випадає герб, та числа 1, коли випадає цифра. Спостережені значення 0 і 1 мають статистичні ймовірності відповідно p і $q = 1 - p$, де $p \in (0;1)$ – фіксоване число.

1. Знайти m_n^*, D_n^* і σ_n^*.

2. Збільшити спостережені значення на 1, не змінюючи їхні статистичні ймовірності і знову підрахувати m_n^*, D_n^* та σ_n^*.

8. Експеримент полягає у тому, що з наявних ключів навмання вибирають один, намагаються цим ключем відімкнути двері і підраховують кількість таких спроб. Випробуваний ключ не повертають до набору, з якого вибиратиметься наступний ключ. Статистичні ймовірності вибору будь-якого ключа однакові при будь якій їх кількості (відокремлені ключі не враховуються). Двері відмикає лише один ключ.

1. Вважаючи, що початкова кількість ключів дорівнює 5, знайти дискретний розподіл статистичних ймовірностей згаданих спостережених значень – кількість спроб відімкнути двері.

2. Обчислити відповідні m_n^*, D_n^* та σ_n^*.

9*. Узагальнити попередню задачу на випадок, коли початкова кількість ключів дорівнює r.

14. Деякі числові характеристики неперервного розподілу статистичних ймовірностей

Центром розсіювання статистичних ймовірностей для неперервного розподілу, що описується щільністю розподілу

$f_n^*(x)$, $x \in [a;b)$ ($f_n^*(x) = 0$ при $x \overline{\in} [a;b)$), називають точку на осі Ox, абсциса якої дорівнює $m_n^* = \int\limits_a^b x\, f_n^*(x)\, dx$.

Дисперсією неперервного розподілу статистичних ймовірностей, що визначається щільністю $f_n^*(x)$, $x \in [a;b)$ ($f_n^*(x) = 0$ при $x \overline{\in} [a;b)$), називають число

$$D_n^* = \int\limits_a^b (x - m_n^*)^2 f_n^*(x)\, dx,$$

а число $\sigma_n^* = \sqrt{D_n^*}$ – називають *середнім квадратичним відхиленням* відповідного неперервного розподілу.

У фізичній інтерпретації центр розсіювання є центром мас одиничної маси, розподіленої на проміжку $[a;b)$ із щільністю $f_n^*(x)$, а дисперсія – момент інерції цієї маси відносно центра розсіювання.

Приклад 14.1 Для розподілу, що визначається таблицею 14.1:

Табл. 14.1

$[a_{i-1};a_i)$	$\left[0;\frac{1}{10}\right)$	$\left[\frac{1}{10};\frac{2}{10}\right)$	$\left[\frac{2}{10};\frac{3}{10}\right)$	$\left[\frac{3}{10};\frac{4}{10}\right)$	$\left[\frac{4}{10};\frac{5}{10}\right)$	$\left[\frac{5}{10};\frac{6}{10}\right)$	$\left[\frac{6}{10};\frac{7}{10}\right)$	$\left[\frac{7}{10};\frac{8}{10}\right)$	$\left[\frac{8}{10};\frac{9}{10}\right)$	$\left[\frac{9}{10};1\right)$
$P_{100}^*([a_{i-1};a_i))$	0.5	0.2	0.1	0.1	0.04	0	0.02	0.01	0.02	0.01

маємо:

$$m_n^* = 0.05\cdot 0.5 + 0.15\cdot 0.2 + 0.25\cdot 0.1 + 0.35\cdot 0.1 + 0.45\cdot 0.04 + \\ + 0.55\cdot 0 + 0.65\cdot 0.02 + 0.75\cdot 0.01 + 0.85\cdot 0.02 + 0.95\cdot 0.01 \approx 0.18,$$

$$D_n^* \approx (0.05-0.18)^2\cdot 0.50 + (0.15-0.18)^2\cdot 0.20 + (0.25-0.18)^2\cdot 0.10 + \\ + (0.35-0.18)^2\cdot 0.10 + (0.45-0.18)^2\cdot 0.04 + (0.55-0.18)^2\cdot 0.00 + \\ + (0.65-0.18)^2\cdot 0.02 + (0.75-0.18)^2\cdot 0.01 + (0.85-0.18)^2\cdot 0.02 + \\ + (0.95-0.18)^2\cdot 0.01 \approx 0.0375,$$

$$\sigma_n^* = \sqrt{D_n^*} \approx \sqrt{0.0375} \approx 0.194.$$

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Правильна наближена рівність:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{\text{сп}\,i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \sum_{x_{\text{сп}\,i}\in[a_{i-1},a_i)} x_{\text{сп}\,i} \approx \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n}\bar{x}_i k_n([a_{i-1},a_i)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\bar{x}_i P_n^*([a_{i-1};a_i)) = \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{a_{i-1}}^{a_i} x\, f_n^*(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b x\, f_n^*(x)\,dx = m_n^*,$$

де $\bar{x}_i = \frac{1}{h}\int_{a_{i-1}}^{a_i} x\,dx = \frac{a_i^2 - a_{i-1}^2}{2h} = \frac{a_{i-1}+a_i}{2}$, і це число $\bar{x}_i$ наближено дорівнює середньому арифметичному спостережених значень $x_{cn\,j}$, що потрапили в проміжок $[a_{i-1};a_i)$, $k_n([a_{i-1},a_i))$ – кількість спостережених значень $x_{cn\,j}$, що потрапили в проміжок $[a_{i-1},a_i)$.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Кожен неперервний розподіл статистичних ймовірностей має центр розсіювання.

2. Якщо $x_{\text{сп}\,j}$, $j\in\overline{1,n}$, – спостережені значення, а $\bar{x}$ – координата центра розсіювання статистичних ймовірностей, то

$$\min_{1\le j\le n} x_{\text{сп}\ j} \le \bar{x} \le \max_{1\le j\le n} x_{\text{сп}\ j}.$$

3. Координата центра розсіювання статистичних ймовірностей завжди є раціональним числом.

4. Для обчислення дисперсії спочатку треба обчислити координату центра розсіювання статистичних ймовірностей.

5. Для обчислення дисперсії спочатку треба обчислити середнє квадратичне відхилення.

2. Знайти центр розсіювання, середнє квадратичне відхилення та дисперсію неперервного розподілу статистичних ймовірностей:

1) заданого таблицею:

$[a_{i-1},a_i)$	[0,1)	[1,2)	[2,3)	[3,4)	[4,5)	[5, 6)
$P_n^*([a_{i-1},a_i))$	0.10	0.70	0.10	0.06	0.03	0.01

2) заданого щільністю розподілу статистичних ймовірностей:

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 0.20 \text{ при } x\in[0,1) \\ 0.50 \text{ при } x\in[1,2) \\ 0.20 \text{ при } x\in[2,3) \\ 0.10 \text{ при } x\in[3,4) \\ 0 \quad\text{ при } x\,\overline{\in}\,[0,4) \end{cases}$$

3) заданого функцією розподілу статистичних ймовірностей:

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -1, \\ 0.2(x+1) & \text{при} \quad -1 \le x \le 0, \\ 0.2 + 0.6x & \text{при} \quad 0 \le x \le 1, \\ 0.8 + 0.2(x-1) & \text{при} \quad 1 \le x \le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

3. Знайти центр розсіювання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення неперервного розподілу статистичних ймовірностей заданих спостереженими значеннями:

1. Ряд спостережених значень відхилень точки падіння снаряда від цілі:

-52, -50, 47, 20, 17, 10, 14, 20,-50, -5, -20, 2, -27, -10, -15, 40, -19, 45, 34, -20, -29, -30, 15, -10, 10, 12, 14, 20, -33, -40, 50, 48, -10, 14, 10, -32, 50, -22, 43, 2, -5, 7, 14, -8, -5, 0, 23, -40, 17, 3.

2. Визначаючи вагу 50 новонароджених, дістали такі результати (у кг):

4,3; 4,4; 2,1; 3,5; 2,5; 3,2; 2,3; 4,1; 2,4; 4,0; 3,3; 2,9; 3,2; 3,0; 2,7; 3,4; 2,2; 3,1; 3,5; 3,7; 2,0; 3,0; 3,7; 3,6; 3,4; 3,3; 3,8; 3,2; 2,8; 2,9; 2,3; 2,5; 2,9; 2,6; 3,1; 3,4; 3,2; 3,9; 2,7; 3,5; 2,6; 2,7; 3,0; 2,9; 3,2; 3,3; 3,4; 3,1; 3,6; 3,9.

3. Визначиючи зріст (у см) кожної з 50 першокурсниць, дістали такі результати

169, 171, 157, 173, 170, 156, 172, 159, 168, 158, 160, 164, 161, 165, 162, 166, 163, 167, 160, 168, 165, 160, 166, 161, 167, 162, 168, 163, 169, 160, 164, 165, 163, 166, 162, 167, 161, 168, 160, 164, 168, 162, 167, 163, 166, 165, 162, 160, 166, 165.

4. 7, 3, 7, 5, 6, 5, 7, 8, 3, 4, 5, 7, 7, 6, 7, 3, 4, 2, 7, 8, 3, 3, 7, 6, 5.

5. $\underbrace{1,3,\ldots,1,3}_{5\text{ пар }1,3},\underbrace{1,4,\ldots,1,4}_{10\text{ пар }1,4},\underbrace{4,6,\ldots,4,6}_{3\text{ пари }4,6}, 5, 5, 5, 4.$

6. $\underbrace{3,4,\ldots,3,4}_{6\text{ пар }3,4},\underbrace{4,5,\ldots,4,5}_{13\text{ пар }4,5},\ \underbrace{6,5,\ldots,6,5}_{8\text{ пар }6,5}.$

7. $\underbrace{0,1,2,3,4,\ldots,0,1,2,3,4}_{5\text{ наборів }0,1,2,3,4},\underbrace{3,2,1,0,\ldots,3,2,1,0}_{5\text{ наборів }3,2,1,0},\underbrace{1,2,3,\ \ldots,1,2,3,}_{5\text{ наборів }1,2,3,}.$

4. Для неперервного розподілу статистичних ймовірностей спостережених значень задана відповідна функція розподілу $F_n^*(x)$. Знайти формули для обчислення m_n^*, D_n^* і σ_n^* за допомогою значень функції $F_n^*(x)$.

5. Знайти m_n^*, D_n^* та σ_n^* для неперервних розподілів статистичних ймовірностей, заданих за допомогою функції розподілу статистичних ймовірностей або відповідної щільності розподілу (з'ясувати, яких значень можуть набувати невідомі константи):

1. $F_n^*(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли} \quad x\le 0, \\ 2x, & \text{коли} \quad 0\le x\le \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{2}{3}x+C_1, & \text{коли} \quad \dfrac{1}{4}\le x\le \dfrac{1}{2}, \\ C_2x, & \text{коли} \quad \dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{3}{4}, \\ 1, & \text{коли} \quad x>\dfrac{3}{4}. \end{cases}$

2. $f_n^*(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли} \quad x<0 \ \text{або} \ x\ge 1, \\ 1, & \text{коли} \quad 0\le x<\dfrac{1}{3}, \\ C, & \text{коли} \quad \dfrac{1}{3}\le x<\dfrac{8}{9}, \\ 1, & \text{коли} \quad \dfrac{8}{9}\le x<1. \end{cases}$

3. $F_n^*(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли} \ x\le 0, \\ kx, & \text{коли} \ 0\le x\le 3, \\ 1, & \text{коли} \ x\ge 3. \end{cases}$

4. $F_n^*(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли} \ x\le 0, \\ kx+b, & \text{коли} \ 0<x\le \dfrac{1}{2}, \\ 1, & \text{коли} \ x>\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

6. Довести, що коли неперервний розподіл статистичних ймовірностей задано щільністю $f_n^*(x)$, $x\in[a;b]$, то

$$D_n^*=\int_a^b x^2 f_n^*(x)\,dx-m_n^{*2}.$$

7. Експеримент полягає у тому, що з проміжку $[0,1)$ навмання вибирають число і вважають його спостереженим значенням. Виявлено, що статистична ймовірність того, що спостережене значення належить проміжку $[a;b)\subset[0;1)$, дорівнює $b-a$.

1. Довести, що для будь-якого поділу проміжка $[0\,1)$ на n рівних проміжків, щільність розподілу $f_n^*(x)$ має один і той самий аналітичний вираз.

2. Обчислити відповідні m_n^*, D_n^* та σ_n^*.

15. Повторні незалежні випробування

Нехай ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) відповідає певному стохастичному експерименту, де P_n^* – статистична ймовірність, визначена за досить великою серією з n випробувань.

Зафіксуємо подію $A \in S$. Розглянемо серію із m незалежних випробувань серед вказаних n випробувань в кожному з яких відбувається або подія A, або подія $\overline{A}$. Можливі наслідки такої серії із m випробувань мають вигляд $(E_1, E_2, ..., E_m)$, де або $E_i = A$, або $E_i = \overline{A}$, причому множина Ω_1^m всіх таких наслідків серії із m випробувань містить 2^m елементів: $\Omega_1^m = \{E = \{E_1, E_2, ..., E_m\} : E_i = A$ або $E_i = \overline{A},\ i \in \overline{1, m}\}$. Нехай подія A_k, $k \in \overline{1, m}$, полягає в тому, що подія A відбувається в k-му випробуванні, тобто подія A_k відбувається, якщо подія A відбувається в k-му випробуванні, і A_k не відбувається, якщо в k-му випробуванні подія A не відбувається (а відбувається подія $\overline{A}$). При цьому *випробування* називаються *незалежними*, якщо події A_k, $k \in \overline{1, m}$, незалежні в сукупності. Нехай у кожному з m випробувань подія A відбувалася з статистичною ймовірністю $P_n^*(A) = p$ або не відбувалася з статистичною ймовірністю $P_n^*(\overline{A}) = 1 - p = q$. Елементарні події, з яких складається подія A_k, мають вигляд $E = \{E_1, E_2, ..., E_m\}$, де $E_k = A$ (подія A відбувається в k-му випробуванні), а всі інші E_i, $i \in \overline{1, m}$, $i \neq k$, можуть дорівнювати як A, так і $\overline{A}$. Наприклад при $m = 3$

$$A_1 = \{(A, A, A), (A, A, \overline{A}), (A, \overline{A}, A), (A, \overline{A}, \overline{A})\},$$

$$A_2 = \{(A, A, A), (\overline{A}, A, A), (A, A, \overline{A}), (\overline{A}, A, \overline{A})\},$$

$$A_3 = \{(A, A, A), (A, \overline{A}, A), (\overline{A}, A, A), (\overline{A}, \overline{A}, A)\}$$

Події A_k незалежні у сукупності тоді й тільки тоді, коли на просторі

$$\Omega_1^m = \{E = (E_1, E_2, ..., E_m) : E_i = A \text{ або } E_i = \overline{A},\ i \in \overline{1, m}\}$$

імовірнісна міра визначається рівністю

$$\widetilde{P}_m^*(\{E\}) = \widetilde{P}_m^*((E_1, E_2, ..., E_m)) = p^s \cdot q^{m-s}, \quad s \in \overline{0, m},\ E \in \Omega_1^m, \quad (15.1)$$

за умови, що серед координат E_k рівно s набувають значення A, а інші $(m - s)$ набувають значення $\overline{A}$.

Отже, на основі статистичної ймовірності $P_n^*(A)$ і серії повторних незалежних випробувань породжується ймовірнісна міра $\widetilde{P}_m^*(\{E\})$ на просторі Ω_1^m елементарних подій $E=(E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_m)$, а тому й на будь-якому просторі подій, що є підмножинами Ω_1^m, оскільки $\widetilde{P}_m^*(B)=\sum\limits_{E\in B}\widetilde{P}_m^*(\{E\})$, коли подія $B\subset\Omega_1^m$.

Приклад 15.1. Нехай стохастичний експеримент полягає в підкиданні монети і фіксації її верхньої грані. Тоді можна вважати, що $\Omega=\{Г, Ц\}$, подія A – випадання герба, тобто $A=\{Г\}$, а подія $\overline{A}$ – випадання цифри, тобто $\overline{A}=\{Ц\}$, причому $P_n^*(A)=\overline{P}_n^*(\overline{A})=\frac{1}{2}$. Тому простір Ω_1 у даному випадку можна ототожнювати з простором Ω. Якщо $m=10$, то $\Omega_1^{10}=\{E=(E_1,\ E_2,\ldots,\ E_{10}): E_k\in\Omega,\ k\in\overline{1,10}\}$, тобто або $E_k=\{Г\}$, або $E_k=\{Ц\}$ а $\widetilde{P}_{10}^*((E_1,\ E_2,\ \ldots\ ,\ E_{10}))=(\frac{1}{2})^{10}$ для будь-якої елементарної події $E=(E_1,\ E_2,\ldots,\ E_{10})\in\Omega_1^{10}$.

Позначимо через $B_{m,s}$ подію, яка полягає у тому, що в m незалежних випробуваннях подія A відбувається s разів, $s\in\overline{0,m}$. Подія $B_{m,s}$ є об'єднанням (сумою) подій $\{E\}$, де $E=(E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_m)\in\Omega^m$ – впорядкований набір із m координат E_k, $k\in\overline{1,\ m}$, серед яких рівно s координат E_k дорівнюють A, а інші $(m-s)$ координат дорівнюють $\overline{A}$. Очевидно, таких наборів є C_m^s. Враховуючи, що доданки в сумі $B_{m,s}$ попарно несумісні, та рівність (15.1), дістанемо

$$\widetilde{P}_m^*(B_{m,s})=\sum_{E\in B_{m,\ s}}\widetilde{P}_m(\{E\})=C_m^s p^s q^{m-s},\ \ s\in\overline{0,m}. \qquad (15.2)$$

Формулу (15.2) називають *формулою Бернуллі*.

Розподіл статистичних ймовірностей $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s})$, що визначається за формулою (15.2), називають *біноміальним*, оскільки статистичні ймовірності $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s})$ обчислюються так само, як члени розкладу бінома Ньютона $(p+q)^m$ за степенями p і q:

$$(p+q)^m=\sum_{s=0}^{m}C_m^s p^s q^{m-s}\ .$$

Зауважимо, що коли $B_{m,s}$, $s=0,\ 1,\ \ldots,\ m$, розглядати як єдино можливі наслідки серії із m випробувань стосовно кількості появ події A в m випробуваннях, тоді породжується ще один простір елементарних подій (наслідків серії випробувань)

$$\hat{\Omega}_m = \{B_{m,0},\ B_{m,1},\ \ldots,\ B_{m,m}\}$$

з імовірнісною мірою $\hat{P}_m^*(B_{m,s}) = C_m^s p^s q^{m-s} = \tilde{P}_m^*(B_{m,s})$, $s = 0, 1, \ldots, m$, визначеною на всіх підмножинах множини $\hat{\Omega}_m$.

При цьому $\hat{P}_m^*(B) = \sum\limits_{B_{m,s} \in B} \hat{P}_m^*(B_{m,s}),\ B \subset \hat{\Omega}_m$.

Зауважимо, що для простору $\hat{\Omega}_m$ події A_k змісту не мають.

Приклад 15.2. Нехай монета підкидається 10 разів, причому за результатами досить великої серії випробувань статистична ймовірність появи герба в кожному випробуванні дорівнює $\frac{1}{2}$. Тоді подія $B_{10,5}$ означає, що у 10 підкиданнях монети герб випадав 5 разів. Враховуючи формули (15.2) дістаємо

$$\tilde{P}_{10}^*(B_{10,5}) = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10!}{5!\cdot 5!}\cdot\frac{1}{2^{10}} = \frac{252}{1024} \approx \frac{1}{4}.$$

Теорема. *Статистичні ймовірності $\hat{P}_m^*(B_{m,s})$ зростають за змінною s, коли $s \in (0;\ s_0)$ і спадають за цією змінною, коли $s \in (s_0;\ m)$, де $s_0 = [(m+1)p]$. Тому $\hat{P}_m^*(B_{m,s_0})$ є найбільшою статистичною ймовірністю, коли $(m+1)p$ не є цілим числом, а коли число $(m+1)p$ – ціле, то $\hat{P}_m^*(B_{m,s_0}) = \hat{P}_m^*(B_{m,s_0-1})$ – дві найбільші статистичні ймовірності. При цьому*

$$(m+1)p - 1 < s_0 \le (m+1)p, \text{ звідки } p + \frac{p-1}{m} < \frac{s_0}{m} \le p + \frac{p}{m}.$$

Останнє означає, що при *досить великих m найчастіше число появ події A в серії із m незалежних випробувань виявляється рівним s_0 і таким, що із збільшенням m число $\frac{s_0}{m}$ стає як завгодно близьким до статистичної ймовірності $P_n^*(A) = p$.*

Приклад 15.3. Якщо $P_n^*(A) = \frac{1}{2}$ і $m = 10$, то ряд розподілу статистичних ймовірностей $\hat{P}_{10}^*(B_{10,s})$ має вигляд:

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{P}_{10}^*(B_{10,s})$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{1}{1024}$

Многокутник цього розподілу статистичних ймовірностей $\hat{P}_{10}^*(B_{10,s})$, $s \in \overline{0, 10}$, подано на Рис. 15.1. При цьому

$$s_0 = [(m+1)p] = \left[\frac{11}{2}\right] = \left[5\frac{1}{2}\right] = 5\,.$$

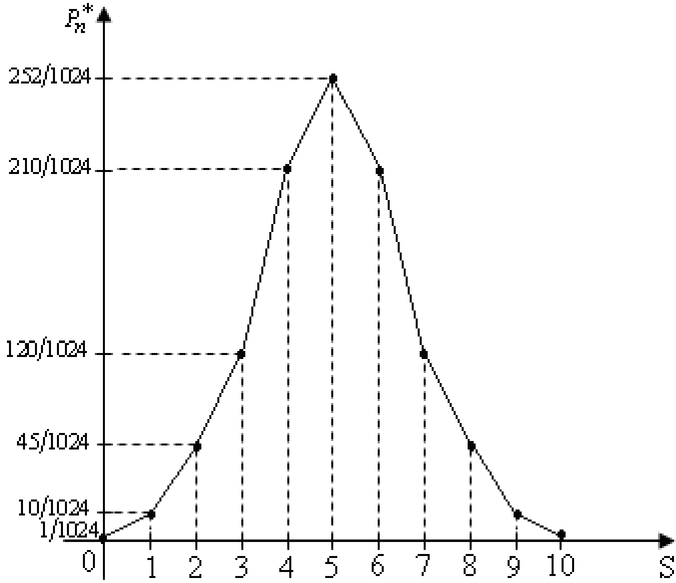

Рис. 15.1

Отже, $\hat{P}_{10}^*(B_{10,5})$ – єдина найбільша статистична ймовірність за змінною $s \in \overline{0,\, 10}$. При цьому $\dfrac{s_0}{m} = \dfrac{5}{10} = P_n^*(A) = \dfrac{1}{2}$.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Враховуючи, що події $B_{m,s}$ попарно несумісні і в m випробовуваннях принаймні одна з них обов'язково відбувається, дістаємо:

$$\tilde{P}_m^*\left(\sum_{s=0}^{m} B_{m,s}\right) = \sum_{s=0}^{m} \tilde{P}_m^*(B_{m,s}) = \sum_{s=0}^{m} C_m^s p^s q^{m-s} = (p+q)^m = 1\,.$$

Вправа 2. Щоб знайти найбільшу за змінною $s \in \overline{0, m}$ статистичну ймовірність $\hat{P}_m^*(B_{m,s})$, розглянемо відношення:

$$\frac{\hat{P}_m^*(B_{m,s})}{\hat{P}_m^*(B_{m,s-1})} = \frac{C_m^s p^s q^{m-s}}{C_m^{s-1} p^{s-1} q^{m-(s-1)}} =$$

$$= \frac{\dfrac{m(m-1)\,\ldots(m-(s-1))}{1\cdot 2\,\ldots s}}{\dfrac{m(m-1)\,\ldots(m-(s-2))}{1\cdot 2\,\ldots\,(s-1)}} \cdot \frac{p^s q^{m-s}}{p^{s-1} q^{m-(s-1)}} = \frac{m-s+1}{s} \cdot \frac{p}{q} < 1,$$

звідки $mp + p - sp < sq$ або $mp + p < s(p + q)$, тобто $s > (m+1)p$.

Отже,

$$\hat{P}_m^*(B_{m,s}) < \hat{P}_m^*(B_{m,s-1}), \text{ якщо } s > (m+1)p.$$

Аналогічно дістаємо, що

$$\hat{P}_m^*(B_{m,s}) > \hat{P}_m^*(B_{m,s-1}), \text{ якщо } 1 \le s < (m+1)p.$$

Таким чином, якщо число $(m+1)p$ не є цілим і $s_0 = [(m+1)p]$ – найбільше ціле число, що не перевищує $(m+1)p$, то $\hat{P}_m^*(B_{m,s_0})$ є єдиною найбільшою статистичною ймовірністю, а число появ події A в серії із m незалежних випробувань, яке зустрічається найчастіше, близьке до $mP_n^*(A) = mp$.

У випадку, коли число $(m+1)p = s_0$ є цілим, дістаємо

$$\hat{P}_m^*(B_{m,s}) < \hat{P}_m^*(B_{m,s-1}), \text{ якщо } s \ge s_0,$$

а

$$\hat{P}_m^*(B_{m,s}) > \hat{P}_m^*(B_{m,s-1}), \text{ якщо } s < s_0, \text{ тобто } s \le s_0 - 1.$$

При цьому

$$\frac{\hat{P}_m^*(B_{m,s_0})}{\hat{P}_m^*(B_{m,s_0-1})} = \frac{m - s_0 + 1}{s_0} \cdot \frac{p}{q} = \frac{(m+1) - (m+1)p}{(m+1)p} \cdot \frac{p}{q} = \frac{(m+1)\cdot(1-p)}{(m+1)p} \cdot \frac{p}{q} = 1,$$

тобто $\hat{P}_m^*(B_{m,s_0}) = \hat{P}_m^*(B_{m,s_0-1})$ – дві найбільші статистичні ймовірності.

Вправа 3. *Задача про перехід вулиці*. Статистична ймовірність наявності перед переходом будь-якої секунди машини, що рухається, дорівнює p. Пішоход може перейти вулицю, коли протягом трьох секунд перед ним не буде машини. Знайти статистичну ймовірність того, що пішохід чекав: 1) 0 секунд; 2) 2 секунди.

Нехай подія A_k – наявність машини перед пішоходом у k-у секунду, $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$, а $\overline{A}_k$ – відсутність машини перед пішоходом у k-у секунду. Позначимо

$$P_n^*(A_k) = p, \; P_n^*(\overline{A}_k) = 1 - p.$$

Вважаємо, що події A_k незалежні. Тоді пішохід чекатиме переходу 0 секунд, коли виконується подія $B_0 = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, статистична ймовірність якої

$$P_n^*(B_0) = P_n^*(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = P_n^*(\overline{A}_1)\cdot P_n^*(\overline{A}_2)\cdot P_n^*(\overline{A}_3) = (1-p)^3.$$

Пішохід чекатиме переходу 2 секунди, коли виконується подія

$$B_2 = A_1 A_2 \overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5,$$

для якої

$$P_n^*(B_2) = P_n^*(A_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4 \overline{A}_5) + P_n^*(\overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4 \overline{A}_5) =$$
$$= p^2(1-p)^3 + p(1-p)^4 = p(1-p)^3.$$

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Повторні випробування пов'язані з довільною серією з m випробувань.
2. Повторні випробування пов'язані з одним і тим самим випадковим експериментом.
3. Подія $B_{m,s}$ пов'язана з кількістю появ події A у даній серії з m випробувань і ця подія не залежить від m.
4. Незалежність випробувань означає незмінність умов проведення цих випробувань, тобто незмінність відповідного ймовірнісного простору.
5. Декартів добуток $A \times B$ існує для будь-яких множин A і B.
6. Якщо $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, то $A \times B = B \times A$.
7. Якщо $\Omega_1 = \{A, \overline{A}\}$, то Ω_1^m містить 2^m елементів.
8. Сума усіх статистичних ймовірностей $\hat{P}_m^*(B_{m,s})$ не залежить від m.

2. Знайти статистичну ймовірність того, що у серії з m незалежних випробувань подія A відбувається принаймні один раз, якщо статистична ймовірність відбування цієї події у кожному випробуванні дорівнює $p = P_n^*(A) > 0$.

3. 1. Знайти статистичну ймовірність того, що у серії з $m = 9$ підкидань монети герб випадає: 1) 5 разів; 2) 4 рази, вважаючи, що при кожному підкиданні $P_n^*(\{\Gamma\}) = \dfrac{1}{2}$.

2. Порівняти ці статистичні ймовірності.

3. Побудувати ряд та многокутник розподілу статистичних ймовірностей $\hat{P}_9^*(B_{9,s})$, $s \in \overline{0,\ 9}$.

4. Розв'язатити завдання 1-3 за умови, що довжина серії $m = 20$.

4. Довести, що коли $\Omega_1 = \{A, \overline{A}\}$, то Ω_1^m – декартів m-й степінь простору Ω_1 містить 2^m елементів.

5. Виписати всі елементарні події $E = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ простору $\Omega = \Omega_1^4$, де $\Omega_1 = \{A, \overline{A}\}$, а також всі елементарні події $E \in \Omega = \Omega_1^4$, що визначають відповідно події A_1, A_2, A_3, A_4 в серії з 4-х незалежних випробувань, а також події $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$, $\overline{A}_4$ та добутки подій $A_1 A_2$, $A_1 A_3$, $A_1 A_4$, $A_2 A_3$, $A_2 A_4$, $A_3 A_4$, $A_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4$, $A_1 \overline{A}_2 A_3 A_4$, $A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4$.

6. Нехай подія A_k означає відбування події A (із статистичною ймовірністю $P_n^*(A) = p > 0$) у k-му випробуванні серед серії з m незалежних випробувань. Знайти:

1) елементарні події, з яких складається подія A_k;

2) елементарні події, з яких складається подія $\overline{A}_k$;

3) елементарні події, з яких складається подія $A_1 + A_2 + \ldots + A_m$;

4) елементарні події, з яких складається подія $B_{m,s}$;

5) зв'язок події $B_{m,s}$, яка полягає у відбуванні події A s разів у серії з m незалежних випробувань, з подіями A_k та $\overline{A}_k$;

6) статистичну ймовірність $\tilde{P}_m^*(A_1 + A_2 + \ldots + A_m)$;

7) статистичну ймовірність $\tilde{P}_m^*(B_{m,s})$.

7. Нехай $\Omega_1 = \{A, \overline{A}\}$, $\Omega = \Omega_1^m$ – декартів m-ий степінь простору Ω_1, а подія A_k – відбування події A у k-му випробуванні. Довести, що подія $A_1 + A_2 + \ldots + A_m$ відрізняється від простору Ω лише однією елементарною подією. Знайти цю елементарну подію.

8. Задача де Мере. Знайти статистичну ймовірність того, що при підкиданні грального кубика 4 рази принаймні один раз випадає 6 очок. Вважати, що при кожному підкиданні $P_n^*\{"6"\} = \frac{1}{6}$.

9. Задача Паскаля та Ферма. Знайти статистичну ймовірність того, що при підкиданні двох гральних кубиків 24 рази принаймні один раз випадає пара шісток. Вважати, що $P_n^*(6,6) = \frac{1}{36}$, при кожному підкиданні. Порівняти знайдену статистичну ймовірність з результатом попередньої задачі.

10. Нехай $P_n^*(A) = \frac{1}{2}$, $m = 10$ і ряд розподілу статистичних ймовірностей $\tilde{P}_m^*(B_{m,s}) = p_s$, $s \in \overline{0,\,10}$ має вигляд

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_s	$\frac{1}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{1}{1024}$

Знайти: 1) $\tilde{P}_m^*(|\frac{s}{10} - \frac{1}{2}| < 0{,}4)$ і 2) $\tilde{P}_m^*(|\frac{s}{10} - \frac{1}{2}| < 0{,}1)$.

11. Екзаменаційний тест містить 10 завдань, до кожного з яких дано 5 відповідей, лише одна з яких правильна. За допомогою контролюючого засобу оцінюється відповідь учня кількістю балів $i \in \overline{0{,}10}$, що дорівнює кількості правильних відповідей. Учень не готувався до екзамену і вирішив вибирати номери відповідей навмання (при цьому статистична ймовірність кожної правильної відповіді дорівнює $\frac{1}{5}$).

1. Знайти статистичну ймовірність того, що учень дістає оцінку "i", $i \in \overline{0,10}$.

2. Яка оцінка за заданих умов зустрічається найчастіше?

3. Знайти статистичну ймовірність того, що оцінка лежить в межах від 1 до 3, включаючи ці числа.

12. Статистична ймовірність того, що навмання вибрана людина є "лівшою", дорівнює 0,01.

1. Знайти статистичну ймовірність того, що серед 200 людей є принаймні 4 "лівші".

2. Яка кількість лівшів з'являється найчастіше серед 200 людей?

3. Що можна сказати про полігон відносних частот для кількості лівшів серед 200 людей?

13. Статистична ймовірність влучення в мішень дорівнює $\frac{1}{5}$ при кожному пострілі.

1. Знайти статистичну ймовірність влучення у мішень двічі при 10 пострілах.

2. Яка кількість влучень у мішень зустрічається найчастіше при: 1) 10 пострілах; 2) 100 пострілах?

3. Знайти дискретний розподіл статистичних ймовірностей кількостей влучень у мішень при 10 пострілах та: 1) побудувати ряд розподілу та полігон відносних частот; 2) знайти відповідну функцію розподілу статистичних ймовірностей; 3) обчислити m_{10}^*, D_{10}^* та σ_{10}^*.

14*. Узагальнити задачу **13** на випадок m пострілів.

15. Нехай статистична ймовірність того, що навмання вибрана людина народилася у певному місяці, однакова для всіх місяців. Знайти статичну ймовірність того, що:

1) дні народження шістьох випадково зустрінутих людей припадають на один місяць року;

2) серед шістьох випадково зустрінутих людей дні народження трьох припадають на один місяць року;

3) серед шістьох випадково зустрінутих людей кількість таких, дні народження яких припадають на січень місяць, дорівнює i, $i \in \overline{0,6}$.

16. Одну й ту саму сторінку книги друкували багато разів. Статистична ймовірність того, що на даній сторінці книги є друкарська помилка, дорівнює 1/500.

1. Знайти статистичну ймовірність того, що на десяти копіях сторінки книги не менше трьох друкарських помилок.

2. Яка кількість помилок на десяти копіях сторінки зустрічається найчастіше?

17. Статистична ймовірність того, що навмання вибрана людина є дальтоніком, дорівнює 0,01. Якою повинна бути кількість n людей, щоб із статистичною ймовірністю не меншою за 0,95 можна було стверджувати, що серед n людей є принаймні один дальтонік?

18. Статистична ймовірність влучення в мішень дорівнює 0,51. Яка статистична ймовірність того, що в серії з 5 пострілів: 1) три влучення; 2) не більше трьох влучень; 3) не більше двох промахів.

19. Статистична ймовірність того, що відвідувач автомагазину зробить покупку, дорівнює 0,2. Знайти статистичну ймовірність того, що з п'ятьох відвідувачів магазину: 1) лише один зробить покупку; 2) хоча б один зробить покупку; 3) жоден не зробить покупку; 4) усі зроблять покупку.

20. За даними технічного контролю 90% виготовлених виробів є якісними. Знайти статистичну ймовірність того, що в партії із 100 виробів буде: 1) 10 бракованих; 2) не менше 5, але менше 10 бракованих; 3) не менше 80 виробів якісні.

21. За умови задачі про перехід вулиці (див. вправу 2) знайти статистичну ймовірність того, що пішохід чекатиме рівно: 1) 1 секунду; 2) 3 секунди; 3) 4 секунди.

22. На аукціонах продаються за початковою вартістю у середньому 20% виставлених пакетів акцій.

1. Знайти статистичну ймовірність того, що з 9 виставлених пакетів акцій було продано за початковою вартістю: 1) i пакетів, $i \in \overline{0{,}9}$; 2) не менше 2-х пакетів; 3) не більше 3-х пакетів; 4) принаймні 1 пакет акцій.

2. Знайти кількість пакетів акцій, проданих за початковою вартістю, що зустрічається найчастіше, та обчислити статистичну ймовірність такої події.

23. Статистична ймовірність того, що навмання вибрана деталь є бракованою, дорівнює 0,01.

1. Знайти статистичну ймовірність того, що серед 1000 деталей: 1) принаймні одна бракована; 2) три бракованих; 3) не більше трьох бракованих.

2. Знайти кількість бракованих деталей серед 1000, що зустрічається найчастіше, та обчислити статистичну ймовірність того, що було саме стільки бракованих деталей.

24. Статистична ймовірність того, що пакет акцій, придбаний на ринку цінних паперів, принесе прибуток, дорівнює 0,5.

1. Знайти статистичні ймовірності того, що з 5 придбаних пакетів акцій прибуток приносили: 1) i пакетів, $i \in \overline{0{,}5}$; 2) принаймні один пакет; 3) не менше трьох пакетів.

2. Нехай придбано 5 пакетів акцій. Знайти кількість прибуткових пакетів акцій, що зустрічається найчастіше, та обчислити статистичну ймовірність того, що така кількість пакетів приносила прибуток.

3. Визначити, при якій кількості куплених пакетів акцій із статистичною ймовірністю не меншою за 0,95 отримували прибуток принаймні від одного пакету акцій.

25. Відомо, що 80% працівників фірми мають вищу освіту.

1. Знайти статистичну ймовірність того, що зі 10 навмання вибраних працівників вищу освіту мають: 1) i працівників, $i \in \overline{0{,}10}$; 2) принаймні 9 працівників; 3) не більше 9 працівників.

2. Знайти кількість працівників з вищою освітою, що зустрічається найчастіше серед 10 працівників, та обчислити статистичну ймовірність такої кількості працівників.

26. Статистична ймовірність того, що людина в період страхування буде травмованою дорівнює 0,006. Застраховано 1000 людей, кожна з яких зробила страховий внесок у 150 грн. У випадку травми застрахована людина отримує 12000 грн. Знайти статистичну ймовірність кількості страхових виплат, що зустрічаюєся найчастіше на 1000 застрахованих, та відповідну суму виплат.

27. Статистична ймовірність фальшивості купюри номіналом 200 грн дорівнює 0,0001. Через касу за день проходить біля 20000 купюр номіналом 200 грн.

1. Знайти кількість фальшивих купюр, що зустрічається найчастіше.

2. Якою є статистична ймовірність такої кількості фальшивих купюр?

3. За скільки днів виправдає себе приклад для виявлення фальшивих купюр, якщо він коштує 500 грн. і кожного дня знаходить згадану вище найбільш можливу кількість фальшивих купюр?

16. Поняття випадкової величини

Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*). Дійсну функцію $X(E), E \in \Omega$ називають *випадковою величиною*, якщо для будь-якого $G \in S_X$ прообраз

$$X^{-1}(G) = \{E : E \in \Omega, X(E) \in G\} \in S\,,$$

тобто є подією, де $\Omega_X = X(\Omega) = \{x : x = X(E), E \in \Omega\}$ множина значень функції X (Ω_X – образ множини Ω при відображенні $\Omega \xrightarrow{X} \Omega_X$), S_X – сукупність підмножин множини Ω_X, що задовільняє вимоги 1_s–3_s до простору подій (див. 1.4 або 1.6).

Таку функцію $X = X(E)$, $E \in \Omega$, називають також S / S_X - *вимірною функцією* і покладають $P_{nX}^*(G) = P_n^*(X^{-1}(G))$ для кожного $G \in S_X$. При цьому говорять, що *ймовірнісний простір* $(\Omega_X, S_X, P_{nX}^*)$ *породжується* (*генерується*) *випадковою величиною* X з ймовірнісного простору (Ω, S, P_n^*).

Приклад 16.1. Нехай

$$\Omega = \{"1","2","3","4","5","6"\},\ H_1 = \{"1","2","3","4"\},$$

$$H_2 = \{"5"\},\ H_3 = \{"6"\},\ P_n^*(H_1) = 0.10,$$

$$P_n^*(H_2) = 0.30,\ P_n^*(H_3) = 0.60,$$

$$S = \{\varnothing, H_1, H_2, H_3, H_1 + H_2, H_1 + H_3, H_2 + H_3, H_1 + H_2 + H_3 = \Omega\}.$$

Тоді $(\Omega,\ S,\ P_n^*)$ – ймовірнісний простір. Нехай на множині $\Omega = \{"1","2","3","4","5","6"\}$ задана функція $X(E)$ наступним чином: $X(E) = 1$, якщо $E \in \{"1","2","3","4"\}$; $X(E) = 2$, якщо $E \in \{"5"\}$; $X(E) = 3$, якщо $E \in \{"6"\}$.

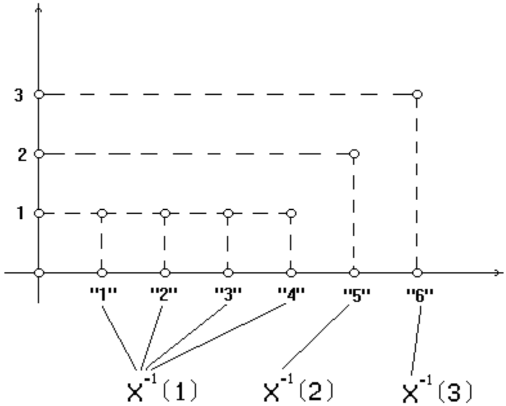

Рис. 16.1

Якщо елементарні події "1", "2", "3", "4", "5", "6" подати як точки на числовій осі Ox, то графічно зазначену залежність можна подати так, як показано на Рис. 16.1.

Таким чином $X(\Omega) = \Omega_X = \{1, 2, 3\}$.

Розглянемо таку сукупність S_X підмножин множини $\Omega_X = X(\Omega)$:

$$S_X = \{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\}\}.$$

Очевидно, ця сукупність S_X задовольняє вимоги 1_s-3_s до простору подій.

Оскільки одне і те саме число 1 поставлено у відповідність елементарним подіям і "1", і "2", і "3", і "4", прообразом точки 1 є множина $X^{-1}(\{1\}) = H_1 = \{"1","2","3","4"\} \in S$. Це означає, що статистична ймовірність (відносна частота) того, що функція $X(E)$ набуває значення 1, дорівнює статистичній ймовірності (відносній частоті) попадання в підмножину $H_1 = \{"1","2","3","4"\} \in S$, тобто дорівнює 0.10 (бо значення 1 функція $X(E)$ набуває тоді, коли на верхній грані кубика випадає одна з цифр "1", або "2", або "3", або "4").

Аналогічно прообразом точки 2 є одноелементна множина $X^{-1}(\{2\}) = H_2 = \{"5"\} \in S$, тому статистична ймовірність того, що $X(E)$ набуває значення 2, дорівнює статистичній ймовірності випадання цифри "5" на верхній грані кубика, тобто дорівнює 0.30. Прообразом точки 3 є одноелементна множина $X^{-1}(\{3\}) = H_3 = \{"6"\} \in S$, а тому статистична ймовірність того, що функція $X(E)$ набуває значення 3, дорівнює статистичній ймовірності випадання цифри "6" на верхній грані кубика, тобто дорівнює 0.60.

Тепер легко знайти статистичні ймовірності попадання значень $X(E)$ у різні підмножини G множини $X(\Omega) = \Omega_X = \{1, 2, 3\}$, $G \in S_X$. Очевидно, статистична ймовірність попадання значень $X(E)$:

– в підмножину $\{1,2\} \in S_X$ така сама, як статистична ймовірність попадання елементарних подій *E* в підмножину

$$X^{-1}(\{1,2\}) = X^{-1}(\{1\}) \cup X^{-1}(\{2\}) = \{"1","2","3","4"\} \cup \{"5"\} = \{"1","2","3","4","5"\} \in S,$$

тобто дорівнює 0.40;

– в підмножину $\{1,3\} \in S_X$ така сама, як в підмножину

$$X^{-1}(\{1,3\}) = X^{-1}(\{1\}) \cup X^{-1}(\{3\}) = \{"1","2","3","4"\} \cup \{"6"\} = \{"1","2","3","4","6"\} \in S,$$

тобто дорівнює 0.70;

– в підмножину $\{2,3\} \in S_X$ така сама, як в підмножину

$$X^{-1}(\{2,3\}) = X^{-1}(\{2\}) \cup X^{-1}(\{3\}) = \{"5"\} \cup \{"6"\} = \{"5","6"\} \in S,$$

тобто дорівнює 0.90;

– в підмножину $\{1,2,3\} \in S_X$ така сама, як в підмножину

$$X^{-1}(\{1, 2, 3\}) = X^{-1}(\{1\}) \cup X^{-1}(\{2\}) \cup X^{-1}(\{3\}) = \{"1","2","3","4"\} \cup \{"5"\} \cup \{"6"\} =$$
$$= \{"1","2","3","4","5","6"\} = \Omega \in S,$$

тобто дорівнює 1.00.

Як бачимо, прообрази всіх підмножин $G \in S_X$ належать до простору подій S, тобто $X^{-1}(G) \in S$, коли $G \in S_X$, а тому функція $X(E)$, $E \in \Omega$, є S/S_X-вимірною, тобто випадковою величиною.

При заданій дійсній функції $X(E)$ на просторі елементарних подій Ω часто як $X(\Omega)$ розглядають простір $R^1 = (-\infty, \infty)$, покладаючи при цьому $X^{-1}(x) = \varnothing$, якщо значення (точка) $x \in R^1$ не поставлене у відповідність жодній елементарній події $E \in \Omega$.

При цьому як сукупність S_X підмножин простору $R^1 = (-\infty, \infty)$ розглядають сукупність, породжену числовими проміжками та їх скінченними сумами (див. 1.4, вправа 2).

В такому разі дійсну функцію $X(E) \in R^1$, $E \in \Omega$, таку, що $X^{-1}((-\infty, x)) \in S$ для довільного $x \in R^1$, називають S-*вимірною функцією* або *випадковою величиною*. При цьому насправді мається на увазі S/S_X вимірна функція, хоч сукупність S_X явно і не вказується.

Надалі, якщо не сказано іншого, під випадковою величиною розумітимемо S-вимірну функцію.

Зауважимо, що коли простір подій S містить всі підмножини множини Ω, то тоді будь-яка дійсна функція, задана на Ω, буде S-вимірною, тобто випадковою величиною.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Нехай ймовірнісний простір $(\Omega,\ S,\ P_n^*)$ той самий, що і в прикладі 16.1, а на множині $\Omega = \{"1","2","3","4","5","6"\}$ задано функцію $X(E)$ наступним чином: $X(E) = 1$, якщо $E \in \{"1","3","5"\}$, тобто якщо на верхній грані кубика випадає непарна цифра, і $X(E) = 2$, якщо $E \in \{"2","4","6"\}$, тобто якщо на верхній грані кубика випадає парна цифра (Рис. 16.2).

В цьому випадку $\Omega_X = X(\Omega) = \{1, 2\}$.

Розглянемо таку сукупність S_X підмножин G множини $X(\Omega) = \{1,2\}$: $S_X = \{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,2\}\}$.

Оскільки $X^{-1}(\{1\}) = \{"1","3","5"\} \,\overline{\in}\, S$, так само, як і $X^{-1}(\{2\}) = \{"2","4","6"\} \,\overline{\in}\, S$, то в даному прикладі функція $X(E)$, задана на множині $\Omega = \{"1","2","3","4","5","6"\}$, не є S / S_X-вимірною, тобто не є випадковою величиною. Для так заданої функції $X(E)$, $E \in \Omega$, на заданому ймовірнісному просторі $(\Omega,\ S,\ P_n^*)$ неможливо визначити статистичну ймовірність (відносну частоту) $P_{nX}^*(\{1\}) = P_n^*(X^{-1}(\{1\})) = P_n^*(\{"1","3","5"\})$ чи $P_{nX}^*(\{2\}) = P_n^*(X^{-1}(\{2\})) = P_n^*(\{"2","4","6"\})$, бо множини $X^{-1}(\{1\}) = \{"1","3","5"\}$ і $X^{-1}(\{2\}) = \{"2","4","6"\}$ виявляються невимірними відносно заданої ймовірнісної міри $P_n^*(A)$, $A \in S$.

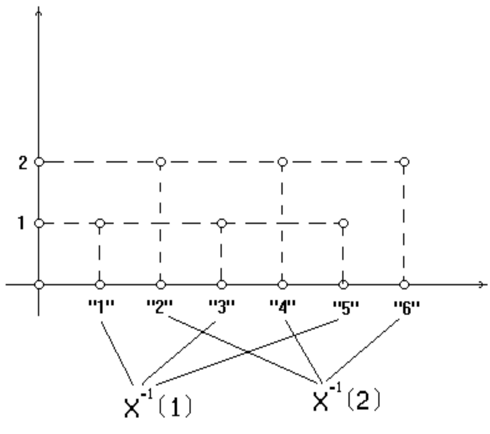

Рис. 16.2

Якщо ж задати таку сукупність S_{1X} підмножин G множини $X(\Omega)$: $S_{1X} = \{\varnothing, \{1,2\}\}$, тоді розглянута функція $X(E)$, $E \in \Omega$, виявляється S / S_{1X} вимірною, а значить випадковою величиною, бо $X^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in S$, $X^{-1}(\{1,2\}) = \Omega \in S$ і

$$P_{nX}^{*}(\varnothing)=P_n^{*}(X^{-1}(\varnothing))=P_n^{*}(\varnothing)=0,$$

$$P_{nX}^{*}(\{1{,}2\})=P_n^{*}(X^{-1}(\{1{,}2\}))=P_n^{*}(\Omega)=1.$$

Вправа 2. Перевірити чи правильні твердження:

1. Якщо $X(E)$, $E\in\Omega$, є S/S_X-вимірною функцією, то для кожного її значення x_0 множина $X^{-1}(x_0)$ є подією.
2. Твердження 1 є правильним, коли $X(E)$, $E\in\Omega$, є S-вимірною функцією.
3. Якщо для кожного значення x_0 множина $X^{-1}(x_0)$ є подією, то $X(E)$, $E\in\Omega$, є випадковою величиною.
4. Твердження 3 є правильним, коли множина значень функції $X(E)$, $E\in\Omega$, не більше ніж зчисленна функція.
5. Якщо функція $X(E)$, $E\in\Omega$, є S/S_X-вимірною функцією для деякого простору подій S_X, то ця функція є й S-вимірною.
6. Твердження, обернене до 5, є правильним.
7. Якщо $X(E)$, $E\in\Omega$ – S-вимірна функція і Ω_X – скінченна або зчисленна множина , то $X(E)$ – S/S_X-вимірна функція для будь якого простору S_X.

1. Вправа 1 показує, що твердження 1 не є правильним.
2. Якщо функція $X(E)$, $E\in\Omega$, є S-вимірною, то тоді для кожного проміжку $[a;b)$ множина $X^{-1}([a;b))\in S$, тобто є подією. Тому для будь-якого значення x_0 маємо

$$(X=x_0)=X^{-1}\{x_0\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}(x_0\le X<x_0+\frac{1}{n})=\bigcap_{n=1}^{\infty}X^{-1}([x_0;x_0+\frac{1}{n}))\in S,$$

тобто є подією як переріз подій.

Отже, твердження 2 є правильним.

3. Нехай $A\subset(0;1)$ і A – не має довжини, тобто не є вимірною за Лебегом; $X(E)=1+E$, коли $E\in[0;1]\setminus A$, і $X(E)=1-E$, коли $E\in A$. Тому $(X<1)=X^{-1}((-\infty;1))=\{E\in[0;1]:X(E)<1\}=A\notin S$, якщо S – сукупність підмножин відрізка $\Omega=[0;1]$, що мають довжину (вимірних за Лебегом).

Це означає, що $X(E)$ не є випадковою величиною (S-вимірною функцією). Разом з тим для кожного значення x_0 маємо два випадки:

а) $x_0\ge 1$ і тоді $X(E)=1+E=x_0\Leftrightarrow E=x_0-1$, або

б) $x_0<1$ і тоді $X(E)=1-E=x_0\Leftrightarrow E=1-x_0$.

У будь-якому випадку $X^{-1}(x_0)$ складається з однієї точки, а тому має нульову довжину, тобто $P(X^{-1}(x_0))=0\ \forall x_0\in\Omega_X$.

Отже, твердження 3 не є правильним.

4. Якщо $\Omega_X = \{x_1, x_2, ...\}$ – не більш ніж зчисленна множина і для кожної точки x_k множина $X^{-1}(x_k)$ є подією, то для будь-якої множини $B \in S_X$ її прообраз $X^{-1}(B)$ можна подати у вигляді об'єднання не більш ніж зчисленної кількості подій:

$$X^{-1}(B) = \bigcup_{x_k \in B} X^{-1}(x_k),\ X^{-1}(x_k) \in S\ .$$

Тому $X^{-1}(B) \in S$ і $X(E)$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною, тобто твердження 4 є правильним.

5. Твердження 5 не є правильним в силу того, що твердження 1 не є правильним, а твердження 2 є правильним.

6. Твердження 6 є правильним, оскільки S_X може бути простором, породженим сукупністю проміжків $[a;b)$.

7. Твердження 7 є правильним в силу того, що правильні твердження 2 і 4.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Для будь-якої функції $X(E)$, $E \in \Omega$, кожна елементарна подія $E \in \Omega$ має єдиний образ.

2. Для будь-якої функції $X(E)$, $E \in \Omega$, кожне число $x \in R$ має прообраз $X^{-1}(x)$, що містить лише один елемент.

3. Якщо функція $X(E)$, $E \in \Omega = [a;b]$, є зростаючою, то прообраз $X^{-1}(x)$ містить лише один елемент для кожного $x \in X([a;b])$.

4. Якщо функція $X(E)$ визначена на просторі Ω елементарних подій, то вона є випадковою величиною.

5. Твердження, обернене до 4, є правильними.

6. Дійсна функція $X(E)$, $E \in \Omega$, є S-вимірною або випадковою величиною, коли множина розв'язків нерівності $X(E) < x$, тобто $X^{-1}((-\infty, x))$, є подією з простору S для будь-якого числа x.

7. Якщо простір подій S не є найширшим простором для даного простору Ω елементарних подій, то існує функція $X(E)$, $E \in \Omega$, що не є випадковою величиною.

2. Нехай $\Omega = \{Г, Ц\}$. Побудувати ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) і функцію $X(E)$, $E \in \Omega$, такі що: 1) $X(E)$ є випадковою величиною; 2) $X(E)$ не є випадковою величиною.

3. Нехай задано дискретний розподіл статистичних ймовірностей: $P_n^*(x_i)$, $i \in \overline{1, k}$, причому кожна елементарна подія $E = x_i$ визначає певну подію $\{E\} = \{x_i\} \in S$.

1. Довести, що $Y(E) = P_n^*(E)$, $E \in \Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, є випадковою величиною.

2. Чи буде $Y(E) = P_n^*(E)$ випадковою величиною, коли множина $\{x_i\}$ не є подією для деякого $i \in \overline{1, k}$?

4. Нехай задано неперервний розподіл статистичних ймовірностей з щільністю розподілу $f_n^*(x)$, $x \in R$. Чи є $f_n^*(x)$ випадковою величиною?

5. Чи є випадковою величиною функція дискретного розподілу статистичних ймовірностей?

6. Навести приклади дискретних та неперервних просторів Ω елементарних подій, відповідних ймовірнісних просторів і функцій $X(E)$, $E \in \Omega$, таких, що є випадковими величинами, і таких, що не є випадковими величинами.

7. Нехай ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) є таким, що простір подій S є найширшим з можливих. Довести, що будь-яка функція $X(E)$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною.

8. Нехай у ймовірнісному просторі (Ω, S, P_n^*) простір подій S не є найширшим з можливих. Довести, що існує функція $X(E)$, $E \in \Omega$, така, що не є випадковою величиною.

У задачах **9-16** вважається, що ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) є заданим.

9. Нехай $A \subset \Omega$, а

$$X(E) = \begin{cases} 1, \text{ коли } E \in A, \\ -1, \text{ коли } E \notin A. \end{cases}.$$

Визначити, коли функція $X(E), E \in \Omega$: 1) є випадковою величиною; 2) не є випадковою величиною; 3) обчислити статистичну ймовірність кожного значення випадкової величини X.

10. Функція $X(E) = E^2$, $E \in R$, причому кожен проміжок $< \alpha; \beta >$ є подією.

1. Чи є дана функція випадковою величиною?
2. Обчислити статистичну ймовірність кожного значення випадкової величини X.

11*. 1. Довести, що кожна неперервна функція $Y = f(x)$, задана на проміжку $(a; b) = \Omega$, є випадковою величиною (S-вимірною функцією), коли кожний проміжок є подією.

2. Обчислити статистичну ймовірність кожного значення випадкової величини Y.

12. Нехай $\Omega = \{Г, Ц\}$ – простір елементарних подій. Визначити, коли функція $X(E)$, $E \in \Omega$: 1) буде випадковою величиною; 2) не буде випадковою величиною.

2. Обчислити статистичну ймовірність кожного значення випадкової величини X.

13. Нехай статистична ймовірність того, що при пострілі з лука відбувається влучення, дорівнює $\frac{1}{2}$, а X – кількість влучень при трьох пострілах.

1. Знайти: 1) область визначення величини X; 2) множину значень цієї величини; 3) простір подій S, для якого X є випадковою величиною; 4) простір подій S, для якого X не є випадковою величиною.

2. Обчислити статистичну ймовірність кожного значення випадкової величини X.

14. Статистична ймовірність того, що автомат для розміну монет спрацьовує при опусканні монети номіналом 1 грн., дорівнює 0,97. Нехай X – кількість монет, опущених конкретною людиною в автомат до його першого спрацювання.

1. Знайти: 1) область визначення величини X; 2) множину значень цієї величини; 3) простір подій S, для якого X є випадковою величиною; 4) простір подій S, для якого X не є випадковою величиною.

2. Обчислити статистичну ймовірність кожного значення випадкової величини X.

15. Довести, що коли $X(E)$, $E \in \Omega$, є випадковою величиною, (S-вимірною функцією), то для кожного її значення x_0 множина $(X = x_0) = \{E \in \Omega : X(E) = x_0\} = X^{-1}(x_0)$ є подією, а тому можна обчислити відповідну статистичну ймовірність $P_n^*(X = x_0) = P(X^{-1}(x_0))$.

16*. Нехай функція $X(E)$, $E \in \Omega$, має не більш ніж зчисленну множину значень. Довести, що вона є випадковою величиною (S-вимірною функцією) тоді й тільки тоді, коли для кожного її значення x_0 множина $X^{-1}(x_0) = \{E : X(E) = x_0\} = (X = x_0)$ є подією.

17. Нехай функція $X(E)$, $E \in \Omega_1^m$, – кількість відбувань події $A \subset \Omega_1$ у m незалежних випробуваннях.

1. Яких значень набуває ця функція?

2. Яким повинен бути ймовірнісний простір $(\Omega_1^m, S_m, \tilde{P}_m^*)$, щоб ця функція була випадковою величиною?

3. Для кожного значення x_0 даної функції знайти подію $X^{-1}(x_0)$ та статистичну ймовірність цієї події $\tilde{P}_m^*(X^{-1}(x_0))$.

4. Чи можна змінити простір подій S_m або ймовірнісну міру $\tilde{P}_m^*$ так, щоб функція $X(E)$, $E \in \Omega_1^m$ вже не була випадковою величиною?

17. Прості випадкові величини

Випадкову величину (S-вимірну функцію) $X = X(E)$, $E \in \Omega$ називають *простою*, якщо множина значень цієї величини скінченна, тобто $X(\Omega) = \Omega_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $m \in N$, де числа x_k попарно різні.

Прості випадкові величини надзвичайно важливі, оскільки за їх допомогою можна досліджувати й випадкові величини з нескінченною множиною значень.

Приклади простих випадкових величин

1. Якщо функція $X(E) = c = const$, $E \in \Omega$, то її називають *сталою випадковою величиною*. Множина значень сталої випадкової величини складається з одного елемента c, тобто $X(\Omega) = \Omega_X = \{c\}$. При цьому $X^{-1}(c) = \Omega$.

2. Якщо A – випадкова подія і

$$X(E) = \begin{cases} 1, \text{ коли } E \in A, \\ 0, \text{ коли } E \notin A, \end{cases}$$

то цю випадкову величину називають *індикатором події* A. Множина значень цієї простої випадкової величини складається з двох елементів 1 і 0, тобто $X(\Omega) = \Omega_X = \{0,1\}$, при цьому S_X містить всі підмножини множини Ω_X, $X^{-1}(0) = \overline{A}$, $X^{-1}(1) = A$.

3. Якщо X – кількість очок на грані грального кубика, якою кубик падає догори після однократного підкидання, то X – проста випадкова величина з можливими значеннями 1, 2, 3, 4, 5, 6, тобто $X(\Omega) = \Omega_X = \{1,2,3,4,5,6\}$. При цьому $\Omega = \{"1","2","3","4","5","6"\}$, $X("k") = k$, $k \in \overline{1,6}$, кожна множина $\{"k"\}$, $k \in \overline{1,6}$, є подією, S_X містить всі підмножини множини Ω_X.

4. Кількість $k = k_m(A)$ відбувань події A в серії із m випробувань – проста випадкова величина, що може набувати значень 0, 1, 2, …, $m-1$, m. При цьому $\Omega_X = \{0, 1, 2, ..., m\}$, S_X містить всі підмножини множини Ω_X.

$$\Omega = \Omega_1^m = \{(E_1, E_2, \ldots, E_n\} : E_k = A \text{ або } \overline{A}, k \in \overline{1,m}\},$$

$X((E_1, E_2, \ldots, E_m)) = k_m$ – кількість E_i, що дорівнюють A, серед усіх E_i, $i \in \overline{1,m}$, і кожна множина $\{E\} \subset \Omega_1^m$ є подією з імовірнісною мірою $\tilde{P}_m^*(\{E\}) = (P_n^*(A))^k (1 - P_n^*(A))^{m-k}$, $k \in \overline{0,m}$, де k – кількість координат E_k, що дорівнюють A. Тому

$$\tilde{P}_m^*(X^{-1}(k)) = C_m^k (P_n^*(A))^k (1 - P_n^*(A))^{m-k}, \quad k = \overline{0,m}.$$

5. Статистична ймовірність $P_m^*(A)$ події A, визначена за результатами серії із m випробувань – проста випадкова величина $X(E)$, що може набувати значень $\frac{0}{m}$, $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$, …, $\frac{m-1}{m}$, $\frac{m}{m}$. При цьому $\Omega = \Omega_1^m$ і $\tilde{P}_m^*$ такі, як і у прикладі 4, а $X(E) = X((E_1, E_2, \ldots, E_m)) = \frac{k}{m}$, де k – кількість E_i, що дорівнюють A, серед усіх E_i, $i \in \overline{1,m}$.

Спостережене значення випадкової величини $P_m^*(A)$ позначатимемо $P_{m\ cn}^*(A)$.

Якщо $X(E)$ і $Y(E)$, $E \in \Omega$, – *прості випадкові величини, то їх сума* $Z(E) = X(E) + Y(E)$, *різниця* $Z(E) = X(E) - Y(E)$, *добуток* $Z(E) = X(E) \cdot Y(E)$, *частка* $Z(E) = X(E) / Y(E)$, $E \in \Omega$, – *прості випадкові величини. Сума і добуток довільної скінченної кількості простих випадкових величин* $X = X_k(E)$, $E \in \Omega$, $k \in \overline{1,m}$, *також є простою випадковою величиною*.

Узагальненням цього є твердження про те, що *коли* $X_k = X_k(E)$ – *прості випадкові величини для* $k \in \overline{1,m}$, *то будь-яка дійсна функція* $Y = f(X_1(E), X_2(E), ..., X_m(E)), E \in \Omega$, *також є простою випадковою величиною за умови, що* $(X_1(E), ..., X_m(E))$ *належить області визначення* $D(f)$ *функції* f *для кожного* $E \in \Omega$. *Зокрема, якщо* $X = X(E)$ – *проста випадкова величина, то* $Y = X^m(E)$, $Y = \sqrt[m]{X}$ (*для парного* m $X(E)$ *повинна бути невід'ємною*), $Y = e^{X(E)}$, $Y = \ln X(E)$ (*коли* $X(E) > 0$ *для* $E \in \Omega$), $Y = \sin X(E)$, $Y = |X| = \sqrt{X^2}$, $Y = \cos X(E)$ *тощо також є простими випадковими величинами*.

Прості випадкові величини X та Y називають *незалежними відносно міри* P_{nX}^*, коли для будь-яких чисел $a \in X(\Omega)$ та $b \in Y(\Omega)$ події $X^{-1}(a)$ та $Y^{-1}(b)$ є незалежними відносно міри P_n^* з відповідного ймовірнісного простору (Ω, S, P_n^*), тобто $P_n^*(X^{-1}(a) \cap Y^{-1}(b)) = P_n^*(X^{-1}(a)) \cdot P_n^*(Y^{-1}(b))$. В іншому разі X та Y називають *залежними випадковими величинами.*

Залежність чи незалежність випадкових величин суттєво визначається статистичною ймовірністю (ймовірнісною мірою) P_n^*.

Випадкові величини $X_1, X_2, ..., X_m$ називаються *попарно незалежними*, коли будь-які дві з них є незалежними.

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Нехай $\Omega = [0;1)$, X – індикатор події $A = [0; 0{,}5) \subset \Omega = [0;1)$, Y – індикатор події $B = [0{,}25;1)$.

Тоді $X^{-1}(1) = A = [0; 0{,}5)$, $X^{-1}(0) = \overline{A} = [0{,}5;1)$;

$$Y^{-1}(1) = B = [0{,}25;1),\ Y^{-1}(0) = \overline{B} = [0; 0{,}25).$$

Якщо $Z(E) = X(E) + Y(E)$, то

а) $Z(E) = 2$, коли $E \in X^{-1}(1)$ і $E \in Y^{-1}(1)$ тобто

$$Z^{-1}(2) = X^{-1}(1) \cap Y^{-1}(1) = [0; 0{,}5) \cap [0{,}25;1) = [0{,}25; 0{,}5).$$

б) $Z(E)=1$, коли $E\in X^{-1}(1)\bigcap Y^{-1}(0)$ або $E\in X^{-1}(0)\bigcap Y^{-1}(1)$, тобто

$$Z^{-1}(1)=(X^{-1}(1)\bigcap Y^{-1}(0))\bigcup(X^{-1}(0)\bigcap Y^{-1}(1))=$$
$$=([0;0,5)\bigcap[0;0,25))\bigcup([0,5;1)\bigcap[0,25;1))=[0;0,25)\bigcup[0,5;1).$$

в) $Z(E)=0$, коли $E\in X^{-1}(0)$ і $E\in Y^{-1}(0)$, тобто

$$Z^{-1}(0)=X^{-1}(0)\bigcap Y^{-1}(0)=[0,5;1)\bigcap[0;0,25)=\varnothing.$$

Таким чином,

$$Z(E)=X(E)+Y(E)=\begin{cases}2, & \text{коли } E\in[0,25;0,5),\\ 1, & \text{коли } E\in[0;0,25)\bigcup[0,5;1).\end{cases}$$

Вправа 2. 1. Нехай X та Y із вправи 1.

Якщо $P_n^*([a,b))=b-a,\ [a,b)\subset[0,1),$ то

$$P_n^*(X^{-1}(1)\bigcap Y^{-1}(1))=0,5-0,25\neq P_n^*(X^{-1}(1))\cdot P_n^*(Y^{-1}(1))=0,5\cdot 0,75=0,375.$$

Це означає, що випадкові величини X та Y відносно такої міри P_n^* залежні.

2. Нехай P_n^* визначена так, що $P_n^*([0,25;0,5))=1$. Тоді і

$$P_n^*([0;0,5))=P_n^*([0,25;1))=1,\ P_n^*([0;0,25))=P_n^*([0,5;1))=0.$$
$$P_n^*(X^{-1}(1)\bigcap Y^{-1}(1))=1=P_n^*(X^{-1}(1))\cdot P_n^*(Y^{-1}(1))=1\cdot 1,$$
$$P_n^*(X^{-1}(1)\bigcap Y^{-1}(0))=0=P_n^*(X^{-1}(1))\cdot P_n^*(Y^{-1}(0))=1\cdot 0,$$
$$P_n^*(X^{-1}(0)\bigcap Y^{-1}(1))=0=P_n^*(X^{-1}(0))\cdot P_n^*(Y^{-1}(1))=0\cdot 1,$$
$$P_n^*(X^{-1}(0)\bigcap Y^{-1}(0))=0=P_n^*(X^{-1}(0))\cdot P_n^*(Y^{-1}(0))=0\cdot 0.$$

Це означає, що випадкові величини X та Y незалежні відносно останньої міри P_n^*.

Вправа 3. 1. Якщо X і Y та P_n^* з вправи 2.2, а $Z(E)=1$, коли $E\in\Omega$, то легко бачити, що X, Y та Z – попарно незалежні прості випадкові величини, оскільки стала випадкова величина з будь-якою випадковою величиною утворює пару незалежних величин, бо $Z^{-1}(1)=\Omega$.

2. Нехай проведено m незалежних випробувань і подія A_k означає відбування події A у k-му випробуванні. Тоді події A_k попарно незалежні, а тому індикатори цих подій $X_k=X_{A_k}(E)$, $k\in\overline{1,\ m}$, $E=(E_1,\ E_2,\ \dots,E_m)\in\Omega_1{}^m$, також попарно незалежні стосовно міри $\widetilde{P}_m^*$, оскільки $X_k^{-1}(1)=A_k$, $X_k^{-1}(0)=\overline{A}_k$, $k\in\overline{1,m}$ і тому

$$\widetilde{P}_m^*(X_k^{-1}(a)\cap X_i^{-1}(b))=\widetilde{P}_m^*(X_k^{-1}(a))\cdot\widetilde{P}_m^*(X_i^{-1}(b)),$$

коли $k\neq i$, $a\in\{0;1\}$ і $b\in\{0;1\}$.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо множина значень функції $X(E)$, $E \in \Omega$, скінченна, то $X(E)$ є простою випадковою величиною.

2. Твердження, обернене до 1, є правильним.

3. Кожна випадкова величина є простою.

4. Існують випадкові величини, що не є простими.

5. Якщо функція $X(E)$, $E \in \Omega$, така, що $P_n^*(\{E \in \Omega : X(E) \neq 1\}) = 0$, то ця функція є випадковою величиною.

6. Функція $X(E)$, $E \in \Omega$, з твердження 5 є простою випадковою величиною.

7. Якщо існують події $A_k \subset \Omega,\ k \in \overline{1,s}$, для яких $\sum_{k=1}^{s} A_k = \Omega$ і $X(E) = c_k$, коли $E \in A_k$, $k \in \overline{1,s}$, то $X(E)$, $E \in \Omega$, – проста випадкова величина.

8. Якщо $X_1(E) + X_2(E),\ E \in \Omega$, – проста випадкова величина, то $X_1(E)$ і $X_2(E)$ – прості випадкові величини.

9. Твердження, обернене до 8, є правильним.

10. Для будь-якої простої випадкової величини $X(E)$, $E \in \Omega$, функція $Y = \sqrt{X(E)}$ є простою випадковою величиною.

11. Випадкові величини $X_1(E)$ та $X_2(E)$, $E \in \Omega$, незалежні, коли $P_n^*(X_1^{-1}(a) \cap X_2^{-1}(a)) = P_n^*(X_1^{-1}(a)) \cdot P_n^*(X_2^{-1}(a))$ для деякого числа a.

12. Залежність випадкових величин визначається ймовірнісною мірою, тобто відносно однієї міри випадкові величини можуть бути залежними, а відносно іншої – незалежними.

13. Існує ймовірнісний простір, для якого будь-які дві випадкові величини є незалежними.

14. Прості випадкові величини $X_1(E)$ та $X_2(E)$, $E \in \Omega$, є незалежними тоді й тільки тоді, коли вони *майже сталі*, тобто існують сталі c_i, для яких $P_n^*(\{E \in \Omega : X_i(E) \neq c_i\}) = 0$, $i \in \overline{1,2}$.

2. Нехай X_1 – індикатор події $A = [0;1] \subset R = \Omega$, а X_2 – індикатор події $B = [1;2] \subset \Omega$. Знайти: суму, різницю, добуток і частку X_1 та X_2.

3. Навести приклад випадкової величини, що не є простою.

4. Навести приклад ймовірнісного простору (Ω, S, P_n^*) і функції $X(E),\ E \in \Omega$, що має скінченну множину значень, проте не є простою випадковою величиною.

5. Довести, що коли $X(E), E \in \Omega$, – проста випадкова величина, то й $Y = |X(E)|,\ E \in \Omega$, також проста випадкова величина. Перевірити, чи правильне обернене твердження.

6*. 1. Довести, що функція $X(E),\ E \in \Omega$ є простою випадковою величиною тоді й тільки тоді, коли існує скінченна кількість попарно несумісних подій $A_k \subset \Omega,\ k \in \overline{1,n}$, така, що $\sum_{k=1}^{n} A_k = \Omega$, на кожній з яких функція $X(E)$ є сталою.

2. Визначити, чи обов'язково $X(A_k) \neq X(A_i)$, коли $k \neq i$.

3. Чи можна у твердженні 1 опустити умову попарної несумісності подій A_k, $k \in \overline{1,n}$?

7. Відомо, що прості випадкові величини $X(E)$ та $Y(E),\ E \in \Omega$ набувають лише значень 0 та 1. Чи обов'язково сума цих випадкових величин набуває значень: 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 0 або 1; 5) 0 або 2; 6) 1 або 2; 7) 0 або 1, або 2?

8. Нехай дано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*), подія $A \in S$ і проведено три незалежних випробування, у кожному з яких подія A відбувається із статистичною ймовірністю $P_n^*(A) = p$ та не відбувається із статистичною ймовірністю $P_n^*(\overline{A}) = 1 - p = q$. Нехай також X_k – випадкова величина, що є індикатором відбування події A у k-му випробуванні, $k \in \overline{1,3}$.

1. Вказати область визначення кожної випадкової величини X_k та її значення у кожній точці області визначення.

2. Знайти усі можливі значення випадкової величини $Y = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$ та статистичні ймовірності цих значень.

3. З'ясувати зв'язок випадкової величини Y із статистичною ймовірністю $P_3^*(A)$.

9. 1. З'ясувати, які функції $X(E),\ E \in \Omega$, є простими випадковими величинами:

1) $X(E) = \begin{cases} 1, \text{ коли } E \in A; \\ -1, \text{ коли } E \notin A, \end{cases}$

A – подія з імовірнісного простору (Ω, S, P_n^*);

2) $X(E) = E^2$, $E \in (-\infty; +\infty) = \Omega$ і кожен проміжок є подією;

3) $X(E) = \begin{cases} 1, \text{ коли } E \in A; \\ -1, \text{ коли } E \notin A, \end{cases}$

A не є подією;

4) X – кількість влучень при трьох пострілах, в кожному з яких влучення відбувається з статистичною ймовірністю 0.8;

5) X – кількість підкидань монети до першого випадання герба;

6) $X(E),\ E\in\Omega$, – довільна випадкова величина, а Ω є дискретною множиною;

7) $X(E),\ E\in\Omega_1^m$, – кількість відбувань події A в m незалежних випробуваннях.

2. Розподілом статистичних ймовірностей на множині значень простої випадкової величини $X(E),\ E\in\Omega$, для якої $X(\Omega)=\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m\}$, а $P(X=x_k)=p_k$, $k\in\overline{1,\ m}$, називається таблиця

x_k	x_1	x_2	$\ldots$	x_m
p_k^*	p_1^*	p_2^*	$\ldots$	p_m^*

Вказати розподіл статистичних ймовірностей значень кожної простої випадкової величини із завдання 1) – 7).

10. Довести, що коли $X(E),\ E\in\Omega$, – проста випадкова величина, то для кожного її значення x_0 існує $P_m^*(X^{-1}(x_0))$, де $X^{-1}(x_0))=\{E: E\in\Omega, X(E)=x_0\}$. Перевірити, чи є правильним обернене твердження.

11. Довести, що коли функції $X_k(E),\ E\in\Omega,\ k\in N$, – прості випадкові величини, то такими є й функції: 1) $\sum\limits_{k=1}^{m}X_k$; 2) $\prod\limits_{k=1}^{m}X_k$; 3) X_1-X_2; 4) X_1/X_2; 5) $f(X_1)$, де f – довільна функція, область визначення якої містить множину $X_1(\Omega)$.

12. Чи може розподіл статистичних ймовірностей значень простої випадкової величини мати вигляд:

1)

x_k	0	1	2	3
p_k	0,2	0,1	0,4	0,5

2)

x_k	0	1	2	3
p_k	0	0,2	0,3	0,5

3)

x_k	0	1	2	3
p_k	0,1	0,2	0,3	C

13. Нехай випадкова величина X – кількість появ герба при трьох підкиданнях монети. Знайти розподіл статистичних ймовірностей на множині значень цієї величини, якщо при кожному підкиданні статистична ймовірність появи герба: 1) є сталою і дорівнює $\frac{1}{2}$; 2) не є сталою, а набуває, наприклад, значень 0,51; 0,49; 0,5.

14. Нехай X – можлива відносна частота відбування події A у чотирьох незалежних випробуваннях X. Знайти область визначення і множину значень цієї величини, а також розподіл статистичних ймовірностей на множині значень цієї величини, якщо у кожному випробуванні статистична ймовірність відбування події A є: 1) однаковою і дорівнює p; 2) не є однаковою, а набуває, наприклад, значень p_1, p_2, p_3 та p_4.

15. Розподіли статистичних ймовірностей на множинах значень випадкових величин $X(E)$ та $Y(E)$, $E \in \Omega$, мають вигляд:

x_k	-1	0	1
p_k	0,2	0,3	0,5

y_k	0	1	2
q_k	0,1	0,3	0,6

Визначити розподіли статистичних ймовірностей на множинах значень випадкових величин: 1) $X+Y$; 2) $X \cdot Y$ у випадку, коли X і Y а) незалежні випадкові величини; б) залежні випадкові величини.

18. Числові характеристики розподілів статистичних ймовірностей на множинах значень простих випадкових величин

Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) та просту випадкову величину $X(E)$, $E \in \Omega$, множина значень якої $\Omega_X = X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Тоді за означенням *статистичним математичним сподіванням* $M_n^*(X)$ та *статистичною дисперсією* $D_n^*(X)$ цієї випадкової величини є числа:

$$M_n^*[X] = \sum_{k=1}^{m} x_k P_n^*(X^{-1}(x_k)), \qquad (18.1)$$

$$D_n^*[X] = M_n^*[(X - M_n^*(X))^2] = \sum_{k=1}^{m} (x_k - M_n^*(X))^2 P_n^*(X^{-1}(x_k)). \qquad (18.2)$$

Число $M_n^*[X]$ називають також *середнім статистичним значенням* простої випадкової величини X, а число $D_n^*[X]$ – *мірою розсіювання* статистичних ймовірностей на множині значень простої випадкової величини навколо середнього статистичного значення.

Приклад 18.1.

1. Якщо $X(E) = c$, $E \in \Omega$, – стала випадкова величина, то

$$\Omega_X = X(\Omega) = \{c\}, \; S_X = \{\varnothing, \{c\}\}, \; X^{-1}(c) = \Omega, \; P_n^*(X^{-1}(c)) = P_n^*(\Omega) = 1$$

і тому

$$M_n^*[c] = c \cdot 1 = c, \qquad D_n^*[c] = M_n^*[(c-c)^2] = M_n^*[0] = 0.$$

2. Якщо $X_A(E)$, $E \in \Omega$, – індикатор події A, то

$$\Omega_X = X(\Omega) = \{1, 0\}, \; S_X = \{\varnothing, \{1\}, \{0\}, \{0,1\}\}, \; X^{-1}(1) = A,$$

$$X^{-1}(0) = \overline{A}, \; P_n^*(X^{-1}(1)) = P_n^*(A) = p, \; P_n^*(X^{-1}(0)) = P_n^*(\overline{A}) = 1 - p.$$

Тому

$$M_n^*[X_A]=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p\,,$$

$$D_n^*[X_A]=(1-p)^2\cdot p+(0-p)^2\cdot(1-p)=p(1-p)(1-p+p)=p(1-p)\,.$$

Статистичне математичне сподівання та статистична дисперсія простої випадкової величини мають такі *основні властивості*.

1. *Статистичне математичне сподівання сталої дорівнює цій сталій* (див. приклад 18.1):

$$M_n^*[c]=c\,.$$

2. *Статистична дисперсія сталої дорівнює нулеві* (див. приклад 18.1):

$$D_n^*[c]=0\,.$$

3. *Сталу можна виносити за знак статистичного математичного сподівання простої випадкової величини*:

$$M_n^*[cX]=cM_n^*[X]\,.$$

4. *За знак статистичної дисперсії стала виноситься в квадраті*:

$$D_n^*\left[cX\right]=c^2D_n^*\left[X\right].$$

5. *Статистичне математичне сподівання суми простих випадкових величин дорівнює сумі їхніх статистичних математичних сподівань*:

$$M_n^*[X+Y]=M_n^*[X]+M_n^*[Y]\,.$$

За методом математичної індукції можна довести, що

$$M_n^*[\sum_{i=1}^{k}X_i]=\sum_{i=1}^{k}M_n^*[X_i],\ k\in N\,.$$

6. *Статистичне математичне сподівання лінійної комбінації простих випадкових величин X та Y дорівнює цій лінійній комбінації їхніх статистичних математичних сподівань*:

$$M_n^*[aX+bY]=aM_n^*[X]+bM_n^*[Y]\,.$$

7. *Якщо* $X[E]\ge 0,\ E\in\Omega$, то $M_n^*[X]\ge 0$.

8. *Якщо* $X(E)\ge Y(E),\ E\in\Omega$, то $M_n^*[X]\ge M_n^*[Y]$.

9. *Статистичне математичне сподівання добутку незалежних простих випадкових величин X і Y дорівнює добуткові їх математичних сподівань*:

$$M_n^*[X\cdot Y]=M_n^*[X]\cdot M_n^*[Y]\,.$$

10. *Статистична дисперсія суми незалежних простих випадкових величин X і Y дорівнює сумі їх дисперсій*:

$$D_n^*[X+Y]=D_n^*[X]+D_n^*[Y]\,.$$

11. *Статистична дисперсія лінійної комбінації (з коефіцієнтами a і b) незалежних простих випадкових величин X*

та Y дорівнює лінійній комбінації їх статистичних дисперсій з коефіцієнтами a^2 і b^2:

$$D_n^*[aX+bY]=a^2D_n^*[X]+b^2\ D_n^*[Y].$$

Дана властивість має місце для будь-якої скінченної кількості попарно незалежних випадкових величин X_j, $j\in\overline{1,r}$:

$$D_n^*\left[\sum_{j=1}^{r}a_jX_j\right]=\sum_{j=1}^{r}a_j^2\ D_n^*[X_j].$$

12. Якщо X – невід'ємна проста випадкова величина, число $\varepsilon>0$ і множина $A_\varepsilon=\{E:E\in\Omega, X(E)\ge\varepsilon\}$, то A_ε є подією, для якої має місце нерівність П.Л. Чебишова:

$$P_n^*(A_\varepsilon)\le\frac{1}{\varepsilon}M_n^*[X].$$

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Довести, що $M_n^*[cX]=cM_n^*[X]$.

Справді, якщо $\Omega_X=X(\Omega)=\{x_1,\ x_2,\ \ldots,x_s\}$, а $Y=cX$, то для $c\ne0$

$$\Omega_Y=Y(\Omega)=\{cx_1,\ cx_2,\ \ldots,cx_s\},\ Y^{-1}(cx_i)=X^{-1}(x_i),$$
$$P_n^*(Y^{-1}(cx_i))=P_n^*(X^{-1}(x_i)),\ i=\{1,2,\ldots,s\},$$

тому

$$M_n^*[Y]=M_n^*[cX]=\sum_{i=1}^{s}cx_iP_n^*(X^{-1}(x_i))=c\sum_{i=1}^{s}x_iP_n^*(X^{-1}(x_i))=cM_n^*[X].$$

Вправа 2. Довести властивість 10 дисперсії.

За означенням статистичної дисперсії

$$D_n^*[X+Y]=M_n^*[(X+Y-M_n^*[X+Y])^2]=$$
$$=M_n^*[((X-M_n^*[X])+(Y-M_n^*[Y]))^2]=$$
$$=M_n^*[(X-M_n^*[X])^2+2(X-M_n^*[X])(Y-M_n^*[Y])+(Y-M_n^*[Y])^2]=$$
$$=M_n^*[(X-M_n^*[X])^2+2M_n^*[(X-M_n^*[X])(Y-M_n^*[Y])]+$$
$$+M_n^*[(Y-M_n^*[Y])^2]]=D_n^*[X]+D_n^*[Y],$$

оскільки

$$M_n^*[(X-M_n^*[X])(Y-M_n^*[Y])]=$$
$$=M_n^*[X\cdot Y-YM_n^*[X]-XM_n^*[Y]+M_n^*[X]\cdot M_n^*[Y]=$$
$$=M_n^*[X]\cdot M_n^*[Y]-M_n^*[Y]\cdot M_n^*[X]-M_n^*[X]\cdot M_n^*[Y]+M_n^*[X]\cdot M_n^*[Y]=0,$$

бо X і Y незалежні прості випадкові величини.

Вправа 3. Довести нерівність П.Л. Чебишова.

Якщо

$$\Omega_X=X(\Omega)=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\},\ \text{де}\ 0\le x_1<x_2<\ldots<x_m,$$

то для фіксованого $\varepsilon > 0$ знайдемо найменший номер n_0, для якого $x_{n_0} \geq \varepsilon$. Тоді $x_k \geq \varepsilon$, коли $k \geq n_0$, а множина $A_\varepsilon = \bigcup_{k=n_0}^{m} X^{-1}(x_k)$ і тому є подією. При цьому

$$M_n^*[X] = \sum_{k=1}^{m} x_k P_n^*(X^{-1}(x_k)) \geq \sum_{k=n_0}^{m} x_k P_n^*(X^{-1}(x_k)) \geq \varepsilon \sum_{k=n_0}^{m} P_n^*(X^{-1}(x_k)) =$$

$$= \varepsilon P_n^*(\bigcup_{k=n_0}^{m}(X^{-1}(x_k)) = \varepsilon P_n^*(A_\varepsilon).$$

Отже,

$$M_n^*[X] \geq \varepsilon P_n^*(A_\varepsilon), \text{тобто } P_n^*(A_\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} M_n^*[X].$$

Зауваження. Подію A_ε, яка полягає у тому, що випадкова величина X набуває значення, не меншого за ε, позначають також $(X \geq \varepsilon)$, а тому нерівність П.Л. Чебишова часто записують у вигляді $P_n^*(X \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} M_n^*[X]$. Зокрема,

$$P_n^*(|X - M_n^*[X]| \geq \varepsilon) =$$

$$= P_n^*((X - M_n^*[X])^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} M_n^*[(X - M_n^*[X])^2] = \frac{1}{\varepsilon^2} D_n^*[X].$$

Нерівність

$$P_n^*(|X - M_n^*[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{D_n^*[X]}{\varepsilon^2}$$

також називають нерівністю П.Л. Чебишова.

Вправа 4. Два гравці домовилися, що за результатом гри увесь призовий фонд забере той, хто перший виграє n партій. Проте за непередбачуваних обставин гру закінчили, коли першому гравцеві залишилося до перемоги виграти $n_1 = 3$ партій, а другому – $n_2 = 4$ партій. У якому співвідношенні вони повинні поділити призовий фонд, якщо статистична ймовірність виграшу у кожній партії для кожного гравця дорівнює $\frac{1}{2}$.

Побудуємо ймовірнісну модель для даної задачі. Випадковий експеримент полягає у тому, що гравці грають доти, поки перший гравець не виграє 3 партії або другий не виграє 4 партії.

Результатами експерименту будемо вважати впорядковані набори цифр 1 та 2, причому якщо на i-му місці стоїть 1 або 2, то це означає, що i-ту партію виграв відповідно перший або другий гравець. Кількість цифр у наборі визначає кількість зіграних партій. Тоді простір Ω елементарних подій складається з наборів:

3 партії: (1,1,1);
4 партії: (2,1,1,1), (1,2,1,1), (1,1,2,1), (2,2,2,2);
5 партій: (2,1,1,2,1), (1,2,1,2,1), (1,1,2,2,1), (2,2,1,1,1), (2,1,2,1,1), (1,2,2,1,1), (2,2,2,1,2), (2,2,1,2,2), (2,1,2,2,2), (1,2,2,2,2);
6 партій: (2,2,2,1,1,1), (2,1,1,2,2,1), (1,2,1,2,2,1), (1,1,2,2,2,1), (2,2,1,1,2,1), (2,1,2,1,2,1), (1,2,2,1,2,1), (2,2,1,2,1,1), (2,1,2,2,1,1), (1,2,2,2,1,1), (2,2,2,1,1,2), (2,1,1,2,2,2), (1,2,1,2,2,2), (1,1,2,2,2,2), (2,2,1,1,2,2), (2,1,2,1,2,2), (1,2,2,1,2,2), (2,2,1,2,1,2), (2,1,2,2,1,2), (1,2,2,2,1,2).

Вважаючи результати партій, що пов'язані з кожною елементарною подією, незалежними подіями, дістанемо, що

$$P_n^*(1.1.1) = \frac{1}{8},\ P_n^*(E_1, E_2, E_3, E_4) = \frac{1}{16},\ P_n^*(E_1, E_2, E_3, E_4, E_5) = \frac{1}{32}$$

і $P_n^*(E_1, E_2, E_3 E_4, E_5 E_6) = \dfrac{1}{64}$, де $E_k = 1$ або $E_k = 2$ для кожного k.

Нехай подія A полягає у тому, що призовий фонд забирає перший гравець. Цій події сприяють 1 елементарна подія, що відповідає трьом партіям, 3 елементарні події, що відповідають чотирьом партіям, 6 елементарних подій, що відповідають п'яти партіям і 10 елементарних подій, що відповідають 6 зіграним партіям. Тому

$$P_n^*(A) = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{6}{32} + \frac{10}{64} = \frac{42}{64}.$$

Аналогічно

$$P_n^*(\overline{A}) = \frac{1}{16} + \frac{4}{32} + \frac{10}{64} = \frac{22}{64}.$$

Розглянемо тепер випадкові величини, що є величиною виграшу кожного гравця:

$$X_1(E) = \begin{cases} S, \text{ коли } E \in A, \\ 0, \text{ коли } E \notin A, \end{cases} \quad X_2(E) = \begin{cases} S, \text{ коли } E \in \overline{A}, \\ 0, \text{ коли } E \notin \overline{A}, \end{cases}$$

де S – призовий фонд. Тоді математичне сподівання (сума, на яку доцільно сподіватися кожному гравцеві):

$$M[X_1] = S \cdot P_n^*(A) + 0 \cdot P_n^*(\overline{A}) = \frac{42}{64} S,$$

$$M[X_2] = S \cdot P_n^*(\overline{A}) + 0 \cdot P_n^*(A) = \frac{22}{64} S.$$

Це означає, що першому гравцеві доцільно сподіватися на $\frac{42}{64}$ від призового фонду, а другому – на $\frac{22}{64}$ від цього фонду.

У такому співвідношенні, тобто $\frac{42}{64} : \frac{22}{64} = 22:11 = 2:1$, гравці й повинні поділити призовий фонд.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Кожна проста випадкова величина має статистичне математичне сподівання і статистичну дисперсію, які можна обчислити єдиним способом.

2. Якщо $X(E)$, $E \in \Omega$, – проста випадкова величина, то $D_n^*[X] = M_n^*[X^2] - (M_n^*[X])^2$.

3. Якщо X – проста випадкова величина і $P_n^*(\{E : E \in \Omega, X(E) \neq c\}) = 0$ для деякої константи c, то $M_n^*[X] = c$.

4. Якщо X – з твердження 3, то $D_n^*[X] = 0$.

5. Для будь-яких простих випадкових величин X та Y $M_n^*[XY] \neq M_n^*[X] \cdot M_n^*[Y]$.

6. Для будь-яких простих випадкових величин X та Y $M_n^*[X \pm Y] = M_n^*[X] \pm M_n^*[Y]$.

7. Якщо $M_n^*[X] \geq M_n^*[Y]$, то $X \geq Y$.

8. Для будь-яких простих випадкових величин X та Y $D_n^*[X + Y] = D_n^*[X] + D_n^*[Y]$.

9. Нерівність Чебишова має місце для будь-якої простої випадкової величини.

2. Знайти статистичне математичне сподівання і статистичну дисперсію випадкової величини X, якщо:

1. $X(E_i) = i$, коли $E_i = "i" \in \{"1", "2", "3", "4", "4", "5", "6"\} = \Omega$, а $P_n^*(E_i) = \dfrac{1}{6}$, $i \in \overline{1,6}$; $i \in S_X$ для всіх i.

2. $\Omega_X = X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $P_n^*(x_i) = C_n^{x_i} (\frac{1}{2})^{x_i} (\frac{1}{2})^{n - x_i}$, $x_i \in \Omega_X$, $n = 5$, $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, S_X містить всі підмножини множини Ω_X.

3. $\Omega_X = X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, S_X містить всі підмножини множини Ω_X, $a = 1$,

$$P_n^*(x_i) = \frac{a^{x_i}}{x_i!} e^{-a}, \; x_i \in \Omega_X, \; i \in \overline{0,\, 9}, \; P_n^*(x_{10}) = 1 - \sum_{i=0}^{9} P_n^*(x_i).$$

3*. Нехай $X(E)$ і $Y(E)$, $E \in \Omega$, – прості випадкові величини, причому $\Omega_X = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $\Omega_Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Довести, що:

1. $X(E) = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i I_{X^{-1}(x_i)}(E)$, $Y(E) = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j I_{Y^{-1}(y_j)}(E)$, $E \in \Omega$, де $I_A(E)$ – індикатор події A.

2. X і Y – незалежні тоді й тільки тоді, коли $X_i = I_{X^{-1}(x_i)}$ та $Y_j = I_{Y^{-1}(y_j)}$ є незалежними для будь-яких $i \in \overline{1,k}$, $j \in \overline{1,m}$.

3. Випадкові величини $X_i = I_{X^{-1}(x_i)}$ та $Y_j = I_{Y^{-1}(y_j)}$ є незалежними тоді й тільки тоді, коли $M_n^*[X_i \cdot Y_j] = M_n^*[X_i] \cdot M_n^*[Y_j]$.

4. Якщо X і Y – незалежні, то й $(X+a)$ та $(Y+b)$ – незалежні для будь-яких чисел a і b.

4. Довести, що $D_n^*[X] \le (\max\limits_{1\le k\le m} x_k - \min\limits_{1\le k\le m} x_k)^2$, коли $\Omega_X = \{x_1, \ldots, x_m\}$.

5. *Задача Паскаля*. Два гравці Γ_1 і Γ_2 домовилися, що за результатом гри усю суму грошей забере той, хто перший виграє 5 партій. Проте за непередбачуваних обставин гру закінчили, коли гравець Γ_1 виграв 4 партії, а гравець Γ_2 – 3 партії. У якому співвідношенні вони повинні поділити суму грошей, якщо статистична ймовірність виграшу кожного гравця у кожній партії дорівнює $\frac{1}{2}$?

6. Сформулювати і розв’язати *задачу Луки Пачолі* (1494 р.), яку можна дістати, замінивши у задачі Паскаля 5 на 3, 4 на 2, а 3 на 1.

7. Сформулювати і розв’язати *задачу П’єра Ферма* (1654), яку можна дістати, замінивши у задачі Паскаля 5 на довільне $n \ge 3$, 4 на $(n-2)$, а 3 на $(n-3)$.

8. Нехай проста випадкова величина $X(E),\ E \in \Omega$, має m значень та рівномірний розподіл статистичних ймовірностей на множині її значень, тобто $P_n^*(X = x_k) = \frac{1}{m}$ для кожного значення $x_k,\ k \in \overline{1,m}$. Знайти статистичне математичне сподівання та статистичну дисперсію випадкової величини X.

9. Знайти $M_n^*[X]$ та $D_n^*[X]$, коли X – проста випадкова величина, значення якої є:

1) кількість відбувань події A в m незалежних випробуваннях;

2) кількість бракованих виробів у партії з 2000 виробів, якщо навмання взятий виріб є бракованим із статистичною ймовірністю 0,01;

3) кількість пострілів до першого влучення або до закінчення набоїв, кількість яких дорівнює 5, якщо статистична ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює $p \in (0; 1)$.

10. Двоє стрільців незалежно один від одного зробили по одному пострілу у мішень. Нехай X – кількість влучень у мішень. Знайти $M_n^*[X]$ та $D_n^*[X]$, коли статистична ймовірність влучення у мішень дорівнює 0,8 для першого стрільця і 0,7 – для другого.

11. Підкидається два гральних кубики і фіксується пара цифр, що випали на верхніх гранях кубиків. На сукупності Ω таких пар $(i, j),\ i \in \overline{1,6},\ j \in \overline{1,6}$, визначена функція X, значеннями якої є числа $X(i,j)=i+j$. Всі пари $(i,\ j)$ виявилися статистично рівноможливими.

1. Побудувати ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*), для якого X є випадковою величиною та: 1) знайти розподіл статистичних ймовірностей на множині значень цієї величини; 2) обчислити $M_n^*[X]$ та $D_n^*[X]$; 3) для чисел $\varepsilon \in \{2,6,12\}$ знайти подію $A_\varepsilon = \{E : E \in \Omega, X(E) \geq \varepsilon\}$ та переконатися, що виконується відповідна нерівність Чебишова.

2. Побудувати ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*), для якого X не є випадковою величиною.

12. На просторі Ω із завдання 11.1:

1) визначити дві випадкові величини X та Y;
2) знайти їх суму та добуток;
3) перевірити залежні чи ні ці випадкові величини;
4) перевірити, чи виконуються рівності:

а) $M_n^*[X+Y] = M_n^*[X] + M_n^*[Y]$; $D_n^*[X+Y] = D_n^*[X] + D_n^*[Y]$;

б) $M_n^*[X \cdot Y] = M_n^*[X] M_n^*[Y]$; $D_n^*[XY] = D_n^*[X] D_n^*[Y]$.

13*. Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) і дві прості випадкові величини $X(E),\ E \in \Omega$ та $Y(E),\ E \in \Omega$. Довести *нерівність Коші-Буняковського*:

$$\left| M_n^*[XY] \right|^2 \leq M_n^*[X^2] \cdot M_n^*[Y^2].$$

14*. За умов задачі **13** застосувати нерівність Коші-Буняковського до випадкових величин $(X - M_n^*[X])$ та $(Y - M_n^*[Y])$ і довести, що:

1) $M_n^*[(X - M_n^*[X])(Y - M_n^*[Y])] = M_n^*[XY] - M_n^*[X] M_n^*[Y]$;

2) $\left| \dfrac{M_n^*[XY] - M_n^*[X] M_n^*[Y]}{\sqrt{D_n^*[X]}\sqrt{D_n^*[Y]}} \right| \leq 1$.

19. Закон великих чисел для статистичних ймовірностей

Нехай проводиться серія із m незалежних випробувань і нехай X_i – індикатор події A_i – появи події A в i-тому випробуванні із спостереженою статистичною ймовірністю $P_{m,\,cn}^*(A) = p_m$. Очевидно X_i – проста випадкова величина, яка визначена на просторі $\Omega_1{}^m$ з мірою $\tilde{P}_m^*$, породженою мірою p_m (див. п. 1.15), і може набувати двох значень – 0 і 1, причому $X_i^{-1}(1) = A_i$, $X_i^{-1}(0) = \overline{A}_i$. При цьому $P_m^*(A) = \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i = X(E)$,

$E=(E_1,\ E_2,\ ...,\ E_m)\in\Omega_1{}^m$, де кожне E_k дорівнює A або $\overline{A}$, а тому $X(E)=P_m^*(A)$ також проста випадкова величина, визначена на просторі $\Omega_1{}^m$ з мірою $\tilde{P}_m^*$, а значеннями $P_m^*(A)$ є числа $0,\ \frac{1}{m},\ \frac{2}{m},\ ...,1$ – усі можливі значення статистичної ймовірності події A.

Одним з можливих значень $P_m^*(A)$ є число p_m. За допомогою міри $\tilde{P}_m^*$ можна оцінити можливість досить значного відхилення від числа p_m усіх інших значень статистичної ймовірності $P_m^*(A)$:

$$\tilde{P}_m^*(|\,P_m^*(A)-p_m\,|\ge\varepsilon)\le\frac{D_m^*[P_m^*(A)]}{\varepsilon^2}\le\frac{1}{4m\varepsilon^2} \qquad (19.1)$$

або

$$\tilde{P}_m^*(|\,P_m^*(A)-p_m\,|<\varepsilon)\ge 1-\frac{1}{4m\varepsilon^2}\,. \qquad (19.2)$$

Закон великих чисел для статистичних ймовірностей*: при досить великих m практично всі значення випадкової величини $P_m^*(A)$ групуються біля числа $M_m^*[P_m^*(A)]=p_m$. Тому, якщо числа p_m стабілізуються при досить великих m, тобто із збільшенням m числа p_m практично перестають змінюватись, то практично перестають змінюватись із збільшенням m і спостережені значення випадкової величини $P_m^*(A)$. Вони стають близькими до фіксованого числа $P=P(A)$ (що не залежить від m). Це число і називають ймовірністю події A.*

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. Довести нерівності 19.1 та 19.2.

У вправі 17.3.2 показано, що випадкові величини X_i попарно незалежні, а у прикладі 18.1.2 обчислено $M_m^*(X_i)=p_m$ і $D_m^*(X_i)=p_m(1-p_m)$, $i\in\overline{1,\ m}$.

Тому за властивостями статистичного математичного сподівання і статистичної дисперсії одержуємо:

$$M_m^*[X]=M_m^*[P_m^*(A)]=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}M_m^*[X_i]=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}p_m=p_m.$$

$$D_m^*[X]=D_m^*[P_m^*(A)]=D_m^*\left[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}X_i\right]=\left(\frac{1}{m}\right)^2 D_m^*\left[\sum_{i=1}^{m}X_i\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{m}\right)^2 \sum_{i=1}^{m} D_m^*[X_i] \le \frac{m \cdot p_m(1-p_m)}{m^2} = \frac{p_m(1-p_m)}{m} \le \frac{1}{4m},$$

бо $D_m^*[X_i] = p_m(1-p_m) \le \frac{1}{4}$.

Таким чином, $D_m^*[P_m^*(A)] \to 0$, коли $m \to \infty$.

Оскільки $|P_m^*(A) - p_m| = |X(E) - M_m^*[X]|$, $E \in \Omega_1{}^m$, то за нерівністю П.Л. Чебишова дістаємо

$$\widetilde{P}_m^*(|P_m^*(A) - p_m| \ge \varepsilon) \le \frac{D_m^*[P_m^*(A)]}{\varepsilon^2} \le \frac{1}{4m\varepsilon^2}$$

або

$$\widetilde{P}_m^*(|P_m^*(A) - p_m| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{1}{4m\varepsilon^2}.$$

Вправа 2. Нехай проведено m незалежних випробувань, у кожному з яких подія A відбувається із статистичною ймовірністю $P_n^*(A) = p$, і за цими умовами визначено ймовірнісний простір $(\Omega_1^m, \widetilde{S}, \widetilde{P}_m^*)$, де $\Omega_1^m = \{E = (E_1, \dots, E_m): E_k = A$ або $E_k = \overline{A},\ k \in \overline{1,m}\}$, для кожного $E \in \Omega_1^m$ множина $\{E\} \in \widetilde{S}$, тобто є подією, і $\widetilde{P}_m^*(\{E\}) = p^s(1-p)^{m-s}$, якщо серед E_k, що утворюють E, рівно s дорівнюють A, а інші $m-s$ дорівнюють $\overline{A}$.

Нехай також $B_{m,\,s}$ означає подію з простору $\widetilde{S}$, яка полягає у тому, що в m незалежних випробуваннях подія A відбувається s разів або те саме, що визначена за m незалежними випробуваннями статистична ймовірність $P_m^*(A) = \frac{s}{m} = X(E)$, де $E = (E_1, E_2, \dots, E_m)$ і серед E_k рівно s дорівнюють A.

Позначимо B_ε^* – сукупність тих $E \in \Omega_1^m$, для яких $X(E) = P_m^*(A) > p + \varepsilon$, де число $\varepsilon > 0$ – довільне, але фіксоване.

Довести, що:

1. $B_{m,\,s} \subset B_\varepsilon^*$ тоді й тільки тоді, коли $s > m(p+\varepsilon)$.

2. Якщо $(p+\varepsilon) < 1$, то існує $s^* = \min\{s \in \overline{0,\ m} : s > m(p+\varepsilon)\}$, причому $s^* - 1 \le m(p+\varepsilon) < s^*$.

3. $1 \le s^* \le m$.

4. Якщо $m(p+\varepsilon) < m-1$, то $s^* \le m-1$.

5. $B_\varepsilon^* = \sum_{s=s^*}^{m} B_{m,\,s}$.

Доведення:

1. Елементарна подія $E=(E_1,\ E_2,\ ...,\ E_m)\in B_{m,\ s}$ тоді й тільки тоді, коли серед E_k рівно s дорівнюють A, тобто $E\in B_{m,\ s}\Leftrightarrow X(E)=P_m^*(A)=\dfrac{s}{m}$. Ця елементарна подія $E\in B_\varepsilon^*$ тоді й тільки тоді, коли $X(E)=P_m^*(A)=\dfrac{s}{m}>p+\varepsilon\Leftrightarrow s>m(p+\varepsilon)$. Твердження 1 доведено.

2. Оскільки $p+\varepsilon<1$, то множина $\{s\in\overline{0,\ m}:s>m(p+\varepsilon)\}$ не порожня і скінченна, а тому вона містить найменше число, тобто існує $s^*=\min\{s\in\overline{0,\ m}:s>m(p+\varepsilon)\}$.

Геометрично число s^* показано на Рис. 19.1, з якого видно, що $s^*-1\le m(p+\varepsilon)<s^*$

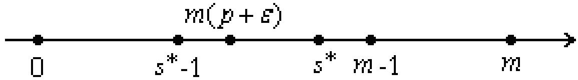

Рис. 19.1

Твердження 2 доведено.

3. Нерівність $s^*\le m$ очевидна, оскільки $p+\varepsilon<1$ і тому $m>m(p+\varepsilon)$. Оскільки $m(p+\varepsilon)>0$, то $s^*>0$, а оскільки s^* – ціле число, то $s^*\ge 1$. Твердження 3 доведено.

4. З Рис. 19.1 також видно, що коли додатково $m(p+\varepsilon)<m-1$, тобто $m>\dfrac{1}{1-p-\varepsilon}$, то $s^*\le m-1$.

5. Нехай $E\in B_\varepsilon^*$, тобто $X(E)=P_m^*(A)=\dfrac{s}{m}>p+\varepsilon$. Тоді $s>m(p+\varepsilon)$, а тому $s\ge s^*$, тобто $E\in B_{m,\ s}$ для деякого $s\ge s^*$. Це означає, що $B_\varepsilon^*\subset\sum\limits_{s=s^*}^{m}B_{m,\ s}$.

Навпаки, якщо $E\in\sum\limits_{s=s^*}^{m}B_{m,\ s}$, то існує $s\ge s^*$, для якого $E\in B_{m,\ s}$, тобто $X(E)=P_m^*(A)=\dfrac{s}{m}$ і $s\ge s^*$, а це гарантує, що $s>m(p+\varepsilon)$, тобто $\dfrac{s}{m}>p+\varepsilon$, отже, $E\in B_\varepsilon^*$.

Цим доведено, що $\sum\limits_{s=s^*}^{m}B_{m,\ s}\subset B_\varepsilon^*$, що разом із оберненим включенням дає потрібну рівність. Твердження 5 доведено.

Задачі

1*. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо $X_k, k \in \overline{1, m}$, – попарно незалежні прості випадкові величини, то $Z_m = \left| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} X_k - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} M_n^*[X_k] \right|$ також є простою випадковою величиною.

2. Випадкова величина Z_m з попереднього твердження при досить великих m може набувати досить великих значень.

3. Статистична ймовірність того, що Z_m набуває досить великих значень, є як завгодно малою, коли m досить велике число, а $D[X_k] \le c$ для всіх k.

4. Значення середнього арифметичного попарно незалежних простих випадкових величин з однаковими статистичними математичними сподіваннями можуть досить сильно відхилятися від спільного статистичного математичного сподівання цих величин.

5. Статистична ймовірність якої завгодно близькості значень середнього арифметичного попарно незалежних простих випадкових величин з однаковими статистичними математичними сподіваннями до їхнього спільного статистичного математичного сподівання мало відрізняється від 1, коли кількість цих випадкових величин досить велика, а їхні дисперсії не перевищують c.

6. Статистичні ймовірності $P_m^*(A)$ і $P_n^*(A)$ можуть відрізнятися одна від одної більше, ніж на 1.

7. Якщо у кожному k-му випробуванні, $k \in \overline{1, m}$, подія A відбувається з однією і тією самою статистичною ймовірністю $P_n^*(A)$, то $\widetilde{P}_m^*(| P_m^*(A) - P_n^*(A) | < 0{,}1) \ge 0{,}9$, коли $m \ge 250$, $m < n$.

2*. Нехай за досить великою серією випробувань визначена статистична ймовірність $P_n^*(A)$ події A – випадання герба при підкиданні монети: $P_n^*(A) = \frac{1}{2}$.

Для заданих чисел ε і δ знайти кількість m підкидань монети таку, що матиме місце нерівність

$$\widetilde{P}_m^*(| P_m^*(A) - \frac{1}{2} | < \varepsilon) > 1 - \delta:$$

1. $\varepsilon = 0{,}1, \ \delta = 0{,}1$;
2. $\varepsilon = 0{,}05, \ \delta = 0{,}02$;
3. $\varepsilon = 0{,}01, \ \delta = 0{,}0001$.

3*. Нехай: m – кількість незалежних випробувань, у кожному з яких подія A відбувається із статистичною ймовірністю $p = P_n^*(A)$; $B_{m,s}$ – подія, яка полягає у тому, що у даних m

випробуваннях подія A відбувалася s разів; B_ε^* – подія, яка полягає у тому, що $P_m^*(A) > p+\varepsilon$, а B_ε^{**} – подія, яка полягає у тому, що $P_m^*(A) < p-\varepsilon$; B_ε – подія, яка полягає у тому, що $|P_m^*(A) - p| > \varepsilon$.

1. Знайти : 1) співвідношення між подіями B_ε^* і $B_{m,s}$; 2) між B_ε та B_ε^* і B_ε^{**}.

2. Довести, що: 1) подія B_ε^{**} відбувається тоді й тільки тоді, коли $P_m^*(\overline{A}) > 1-p+\varepsilon$; 2) подія $B_{m,s}$ відбувається тоді й тільки тоді, коли $P_m^*(A) = \dfrac{s}{m}$; 3) $B_\varepsilon = B_\varepsilon^* + B_\varepsilon^{**}$, причому події B_ε^* та B_ε^{**} є несумісними.

3. Довести, що для кожної події $B_{m,s}$ існує принаймні одна s – елементна підмножина $\{ i_1, i_2, \ldots, i_s \}$ множини $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ така, що подія A відбувається у кожному i_k-му випробуванні, $k \in \overline{1, s}$, і подія A не відбувається у кожному j_k-му випробуванні, де

$$\{j_1, j_2, \ldots, j_{m-s}\} = \{1, 2, \ldots, m\} \setminus \{ i_1, i_2, \ldots, i_s \}.$$

4. Нехай подія A_{i_k} полягає у відбуванні події A у i_k-му випробуванні, а подія $\overline{A}_{j_k}$ – у невідбуванні події A у j_k-му випробуванні: Довести, що:

1) $B_{m,s} = \sum\limits_{\{i_k\}} \prod\limits_{k=1}^{s} A_{i_k} \prod\limits_{k=1}^{m-s} \overline{A}_{j_k}$, де знак $\sum\limits_{\{i_k\}}$ означає суму стількох доданків, скільки існує s – елементних підмножин $\{ i_1, i_2, \ldots, i_s \}$ у множині $M = \{1, 2, \ldots, m\}$;

2) кількість доданків у сумі для $B_{m,s}$ дорівнює C_m^s;

3) події A_{i_k}, $k \in \overline{1, s}$, $\overline{A}_{j_k}$, $k \in \overline{1, m-s}$, утворюють сукупність незалежних подій;

4) доданки в сумі для $B_{m,s}$ є попарно несумісними;

5) $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s}) = C_m^s p^s (1-p)^{m-s}$;

6) $\widetilde{P}_m^*(B_\varepsilon^*) = \sum\limits_{s=s^*}^{m} C_m^s p^s (1-p)^{m-s}$.

5. Довести існування такого числа $s_0 \in \overline{0, m}$, що:

1) $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s+1}) < \widetilde{P}_m^*(B_{m,s})$, коли $s \in [s_0; m]$;

2) $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s+1}) > \widetilde{P}_m^*(B_{m,s})$, коли $s \in [0; s_0 - 1]$;

3) $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s_0}) > \widetilde{P}_m^*(B_{m,\, s_0-1})$, коли $mp + p - 1$ не є цілим числом;

4) $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s_0}) = \widetilde{P}_m^*(B_{m,\, s_0-1})$, коли $mp + p - 1$ є цілим числом;

5) $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s_0}) = \max\limits_{0\le s\le m} \widetilde{P}_m^*(B_{m,\,s})$.

6. Довести, що числа s_0 із завдання 5 та s^* із твердження 2 вправи 2 пов'язані співвідношеннями $m\varepsilon + 2 - p > s^* - s^0 > m\varepsilon - p$, а тому $s^* \ge s_0$, коли $m\varepsilon \ge p_0$.

7. Довести, що коли s^* із завдання 6, то

1) $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s^*}) < \dfrac{1}{m\varepsilon}$;

2) $\widetilde{P}_m^*(B_{m,s^*+k}) \le \lambda_m^k\, \widetilde{P}_m^*(B_{m,s^*})$, $k \in \overline{1, m-s^*}$, де $\lambda_m = \dfrac{m-s^*}{s^*+1}\,\dfrac{p}{1-p}$;

3) $0 < \lambda_m < 1 - \dfrac{\varepsilon}{1-p} < 1$ і $1 - \lambda_m > \dfrac{\varepsilon}{1-p}$.

8. Довести, що:

1) $\widetilde{P}_m^*(B_\varepsilon^*) < \dfrac{1-p}{m\varepsilon^2}$, коли $p + \varepsilon < 1$ і $m > \dfrac{1}{1-p-\varepsilon}$;

2) $\widetilde{P}_m^*(B_\varepsilon^{**}) < \dfrac{p}{m\varepsilon^2}$, коли $1 - p + \varepsilon < 1$ і $m > \dfrac{1}{p-\varepsilon}$;

3) $\widetilde{P}_m^*(B_\varepsilon) < \dfrac{1}{m\varepsilon^2}$.

9. Довести, що $\widetilde{P}_m^*(|P_m^*(A) - p| > \varepsilon) \to 0$, коли $m \to \infty$.

10. Дослідити, чи можна дістати точнішу оцінку для $\widetilde{P}_m^*(B_\varepsilon) = (\left|P_m^*(A) - p\right| > \varepsilon)$, ніж вказану у твердженні 8.3).

20. Різні задачі

Зразки розв'язування вправ

Вправа 1. *Рівномірний дискретний розподіл* статистичних ймовірностей на скінченній множині $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ – це такий розподіл, при якому всі $P_n^*(x_i)$, $i \in \overline{1,k}$, рівні між собою, тобто $P_n^*(x_i) = \dfrac{1}{k}$ для всіх $i \in \overline{1,k}$.

Ряд рівномірного дискретного розподілу статистичних ймовірностей на множині точок $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ визначається таблицею 20.1.

Табл. 20.1

x_i	x_1	x_2	…	x_k
$P_n^*(x_i)$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}$	…	$\frac{1}{k}$

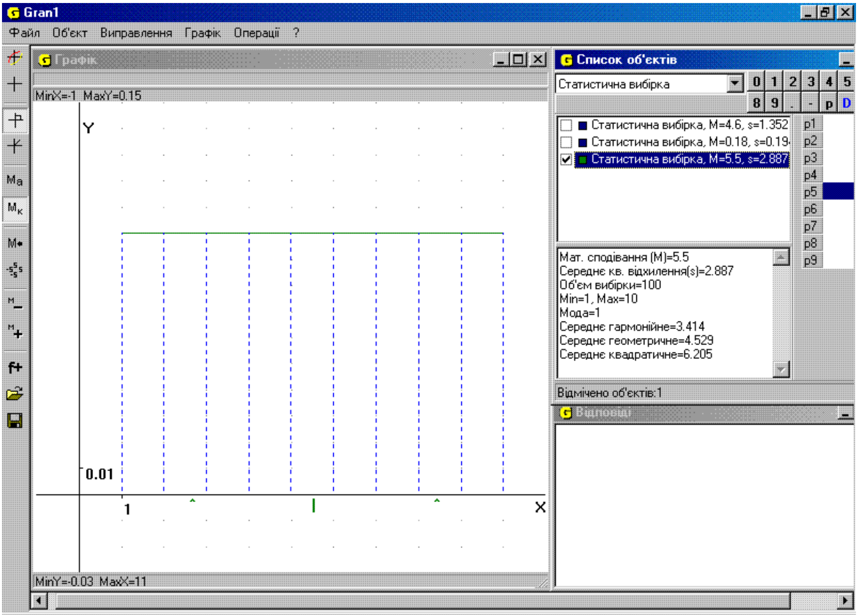

Рис. 20.1.

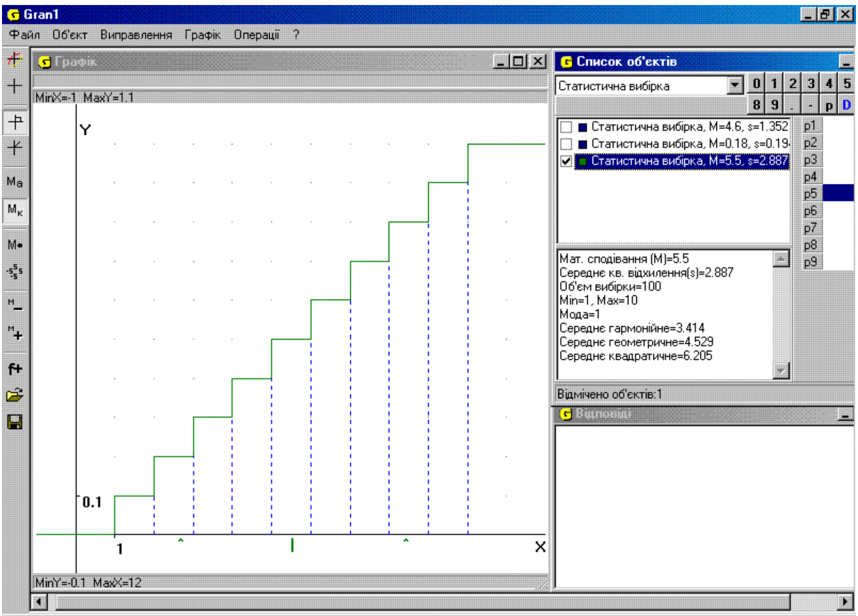

Рис. 20.2.

Відповідний многокутник розподілу подано на Рис. 20.1, а графік функції розподілу $F_n^*(x)$ – на Рис. 20.2

Якщо проста випадкова величина X має рівномірний дискретний розподіл ймовірностей, то її статистичне математичне сподівання і дисперсія відповідно дорівнюють:

$$M_n^*[X] = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i \ , \ D_n^*[X] = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \frac{1}{k^2}(\sum_{i=1}^{k} x_i)^2 .$$

Вправа 2. *Біноміальний розподіл* статистичних ймовірностей – це дискретний розподіл на множині точок $\{0, 1, 2, \ldots, m\}$, при якому $P_n^*(x_i) = C_m^{x_i} p^{x_i} q^{m-x_i}$, $x_i \in \overline{0, m},$ де $C_m^{x_i} = \dfrac{m!}{x_i!(m-x_i)!}$ – коефіцієнти розкладу бінома $(p+q)^m$ за степенями p і q, p і q – додатні числа такі, що $p+q=1.$ Якщо m досить велике, то многокутник біноміального розподілу досить близький до графіка функції $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sqrt{mpq}} e^{-\frac{(x-mp)^2}{2mpq}}$ (Рис. 20.3).

Якщо $p = q = \dfrac{1}{2},\ m = 8,$ то ряд біноміального розподілу буде мати вигляд, поданий у таблиці 20.2:

Табл. 20.2

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P_n^*(x_i)$	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{70}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$

Відповідний многокутник розподілу статистичних ймовірностей подано на Рис. 20.4. При цьому числа $0, 1, 2, \ldots, m$ – це можливі кількості появ деякої події A в m випробуваннях, а $\dfrac{0}{m}, \dfrac{1}{m}, \dfrac{2}{m}, \ldots, \dfrac{m}{m}$ – можливі значення відносної частоти (статистичної імовірності) відповідної кількості появ події A в m випробуваннях.

Якщо проста випадкова величина X має біномінальний розподіл ймовірностей на множині своїх значень $\{0, 1, 2, \ldots, m\}$, то її статистичні математичне сподівання і дисперсія відповідно дорівнюють:

$$M_n^*[X] = \sum_{i=0}^{m} iC_m^i p^i (1-p)^{m-i} = mp\sum_{i=1}^{m} \frac{i}{m} C_m^i p^{i-1}(1-p)^{m-i} =$$

$$= mp\sum_{i=1}^{m} C_{m-1}^{i-1} p^{i-1}(1-p)^{m-i} = mp\sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^{i} p^{i}(1-p)^{m-1-i} = mp,$$

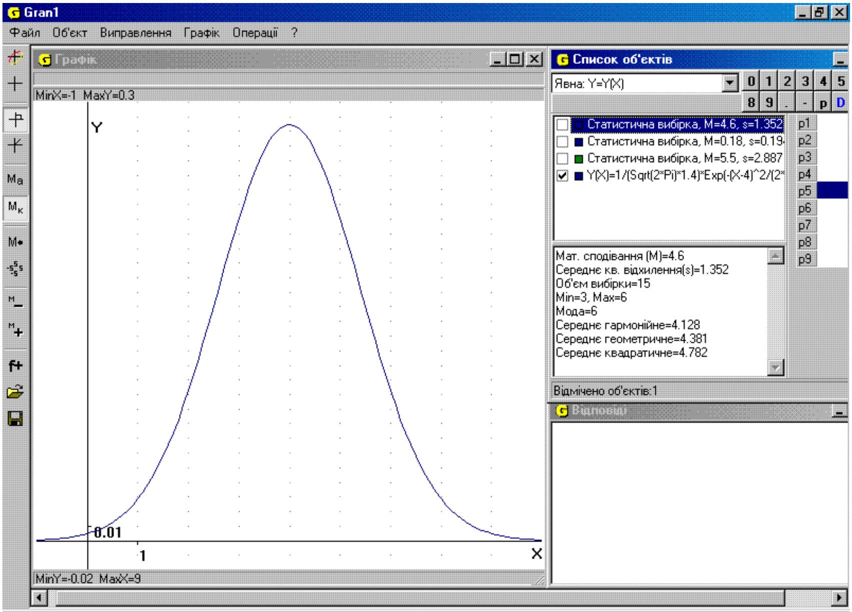

Рис. 20.3.

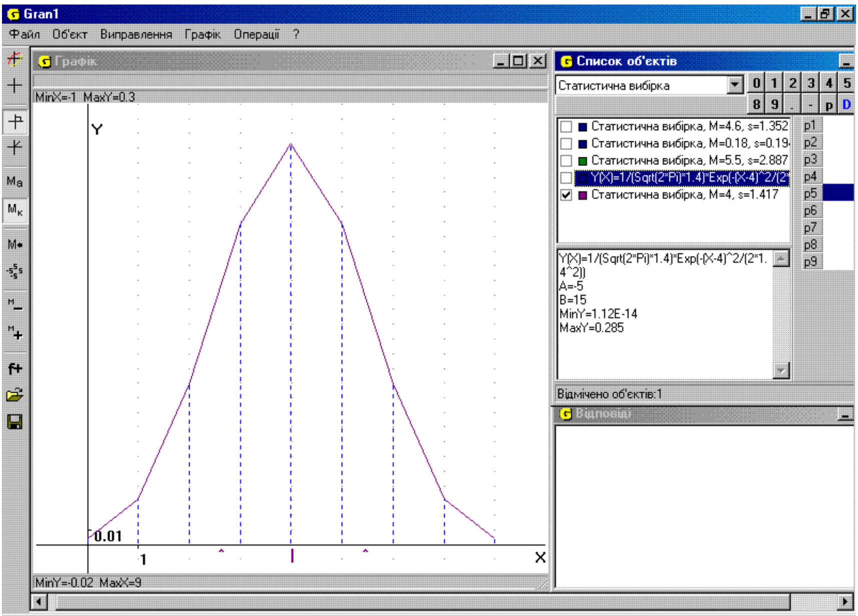

Рис. 20.4.

$$D_n^*[X]=M_n^*[X^2]-(M_n^*[X])^2=\sum_{i=0}^{m} i^2 C_m^i p^i (1-p)^{m-i}-m^2p^2=$$

$$=\sum_{i=0}^{m} i(i-1)C_m^i p^i (1-p)^{m-i}+\sum_{i=0}^{m} iC_m^i p^i (1-p)^{m-i}-m^2p^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{m} i(i-1)C_m^i p^i (1-p)^{m-i}+mp-m^2p^2=$$

$$=mp\sum_{i=2}^{m}(i-1)\frac{i}{m}C_m^i p^{i-1}(1-p)^{m-i}+mp-m^2p^2=$$

$$=mp\sum_{i=2}^{m}(i-1)C_{m-1}^{i-1} p^{i-1}(1-p)^{m-i}+mp-m^2p^2=$$

$$=mp\cdot(m-1)p\sum_{i=2}^{m}\frac{i-1}{m-1}C_{m-1}^{i-1} p^{i-2}(1-p)^{m-i}+mp-m^2p^2=$$

$$=m(m-1)p^2\sum_{i=2}^{m}C_{m-2}^{i-2} p^{i-2}(1-p)^{m-i}+mp-m^2p^2=$$

$$=m(m-1)p^2\sum_{i=0}^{m-2}C_{m-2}^{i} p^{i}(1-p)^{m-2-i}+mp-m^2p^2=$$

$$=m(m-1)p^2-m^2p^2+mp=mp-mp^2=mp(1-p).$$

Отже $M[X]=mp$, а $D[X]=mp(1-p)$

Вправа 3. *Рівномірний неперервний розподіл* статистичних ймовірностей на відрізку $[a;b]$ – це такий неперервний розподіл, щільність якого має вигляд

$$f_n^*(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & \text{коли } x\in[a;b],\\ 0, & \text{коли } x\notin[a;b],\end{cases}$$

Легко бачити, що для даного розподілу функція розподілу $F_n^*(x)$ матиме вигляд

$$F_n^*(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{коли } a\le x\le b,\\ 1, & \text{коли } b\le x.\end{cases}$$

Графік щільності $f_n^*(x)$ неперервного рівномірного розподілу статистичних ймовірностей на проміжку $[a;b]$ подано на Рис. 20.5, а графік відповідної функції розподілу $F_n^*(x)$ – на Рис. 20.6.

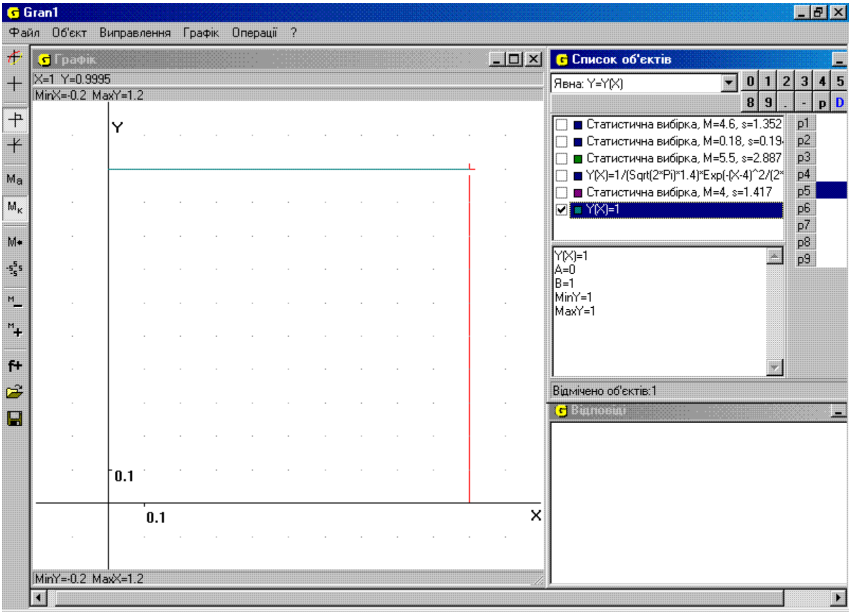

Рис. 20.5.

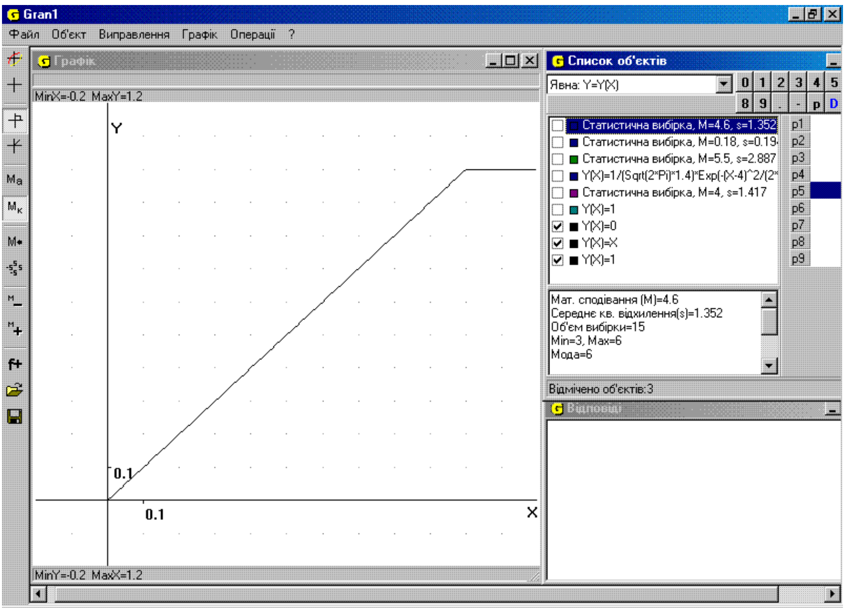

Рис. 20.6.

Для рівномірного неперервного розподілу статистичних ймовірностей центр розсіювання

$$m_n^* = \int_a^b x f_n^*(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx = \frac{a+b}{2},$$

а дисперсія

$$D_n^* = \int_a^b (x-m_n^*)^2 f_n^*(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b (x-m_n^*)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{3}((b-m_n^*)^3 - (a-m_n^*)^3) =$$

$$= \frac{1}{24(b-a)}((b-a)^3 + (b-a)^3) = \frac{1}{12}(b-a)^2 .$$

Вправа 4. *Нормальний розподіл з параметрами* a і σ – це неперервний розподіл статистичних ймовірностей на множині $\Omega = R = (-\infty;\ \infty)$, щільність якого $f_n^*(x)$ практично співпадає з функцією

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty; \infty),$$

де a і $\sigma > 0$ – задані дійсні числа.

Графік функції $f(x)$ подано на Рис. 20.7

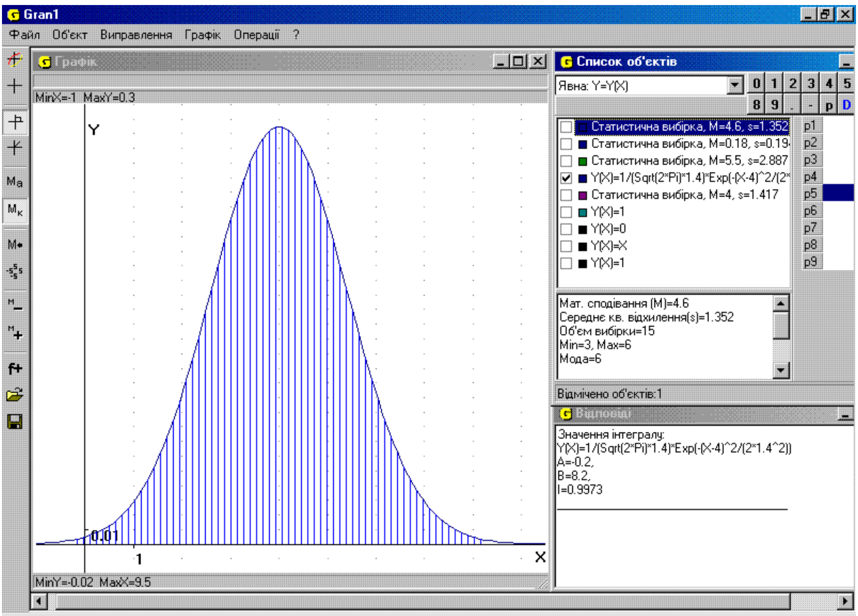

Рис. 20.7.

Виявляється, що для нормального розподілу з параметрами a і σ $P_n^*((a-3\sigma;\ a+3\sigma)) \approx 0.997$ (Рис. 20.7), тобто при нормальному розподілі статистичних ймовірностей спостережені значення $x_{\text{сп}\,i}$ за межами проміжка $(a-3\sigma;\ a+3\sigma)$ практично не зустрічаються (зустрічаються в середньому не частіше, ніж тричі в 1000 випробуваннях).

Крім того виявляється, що середнє арифметичне спостережених значень $x_{\text{сп}\,i}$ (однієї і тієї ж характеристики) у великій серії випробувань має розподіл статистичних ймовірностей, близький до нормального.

Вправа 5. У випадку рівномірного неперервного розподілу для довільного проміжка $\langle\alpha;\beta\rangle \subset [a;\ b]$

$$P_n^*(\langle\alpha;\ \beta\rangle) = \int_\alpha^\beta f_n^*(x)\,dx = F_n^*(\beta) - F_n^*(\alpha) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Тому при рівномірному розподілі статистичних ймовірностей на проміжку $[a;\ b]$ для відшукання $P_n^*(A)$ для довільної події A досить визначити міру $m(A)$ (загальну довжину проміжків, з яких утворено множину A), після чого $m(A)$ поділити на $m([a;\ b]) = b-a.$ Зокрема, при рівномірному неперервному розподілі статистичні ймовірності попадання в множини A і B однакової міри однакові.

Задачі

1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Полігон рівномірного розподілу відносних частот на множині $\Omega = \{1, 2, \ldots, m\}$ є відрізком з кінцями у точках $\left(1, \frac{1}{m}\right)$ і $\left(m, \frac{1}{m}\right)$.

2. Статистична ймовірність події A, пов'язану з рівномірним дискретним розподілом статистичних ймовірностей на скінченній множині $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, залежить лише від кількості елементів в A.

3. Координата центра розсіювання рівномірного дискретного розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega = \{1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$ дорівнює $\bar{x} = \frac{m+1}{2}$.

4. Для біноміального розподілу статистичних ймовірностей $P_n^*(x_k) > P_n^*(x_{k-1})$, якщо $k < (m+1)\,p$, і навпаки.

5. Полігон біноміального розподілу відносних частот може бути відрізком.

6. Полігон *розподілу Пуассона* відносних частот:

$P_n^*(m)=\dfrac{a^m}{m!}e^{-a}$, де $m=0,1,2,\ldots,\quad a>0$, може бути променем.

7. Для розподілу Пуассона $P_n^*(k)<P_n^*(k-1)$, якщо $k>a$, і навпаки.

2. Побудувати ряд розподілу, визначити центр розсіювання і дисперсію та побудувати графік функції розподілу статистичних ймовірностей для:

1. Рівномірного дискретного розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega=\{1,\ 2,\ \ldots,\ 10\}$.

2. Розподілу Пуассона, коли $a=\dfrac{1}{2}$.

3. Побудувати ряд розподілу і многокутник розподілу Пуассона статистичних ймовірностей для значення $a=1$.

4. Побудувати графіки функції розподілу $F_n^*(x)$ і щільності розподілу $f_n^*(x)$ *показникового розподілу статистичних ймовірностей* з параметром $\lambda>0$, якщо функція такого розподілу практично має вигляд

$$F_n^*(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, \text{ коли } x>0,\\ \quad 0, \qquad \text{коли } x\le 0.\end{cases}$$

5. Побудувати графіки функції розподілу $F_n^*(x)$ та щільності розподілу $f_n^*(x)$ для *розподілу Коші*, щільність розподілу якого практично має вигляд

$$f_n^*(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}\ ,\ x\in(-\infty;\ \infty)\,.$$

6. Нехай в урні є N кульок, серед яких N_1 чоних, $N_1<N$. Експеримент полягає в тому, що навмання дістають з урни n кульок і фіксують кількість чорних серед вийнятих кульок. Нехай $X(E)$, $E\in\Omega$, – кількість чорних серед вийнятих навмання n кульок.

1. Знайти область визначення Ω функції $X(E)$ та побудувати ймовірнісний простір $(\Omega,\ S,\ P_n^*)$, відносно якого $X(E)$ є простою випадковою величиною з *гіпергеометричним розподілом статистичних ймовірностей*:

$$p_i=\frac{C_{N_1}^{i}\,C_{N-N_1}^{n-i}}{C_N^n},\ i\in\overline{0,\ n}\,.$$

2. Довести, що коли $N\to\infty$, а числа n і $\dfrac{N}{N_1}$ залишаються фіксованими, то гіпергеометричний розподіл прямує до біномінального.

3. Знайти статистичні математичне сподівання та дисперсію випадкової виличини X з гіпергеометричним розподілом.

7. Нехай експеримент полягає у тому, що r кульок розміщують у s скриньок і фіксують вміст кожної скриньки.

1. Побудувати відповідний ймовірнісний простір $(\Omega,\ S,\ P_n^*)$.

2. З'ясувати, з яких елементарних подій складається подія $A_{i,\ k}$, яка полягає у тому, що i-та скринька містить k кульок, $i \in \overline{1,\ s}$, $k \in \overline{0,\ r}$.

3. Обчислити статистичні ймовірності $P_n^*(A_{i,\ 1})$, $i \in \overline{1,\ s}$, та $P_n^*(A_{1,\ 1} \cdot A_{1,\ 2})$ і умовні статистичні ймовірності $P_n^*(A_{1,\ 2} / A_{1,\ 1})$ та $P_n^*(A_{2,\ 1} / A_{1,\ 1})$. Якщо всі варіанти розташування кульок статистично рівноможливі.

4. Нехай: а) для кожної елементарої події $E \in \Omega$ множина $\{E\}$ є подією, а $X_1(E)$, $E \in \Omega$, – це кількість порожніх скриньок, що відповідає елементарній події $E \in \Omega$; б) існує елементарна подія $E_0 \in \Omega$, для якої множина $\{E_0\}$ не є подією, а $X_2(E)$, $E \in \Omega$, набуває значення 1, коли $E = E_0$ і значення 0, коли $E \neq E_0$.

З'ясувати, яка з функцій $X_1(E)$ та $X_2(E)$ обов'язково є випадковою величиною, а яка може і не бути випадковою величиною.

5. Знайти функцію розподілу статистичних ймовірностей значень випадкової величини із завдання 4 та визначити тип розподілу.

6. Для події $A = A_{1,\ 1}$ (див. завдання 2) знайти аналітичний вираз випадкової величини X – кількості відбувань події A у m незалежних випробуваннях.

7. Обчислити статистичні математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X.

8. Знайти значення випадкової величини, що зустрічається найчастіше.

9. Обчислити статистичну ймовірність того, що випадкова величина X набуває додатного значення.

10. Для заданого $\varepsilon > 0$ оцінити за допомогою нерівності Чебишова $\tilde{P}_m^*(|\ X - M_n^*[X]| \geq \varepsilon)$ і порівняти одержаний результат з безпосередньо обчисленою величиною $\tilde{P}_m^*(|\ X - M_n^*[X]| \geq \varepsilon)$.

Виконати завдання 1-10, вважаючи, що

1) $s = r = 3$; кульки попарно різні і скриньки попарно різні; $m = 3$; $\varepsilon = 0{,}1$;

2) $s = r = 3$; кульки однакові, (які не можна розрізнити), а скриньки попарно різні; $m = 4$; $\varepsilon = 0{,}2$;

3) $s = r = 3$; кульки попарно різні, а скриньки однакові; $m = 5$; $\varepsilon = 0{,}3$;
4) $s = r = 3$; кульки однакові та скриньки однакові; $m = 6$; $\varepsilon = 0{,}4$;
5) $s = 2$, $r = 3$; кульки попарно різні і скриньки попарно різні; $m = 3$; $\varepsilon = 0{,}1$;
6) $s = 2$, $r = 3$; кульки однакові, а скриньки попарно різні; $m = 4$; $\varepsilon = 0{,}2$;
7) $s = 2$, $r = 3$; кульки попарно різні, а скриньки однакові; $m = 5$; $\varepsilon = 0{,}3$;
8) $s = 2$, $r = 3$; кульки однакові та скриньки однакові; $m = 6$; $\varepsilon = 0{,}4$;
9) $s = 3$, $r = 2$; кульки попарно різні і скриньки попарно різні; $m = 3$; $\varepsilon = 0{,}1$;
10) $s = 3$, $r = 2$; кульки однакові, а скриньки попарно різні; $m = 4$; $\varepsilon = 0{,}2$;
11) $s = 3$, $r = 2$; кульки попарно різні, а скриньки однакові; $m = 5$; $\varepsilon = 0{,}3$;
12) $s = 3$, $r = 2$; кульки однакові і скриньки однакові; $m = 6$; $\varepsilon = 0{,}4$;
13) $s = r = 2$; кульки попарно різні і скриньки попарно різні; $m = 3$; $\varepsilon = 0{,}1$;
14) $s = r = 2$; кульки однакові, а скриньки попарно різні; $m = 4$; $\varepsilon = 0{,}2$;
15) $s = r = 2$; кульки попарно різні, а скриньки однакові; $m = 5$; $\varepsilon = 0{,}3$;
16) $s = r = 2$; кульки однакові і скриньки однакові; $m = 6$; $\varepsilon = 0{,}4$;
17) $s = 2$, $r = 1$; скриньки попарно різні; $m = 3$; $\varepsilon = 0{,}1$;
18) $s = 1$, $r = 2$; кульки попарно різні; $m = 4$; $\varepsilon = 0{,}2$;
19) $s = 4$; $r = 2$; кульки попарно різні та скриньки попарно різні; $m = 3$; $\varepsilon = 0{,}1$;
20) $s = 4$; $r = 2$; кульки однакові, а скриньки попарно різні; $m = 4$; $\varepsilon = 0{,}2$;
21) $s = 4$; $r = 2$; кульки попарно різні, а скриньки однакові; $m = 5$; $\varepsilon = 0{,}3$;
22) $s = 4$; $r = 2$; кульки однакові і скриньки однакові; $m = 6$; $\varepsilon = 0{,}4$;
23) $s = 2$; $r = 4$; кульки попарно різні і скриньки попарно різні; $m = 3$; $\varepsilon = 0{,}4$;
24) $s = 2$; $r = 4$; кульки однакові, а скриньки попарно різні; $m = 4$; $\varepsilon = 0{,}3$;

25) $s=2$; $r=4$; кульки попарно різні, а скриньки однакові; $m=5$; $\varepsilon=0{,}2$;

26) $s=2$; $r=4$; кульки однакові і скриньки однакові; $m=6$; $\varepsilon=0{,}1$;

27) $s=3$; $r=1$; скриньки попарно різні; $m=3$; $\varepsilon=0{,}4$;

28) $s=4$; $r=1$; скриньки попарно різні; $m=4$; $\varepsilon=0{,}3$;

29) $s=5$; $r=1$; скриньки попарно різні; $m=5$; $\varepsilon=0{,}2$.

8. Для заданої щільності розподілу статистичних ймовірностей знайти константу c; побудувати графік щільності розподілу статистичних ймовірностей; знайти функцію розподілу статистичних ймовірностей та побудувати її графік; обчислити статистичну ймовірність попадання в інтервал $[\alpha, \beta]$; знайти центр розсіювання, статистичні дисперсію і середнє квадратичне відхилення даного розподілу, коли:

1. $f_n^*(x)=\begin{cases} c, \ x\in[-2,\ 1] \\ 0, \ x \overline{\in} [-2,\ 1] \end{cases}$, $(\alpha,\ \beta)=(-1,\ 1)$;

2. $f_n^*(x)=\begin{cases} 0, \ x\le 0 \\ c\ \ \sin 2x, \ \ 0<x\le\pi \\ 0, \ x>\pi \end{cases}$, $(\alpha,\ \beta)=(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2})$;

3. $f_n^*(x)=\begin{cases} 0, \ x\le 1 \\ x-c, \ 1<x\le 2 \\ 0, \ x>2 \end{cases}$, $(\alpha,\ \beta)=(1,\ 1\frac{1}{2})$;

4. $f_n^*(x)=\dfrac{2c}{1+x^2}$, $\ x\in(-\infty,\ +\infty)$, $(\alpha,\ \beta)=(0,\ 1)$;

5. $f_n^*(x)=\begin{cases} 0, \ x<0 \\ c\cos x, \ \ 0<x\le\frac{\pi}{2} \\ 0, \ x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$, $(\alpha,\ \beta)=(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2})$;

6. $f_n^*(x)=\begin{cases} cx^2, \ x\in[-1,\ 1] \\ 0, \ x\le -1,\ x>1 \end{cases}$, $(\alpha,\ \beta)=(0,\ 1)$;

7. $f_n^*(x)=\begin{cases} 0, \ x\le\frac{\pi}{6} \\ c\ \ \sin 3x, \ \ \frac{\pi}{6}<x\le\frac{\pi}{3} \\ 0, \ x>\frac{\pi}{3} \end{cases}$, $(\alpha,\ \beta)=(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4})$;

8. $f_n^*(x) = \begin{cases} c(x+1), \ x \in [-1,\ 1] \\ 0, \ x \overline{\in} [-1,\ 1] \end{cases}$, $(\alpha,\ \beta) = (0,\ 1)$;

9. Для нормального розподілу ймовірностей з параметрами a, σ знайти статистичну ймовірність попадання у заданий інтервал (α, β), коли:

1. $a = 2$, $\sigma = 1$, $(\alpha;\ \beta) = [-1,\ 2)$;
2. $a = 1$, $\sigma = 3$, $(\alpha;\ \beta) = [-2,\ 2)$;
3. $a = 1$, $\sigma = 1$, $(\alpha;\ \beta) = [-3,\ 1)$;
4. $a = 1$, $\sigma = 4$, $(\alpha,\ \beta) = (a - \sigma,\ a + \sigma)$;
5. $a = 4$, $\sigma = 1$, $(\alpha,\ \beta) = (a - 2\sigma,\ a + 2\sigma)$;

<u>Додаток 1</u> Значення $\chi^2_{кр}$, які задовольняють рівність $P(\chi^2_r \le \chi^2_{кр}) = \alpha$, залежно від r і α

$r \backslash \alpha$	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	0.8	0.9	0.95	0.98	0.99	0.999
1	0.000	0.001	0.004	0.016	0.064	0.148	0.455	1.074	1.642	2.71	3.84	5.41	6.64	10.83
2	0.020	0.040	0.103	0.211	0.446	0.713	1.386	2.41	3.22	4.60	5.99	7.82	9.21	13.82
3	0.115	0.185	0.352	0.584	1.005	1.424	2.37	3.66	4.64	6.25	7.82	9.84	11.34	16.27
4	0.297	0.429	0.711	1.064	1.649	2.20	3.36	4.88	5.99	7.78	9.49	11.67	13.28	18.46
5	0.554	0.752	1.145	1.61	2.34	3.00	4.35	6.06	7.29	9.24	11.07	13.39	15.09	20.05
6	0.872	1.134	1.635	2.20	3.07	3.83	5.35	7.23	8.56	10.64	12.59	15.03	16.81	22.5
7	1.239	1.564	2.17	2.83	3.82	4.67	6.35	8.38	9.80	12.02	14.07	16.62	18.48	24.3
8	1.646	2.03	2.73	3.49	4.59	5.53	7.34	9.52	11.03	13.36	15.51	18.17	20.1	26.1
9	2.09	2.53	3.32	4.17	5.38	6.39	8.34	10.66	12.24	14.68	16.92	19.68	21.7	27.9
10	2.56	3.06	3.94	4.86	6.18	7.27	9.34	11.78	13.44	15.99	18.31	21.2	23.2	29.6
11	3.05	3.61	4.58	5.58	6.99	8.15	10.34	12.90	14.63	17.28	19.68	22.6	24.7	31.3
12	3.57	4.18	5.23	6.30	7.81	9.03	11.34	14.01	15.81	18.55	21.0	24.1	26.2	32.9
13	4.11	4.76	5.89	7.04	8.63	9.93	12.34	15.12	16.98	19.81	22.4	22.5	27.7	34.6
14	4.66	5.37	6.57	7.79	9.47	10.82	13.34	16.22	18.15	21.1	23.7	26.9	29.1	36.1
15	5.23	5.98	7.26	8.55	10.31	11.72	14.34	17.32	19.31	22.3	25.0	28.3	30.6	37.7
16	5.81	6.61	7.96	9.31	11.15	12.62	15.34	18.42	20.5	23.5	26.3	29.6	32.0	39.3
17	6.41	7.26	8.67	10.08	12.00	13.53	16.34	19.51	21.6	24.8	27.6	31.0	33.4	40.8
18	7.02	7.91	9.39	10.86	12.86	14.44	17.34	20.6	22.8	26.0	28.9	32.3	34.8	42.3
19	7.63	8.57	10.11	11.65	13.62	15.35	18.34	21.7	23.9	27.2	30.1	33.7	36.2	43.8
20	8.26	9.24	10.85	12.44	14.58	16.27	19.34	22.8	25.0	28.4	31.4	35.0	37.6	45.3
21	8.90	9.92	11.59	13.24	15.44	17.18	20.3	23.9	26.2	29.6	32.7	36.3	38.9	46.8
22	9.54	10.60	12.34	14.04	16.31	18.10	21.3	24.9	27.3	30.8	33.9	37.7	40.3	78.3
23	10.20	11.29	13.09	14.85	17.19	19.02	22.3	26.0	28.4	32.0	35.2	39.0	41.6	49.7
24	10.86	11.99	13.86	15.66	18.06	19.94	23.3	27.1	29.6	33.2	36.4	40.3	43.0	51.2
25	11.62	12.70	14.61	16.47	18.94	20.9	24.3	28.2	30.7	34.4	37.7	41.7	44.3	52.6
26	12.20	13.41	15.38	17.29	19.82	21.8	25.3	29.2	31.8	35.6	38.9	42.9	45.6	54.1
27	12.88	14.12	16.15	18.11	20.07	22.7	26.3	30.3	32.9	36.7	40.1	44.1	47.0	55.5
28	13.56	14.85	16.93	18.94	21.6	23.6	27.3	31.4	34.0	37.9	41.3	45.4	48.3	56.9
29	14.26	15.57	17.71	19.77	22.5	24.6	28.3	32.5	35.1	39.1	42.6	46.7	49.6	58.3
30	14.95	16.31	18.49	20.6	23.4	25.5	29.3	33.5	36.2	40.3	43.8	48.0	50.9	59.7

Список літератури

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1976. – 288 с.
2. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища школа, 1988. – 440 с.
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 448 с.
4. Жалдак М.І. Горошко Ю.В., Вінниченко Є.Ф. Математика з комп’ютером: Посібник для вчителів. – К.: РННЦ"ДІНІТ", 2004. – 255 с.
5. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974. – 120 с.
6. Майстров Д.Е. Теория вероятностей. Исторический очерк. – М.: Наука, 1967. – 320 с.
7. Скороход А.В. Вероятность вокруг нас. –К.: Наукова думка, 1980. – 196 с.
8. Толстов Г.П. Мера и интеграл. – М.: Наука, 1976. – 392 с.
9. Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, 1980. – 640 с.